Dix-sept chameaux (et plus)

Philippe Langlois(*) et Julien Moreau(**)
sur une idée de Simon Agou

1. Introduction : un célèbre conte oriental

Ce conte est souvent attribué à Nasreddin Hodja, personnage plus ou moins mythique qui aurait vécu dans la Turquie du XIIIe siècle. Mais il pourrait être plus ancien.

Un bédouin laissa dix-sept chameaux en héritage à ses trois fils. Selon son testament, la moitié revenait à l'aîné, le tiers au second fils et le neuvième au plus jeune. Ne pouvant s'entendre sur la façon de procéder au partage, les frères allèrent consulter un sage[1]. Celui-ci, après mûre réflexion, leur dit : « Je vais vous prêter un de mes chameaux et vous verrez que tout ira bien. » L'aîné eut alors la moitié de dix-huit chameaux, soit neuf, le second en eut le tiers, donc six, et le dernier le neuvième, donc deux, soit en tout dix-sept. Et le sage put reprendre le chameau prêté.

Le partage se fit donc selon la formule 9 + 6 + 2 + 1 = 18, qui s'écrit aussi $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$.

2. Interprétations arithmétiques et généralisation

Ce problème peut être mathématisé et généralisé de deux façons équivalentes.

Forme 1 : Écrire 1 comme somme de fractions « égyptiennes » (c'est-à-dire de numérateur 1) deux à deux distinctes, dont les dénominateurs divisent tous celui, n, de la dernière. Une telle écriture de 1 sera appelée ici une écriture (E_n)… terme absolument pas canonique.

Forme 2 : Écrire un entier n comme somme d'un certain nombre de ses diviseurs stricts parmi lesquels figurera obligatoirement 1.

♦ Explicitons ces deux propriétés.

La première s'écrit $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{n}=1$, avec $p_1 < p_2 < \dots < p_k < n$ et les p_i divisant tous n.

La seconde s'écrit $q_1 + q_2 + \dots + q_k + 1 = n$ avec $q_1 > q_2 > \dots > q_k > 1$, les q_i étant tous des diviseurs de n (évidemment stricts puisque leur somme est $n - 1$).

On passe de la première à la seconde en posant $q_i = n/p_i$ pour $1 \le i \le k$, de la seconde à la première en posant $p_i = n/q_i$ pour $1 \le i \le k$.

(*) philippe.r.langlois@gmail.com
(**) julien.e.moreau@gmail.com

(1) Selon certains auteurs, ce sage aurait été Ali, le gendre du Prophète.

Remarque : On voit immédiatement sur la forme 2 que, si n est premier, il n'y a pas d'écriture (E_n).

3. Exercices

Existe-t-il au moins une écriture (E_{30}) ? une écriture (E_{52}) ?

♦ $30 = 2 \times 3 \times 5$; ses diviseurs stricts sont 1, 2, 3, 5 et leurs produits deux à deux, 6, 10, 15. La somme des termes de cette liste est 42 ; pour avoir une somme de 30, il faut retirer des termes de somme 12 (mais on ne doit pas retirer 1). Une solution est de retirer le couple (2, 10) : $30 = 15 + 6 + 5 + 3 + 1$, d'où

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}.$$

Montrons que cette solution est la seule : on doit trouver dans la liste 15, 10, 6, 5, 3, 2 des termes de somme 12. Sont évidemment exclus 15 et 10 (ce dernier donnant la seule solution 10 + 2) ; restent 6, 5, 3, 2 avec lesquels on ne peut réaliser 12.

♦ $52 = 2 \times 2 \times 13$; les diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 13, 26 de somme 46 ; on ne peut donc pas trouver une somme partielle égale à 52. Il n'y a pas d'écriture (E_{52}) .

4. Écriture (E_n) à trois fractions

Peut-on écrire 1 sous la forme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{n}$, avec $1 < p < q < n$ et p et q divisant n ?

Il faut évidemment avoir $\frac{3}{p}>1$, ce qui impose $p = 2$ et donc aussi $\frac{1}{q}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$; il nous faut donc $\frac{2}{q}>\frac{1}{2}$ soit $q < 4$. On a donc $q = 3$, d'où $n = 6$, soit $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, ce qui manifestement convient.

Autre interprétation : 6 est le seul entier qui soit somme de 1 et de deux autres de ses diviseurs.

En revenant aux bédouins, on voit qu'un héritage de 5 chameaux peut être partagé comme suit : la moitié au fils aîné et le tiers au cadet, par le même artifice d'adjonction et retrait d'un chameau.

Remarque : Si n est le produit de deux nombres premiers p et q, avec $n \neq 6$, n n'a que trois diviseurs stricts (deux si $p = q$) : $1, p$ et q. D'après ce qui précède, il n'existe donc pas d'écriture (E_n).

5. Écriture (E_n) à quatre fractions

Peut-on écrire 1 sous la forme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{n}$, avec $1 < p < q < r < n$ et p, q et r divisant n ?

Il faut cette fois avoir $\frac{4}{p} > 1$, ce qui impose $p = 2$ ou $p = 3$.

Supposons $p = 3$; on ne peut avoir $n = 6$, car cela imposerait $q = 4$ et $r = 5$, alors que ces nombres divisent n. Donc, puisque p divise n, on a $n \geq 9$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \leq \frac{4}{9}$, ce qui entraîne $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ alors que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$, d'où contradiction.

On ne peut donc avoir que p = 2, d'où $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Il en résulte $\frac{3}{q} > \frac{1}{2}$, soit $q < 6$. Les seules possibilités *a priori* sont donc $q = 3$, $q = 4$ et $q = 5$.

Supposons $q = 3$; il vient $\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Posons $n = rx$ (avec $x > 1$). La relation $\frac{1}{r} + \frac{1}{rx} = \frac{1}{6}$ s'écrit $(r - 6)x = 6$; x divise 6, donc vaut 2, 3 ou 6, ce qui donne respectivement pour r les valeurs 9, 8 et 7 et pour n les valeurs 18, 24 et 42 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = 1 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = 1 \cdot$$

Supposons $q = 4$; il vient $\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$. Posons $n = rx$ (avec $x > 1$) ; la relation $\frac{1}{r} + \frac{1}{rx} = \frac{1}{4}$ donne $(r - 4)x = 4$; donc ($x = 2$, $r = 6$) ou ($x = 4$, $r = 5$). On arrive aux deux solutions :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 1 \cdot$$

Supposons $q = 5$; il vient $\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$. Posons encore $n = rx$ (avec $x > 1$). La relation $\frac{1}{r} + \frac{1}{rx} = \frac{3}{10}$ donne $(3r - 10)x = 10$; ($x = 2$, $r = 5$) est exclu, car donnant $q = r$; ($x = 5$, $r = 4$) est exclu, car donnant $q > r$; $x = 10$ est exclu, car donnant $3r = 11$.

Les cinq solutions trouvées plus haut sont donc les seules.

Autre interprétation : les seuls entiers qui soient somme de 1 et de trois autres de leurs diviseurs sont 12, 18, 20, 24, 42.

6. Allonger d'un cran une écriture (E_n)

♦ **Un exemple** : Partons de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=1$. Divisons par 2 ; on obtient $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{2}$ donc aussi $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=1$, qui est manifestement une écriture (E_{40}).

♦ **Généralisation** : Partant d'une écriture (E_n), $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{n}=1$, avec $p_1<p_2<\cdots<p_k<n$ et les p_i divisant tous n, on divise par 2 et on ajoute 1/2. Il vient $\frac{1}{2}+\frac{1}{2p_1}+\frac{1}{2p_2}+\cdots+\frac{1}{2p_k}+\frac{1}{2n}=1$ et les dénominateurs divisent tous le dernier d'entre eux, $2n$. On a donc bien une écriture (E_{2n}), dont tous les dénominateurs sont pairs.

7. Une autre façon d'allonger d'un cran une écriture (E_n)

♦ **L'idée** : on pourra trouver une écriture (E) plus longue si on arrive à trouver q et r strictement supérieurs à n tels que $\frac{1}{n}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ avec n et q divisant strictement r.

On est conduit à résoudre un problème indépendant de ce qui précède :
Étant donné un entier naturel n (n > 1), trouver deux entiers q et r strictement supérieurs à n tels que $\frac{1}{n}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ *avec* $n<q$ *, n et q divisant strictement r.*

♦ **une solution simple** : En divisant $n+1$ par $n(n+1)$ de deux façons différentes (en bloc et séparément), on obtient $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$, ce qui résout immédiatement notre problème.

♦ **d'autres solutions** : Si n n'est pas premier, posons $n = xz$, avec $x \neq 1$ et $z \neq 1$. Il suffit de diviser par z l'égalité $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}$ pour obtenir $\frac{1}{xz}=\frac{1}{z(x+1)}+\frac{1}{n(x+1)}$, qui répond manifestement à la question.

Exemple : Partant de $12 = 12\times 1 = 6\times 2 = 4\times 3 = 3\times 4 = 2\times 6 = 1\times 12$, on trouve

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{13}+\frac{1}{156}=\frac{1}{14}+\frac{1}{84}=\frac{1}{15}+\frac{1}{60}=\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{1}{18}+\frac{1}{36}.$$

La formule $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$ peut ainsi, de cinq façons différentes, être allongée d'un cran.

Remarque : Observons que le dernier dénominateur r obtenu par un tel allongement est forcément pair, car dans l'expression $r = xz(x+1)$ l'un des facteurs x ou $x+1$ est forcément pair.

8. Composer deux écritures (E_n)

Le procédé est proche de celui utilisé au § 6, qui revenait à remplacer dans $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ *le 1 du second numérateur par une écriture* (E_n).

Commençons par un exemple : partant des deux écritures $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=1$, on trouve aussitôt

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}+\frac{1}{120},$$

mais aussi

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120},$$

soit deux écritures (E) de plus grand dénominateur $6 \times 20 = 120$.

Plus généralement : considérons les deux écritures suivantes :

(E_n) $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{n}=1$, avec $p_1 < p_2 < \cdots < p_k < n$ et les p_i divisant tous n,

et d'autre part :

(E_m) $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\cdots+\frac{1}{q_h}+\frac{1}{m}=1$, avec $q_1 < q_2 < \cdots < q_h < m$ et les q_j divisant tous m.

On en déduit une écriture (E_{nm}) :

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{nq_1}+\frac{1}{nq_2}+\cdots+\frac{1}{nq_h}+\frac{1}{nm}=1$$

avec en outre $p_1 < p_2 < \cdots < p_k < nq_1 < nq_2 < \cdots < nq_h < nm$, les p_i et les nq_j divisant tous nm.

9. Une interrogation légitime

♦ Nous avons rencontré un certain nombre d'écritures (E_n). Ces écritures et celles qu'on peut en déduire par allongement d'un cran et par composition commencent toutes par $\frac{1}{2}$.

Ce qui amène à se poser une question : *toute écriture* (E_n) *commence-t-elle par* $\frac{1}{2}$?

♦ La réponse est *non*. On a en effet l'égalité $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=1$.

On peut remarquer qu'il existe au moins trois écritures (E_{72}), celle-ci et les deux que l'on obtient en combinant les écritures (E_6) et (E_{12}) déjà rencontrées, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$, ce qui donne $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}=1$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}=1$.

10. Autre interrogation légitime

On appellera D l'ensemble des entiers *n* pour lesquels existe au moins une écriture (E_n).

♦ Les écritures (E_n) déjà rencontrées et celles qu'on peut en déduire par allongement d'un cran et par composition ont toutes un dénominateur final pair. D'où la question : D *ne contient-il que des nombres pairs* ?

♦ La réponse est encore non. Mais il faut aller chercher assez loin pour trouver un contre-exemple : le plus petit qu'on puisse trouver est 945.

Montrons qu'il est bien dans D. De $945 = 3^3 \times 5 \times 7$ on tire la liste des diviseurs stricts :

$$1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35, 45, 63, 105, 135, 189, 315$$

Leur somme est 975 ; en retirant de la liste 9 et 21 on trouve bien 945 :

$$945 = 315 + 189 + 135 + 105 + 63 + 45 + 35 + 27 + 15 + 7 + 5 + 3 + 1$$

Et en divisant par 945 :

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{135}+\frac{1}{189}+\frac{1}{315}+\frac{1}{945},$$

ce qui permet … de résoudre le problème du bédouin qui veut partager inégalement ses 944 chameaux entre ses 12 fils.

Remarque 1 : Au lieu de retirer de la liste des diviseurs 9 et 21, on peut en retirer 3 et 27, d'où

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{45}+\frac{1}{63}+\frac{1}{105}+\frac{1}{135}+\frac{1}{189}+\frac{1}{945}.$$

Remarque 2 : On a vu plus haut (§ 8) que D est stable par multiplication. D contient donc une infinité de nombres impairs, car il contient au moins toutes les puissances de 945. Signalons que le plus petit élément de D au-delà de 945 est 1575.

APMEP n° 512

Annexe : 945 est le plus petit élément impair de D

A1. Nombres déficients

Un entier n strictement positif étant donné, notons $s(n)$ la somme de ses diviseurs stricts. Depuis l'Antiquité grecque, on dit que n est :
abondant si $s(n) > n$, **parfait** si $s(n) = n$, **déficient** si $s(n) < n$.

Les éléments de D sont évidemment tous parfaits ou abondants. Pour montrer qu'il n'y a pas d'élément impair de D inférieur à 945, *il suffira d'établir que tout impair n inférieur à 945 est déficient.*

Si on considère $S(n) = s(n) + n$, somme de tous les diviseurs de n, y compris n lui-même, on aura donc à démontrer que, pour tout impair n inférieur à 945, $S(n) < 2n$, c'est-à-dire encore $\dfrac{S(n)}{n} < 2$.

A2. Calcul de S(n)

a) *Si $n = p^k$, où p est premier,* $S(n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^k$ et $\dfrac{S(n)}{n} = 1 + \dfrac{1}{p} + \cdots + \dfrac{1}{p^k}$.

b) *Si $n = p^k q^h$ où p et q sont deux nombres premiers distincts,* les diviseurs de n sont les $p^u q^v$ tels que $0 \le u \le k$, $0 \le v \le h$. Leur somme est donc

$$S(n) = \left(1 + p + \cdots + p^k\right)\left(1 + q + \cdots + q^h\right)$$

et

$$\frac{S(n)}{n} = \left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^h}\right).$$

c) *Si $n = p^k q^h r^l$ où p, q et r sont trois nombres premiers distincts,* les diviseurs de n sont les $p^u q^v r^w$ tels que $0 \le u \le k$, $0 \le v \le h$, $0 \le w \le l$. Leur somme est donc

$$S(n) = \left(1 + p + \cdots + p^k\right)\left(1 + q + \cdots + q^h\right)\left(1 + r + \cdots + r^l\right)$$

et

$$\frac{S(n)}{n} = \left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^h}\right)\left(1 + \frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r^l}\right).$$

La formule est évidemment généralisable à un nombre quelconque de facteurs premiers distincts.

A3. Première majoration de $\dfrac{S(n)}{n}$ et première liste de nombres déficients

Nous utiliserons l'inégalité $1+x+\cdots+x^m < \dfrac{1}{1-x}$, valable pour $0 < x < 1$ et $m \geq 0$, que l'on peut justifier sans douleur en multipliant les deux membres par $1 - x$.

♦ *Si* $n = p^k$ (p premier, $k > 0$), de $\dfrac{S(n)}{n} = 1+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{p^k}$, on déduit $\dfrac{S(n)}{n} \leq 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}$, donc $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{1}{1-1/2}$, autrement dit $\dfrac{S(n)}{n} < 2$; n est donc déficient.

♦ *Si* $n = p^k q^h$ *où* p *et* q *sont deux nombres premiers impairs distincts* ($p < q$, $k > 0$, $h > 0$), on a

$$\frac{S(n)}{n} = \left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^k}\right)\left(1+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q^h}\right),$$

d'où $\dfrac{S(n)}{n} \leq \left(1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^k}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{5^h}\right)$ et $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{1}{1-1/3} \times \dfrac{1}{1-1/5}$, soit $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{15}{8} < 2$; n est donc déficient.

♦ *Si* $n = p^k q^h r^l$ *où* p, q *et* r *sont trois nombres premiers impairs distincts* ($p < q < r$), il faut jouer plus fin, car l'application brutale de la méthode précédente donne $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{1}{1-1/3} \times \dfrac{1}{1-1/5} \times \dfrac{1}{1-1/7}$, soit $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{105}{48}$, majorant supérieur à 2.

A4. Liste complémentaire de nombres déficients

♦ *Reprenons le cas* $n = p^k q^h r^l$ *où* p, q *et* r *sont trois nombres premiers impairs distincts, en supposant cette fois* $3 < p < q < r$.

On a $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{1}{1-1/5} \times \dfrac{1}{1-1/7} \times \dfrac{1}{1-1/11}$, soit $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{5 \times 7 \times 11}{4 \times 6 \times 10}$;

donc $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{385}{240} < 2$; n est déficient.

♦ *Supposons maintenant* $n = 3^k q^h r^l$ *où* q *et* r *sont premiers impairs, avec* $5 < q < r$.

On a $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{1}{1-1/3} \times \dfrac{1}{1-1/7} \times \dfrac{1}{1-1/11}$, soit $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{231}{120} < 2$; n est déficient.

♦ *Supposons* $n = 3 \times 5^h \times r^l$, *avec* $r > 5$.

$$\frac{\mathrm{S}(n)}{n} < \left(1+\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{1-1/5} \times \frac{1}{1-1/7} \text{, soit } \frac{\mathrm{S}(n)}{n} < \frac{4\times5\times7}{3\times4\times6} \text{ ; donc } \frac{\mathrm{S}(n)}{n} < \frac{35}{18} < 2 \text{ ;}$$

n est déficient.

A5. Impairs non déficients inférieurs à 1000

Nous savons qu'il en existe au moins un, à savoir 945. Supposons qu'il en existe un autre, n.

♦ Il ne peut avoir plus de trois diviseurs premiers distincts, car il vaudrait au moins $3 \times 5 \times 7 \times 11$, soit 1155. On a en outre vu au § A3 que n ne peut être ni une puissance d'un nombre premier, ni le produit de deux telles puissances. **Il a donc exactement trois diviseurs premiers distincts.**

♦ En outre, si on écrit n sous la forme $n = p^k q^h r^l$ où p, q et r sont trois nombres premiers impairs distincts ($p < q < r$), on a vu au § A4 que $p = 3$, $q = 5$, $k \geq 2$.

♦ On part donc de $n = 3^k 5^h r^l$, avec $k \geq 2$, $h \geq 1$, $l \geq 1$; n est donc divisible par $9 \times 5 = 45$. Si on avait $l \geq 2$, on aurait l'inégalité $n \geq 9 \times 5 \times 49$, donc $n > 1000$, ce que nous avons exclu.

♦ On a donc $n = 3^k 5^h r$. **Supposons d'abord $r \geq 11$.** On a $3^k 5^h \leq \frac{999}{11}$, donc $3^k 5^h < 91$ et, comme $3^k 5^h$ est un multiple impair de 45, $3^k 5^h = 45$. Ainsi $n = 3^2 \times 5r$.

$$\frac{\mathrm{S}(n)}{n} = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right) \leq \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right) \times \left(1+\frac{1}{11}\right)$$

donc $\frac{\mathrm{S}(n)}{n} \leq \frac{13\times6\times12}{9\times5\times11} = \frac{936}{495} < 2$.

Le nombre est donc déficient.

♦ Restent à examiner les nombres $n = 3^k \times 5^h \times 7$, avec $k \geq 2$, $h \geq 1$. Ils sont multiples de $3^2 \times 5 \times 7$, soit 315 ; les seules possibilités sont 945, bien connu de nous, et 315 lui-même.

Montrons que 315 est déficient :

$$\frac{\mathrm{S}(315)}{315} = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right) = \frac{13\times6\times8}{9\times5\times7} = \frac{624}{315} \approx 1{,}98 \cdot$$

Conclusion : 945 est le seul élément impair non déficient de]0, 1000[; c'est aussi le seul élément impair de D situé dans cet intervalle.

Références

♦ « *Des chameaux sans conflits ni confits* », Bulletin de l'APMEP n° 472. p. 648-656.

♦ Sur les fractions égyptiennes, « *Calculer comme les Égyptiens* », Bulletin de l'APMEP n° 503, p. 143-154.