C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 511-514, 1988

Théorie des nombres/*Number Theory*

Sur le nombre de facteurs premiers des entiers

Michel BALAZARD, Hubert DELANGE et Jean-Louis NICOLAS

Résumé — En désignant par $\Omega(n)$ le nombre total de facteurs dans la décomposition de n en produit de nombres premiers, nous obtenons une formule asymptotique uniforme pour le nombre des entiers $n \leqq x$ tels que $\Omega(n)=k$.

On the number of prime factors of integers

Abstract — *Denoting by $\Omega(n)$ the total number of factors in the standard factorization of n into primes, we obtain a uniform asymptotic formula for the number of integers $n \leqq x$ such that $\Omega(n)=k$.*

1. Soit $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers, comptés avec leurs multiplicités, de l'entier positif n. Si $n=p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ où les p_i sont des nombres premiers et les α_i des entiers positifs, on a :

$$\Omega(n)=\alpha_1+\ldots+\alpha_k.$$

L'étude locale de la fonction Ω consiste en la détermination du comportement de la quantité

$$\mathrm{N}(x, k)=\operatorname{card}\{n \mid n \leqq x \text{ et } \Omega(n)=k\},$$

x étant un réel $\geqq 2$ et k un entier positif. Comme $2^{\Omega(n)} \leqq n$, il suffit de considérer les entiers $k \leqq \log x / \log 2$.

On dispose principalement de deux estimations asymptotiques concernant $\mathrm{N}(x, k)$. D'une part, si ε est positif et fixé, on a :

$$\mathrm{N}(x, k)=\mathrm{F}\left(\frac{k-1}{\log \log x}\right) \frac{x}{\log x} \frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(1+O_{\varepsilon}\left(\frac{k}{(\log \log x)^2}\right)\right) \tag{1}$$

uniformément pour $x \geqq 3$ et $k \leqq(2-\varepsilon) \log \log x$ où

$$\mathrm{F}(z)=\frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\left(1-\frac{z}{p}\right)^{-1}$$

[le produit infini porte sur tous les nombres premiers; $\mathrm{F}(z)$ est holomorphe pour $|z|<2$]. Ce résultat, qui contient le théorème des nombres premiers, est dû à L. G. Sathe (*cf.* [7]) et fut redémontré de façon simple par A. Selberg (*cf.* [8]). D'autre part, si ε est positif et fixé, on a

$$\mathrm{N}(x, k)=\mathrm{C} \frac{x}{2^k} \log \frac{x}{2^k}+O_{\varepsilon}\left(\frac{x}{2^k}\left(\log 3 \frac{x}{2^k}\right)^{1-c(\varepsilon)}\right) \tag{2}$$

uniformément pour $x \geqq 3$ et $(2+\varepsilon) \log \log x \leqq k \leqq \log x / \log 2$, où

$$\mathrm{C}=-\operatorname{Res}(\mathrm{F}, 2)=\frac{1}{4} \prod_p(1+1/(p(p-2)))=0{,}378\,694\ldots$$

et $c(\varepsilon)$ est une constante positive ne dépendant que de ε : si $\varepsilon<1$, on peut prendre

$$c(\varepsilon)=2 \mathrm{Q}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{où} \quad \mathrm{Q}(\lambda)=\lambda \log \lambda-\lambda+1.$$

Ce résultat est dû à J.-L. Nicolas (*cf.* [5]).

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0249-6291/88/03060511 $ 2.00

$$N(x, k) = F\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right)\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(1+O\left(\frac{k}{A^2\log\log x}\right)\right).$$

(5) On a uniformément pour $\varepsilon\in]0, 1/2]$, $x\geqq 3$, k entier $\geqq 2$ tels que $k-1\geqq(2+\varepsilon)\log\log x$ et $k\leqq\log x/\log 2$:

$$N(x, k) = C\frac{x}{2^k}\log\frac{x}{2^k}\left(1+O\left(\varepsilon^{-1}\left(\log\log\left(3\frac{x}{2^k}\right)\right)^{-1/2}\left(\log\frac{3x}{2^k}\right)^{-2Q(1+(\varepsilon/2))}\right)\right).$$

Nous obtenons également le comportement de $N(x, k)$ dans la « zone critique » $k\sim 2\log\log x$:

(6) On a uniformément pour $x\geqq 3$ et k entier $\geqq 2$ tels que $x/2^k\geqq 3$:

$$N(x, k) = C\frac{x}{2^k}\log\frac{x}{2^k}\left(G(t)+O\left(\frac{1+|t|}{\sqrt{\log\log x}}\right)\right)$$

où $t=(k-2\log\log x)/\sqrt{2\log\log x}$.

2. La démonstration du théorème s'appuie sur la formule suivante, due à G. Halász (*cf.* [5]) :

(7) $$N(x, k) = \sum_{\substack{\psi(m)\leqq y\\ \Omega(m)\leqq k}}{}' 1$$

où l'apostrophe indique une sommation ne portant que sur les entiers impairs et $\psi(m)=m/2^{\Omega(m)}$ [on déduit facilement de (7) les valeurs de $N(x, k)$ pour $y<3$, ce qui complète le théorème].

La formule de Cauchy donne alors :

$$N(x, k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\sum_{\psi(m)\leqq y}{}' z^{\Omega(m)}\frac{z^{-k-1}}{1-z}dz \qquad \text{où} \quad R<1,$$

la circonférence $|z|=R$ étant parcourue une fois dans le sens positif.

On peut trouver, par la méthode de Selberg (*cf.* [8] et [2]), une formule asymptotique pour la somme $\sum_{\psi(m)\leqq y}{}' z^{\Omega(m)}$:

(8) Il existe une suite de fonctions $Q_k(z, X)$, polynômes de degré k en X, à coefficients fonctions holomorphes de z pour $|z|<3/2$, telle que

$$\sum_{\psi(m)\leqq y}{}' z^{\Omega(m)} = y(\log y)^{2z}\left(\sum_{l\leqq k}(\log y)^{-l-1}Q_l(z, \log\log y)+O_{R,k}\left(\frac{(\log\log y)^{k+1}}{(\log y)^{k+2}}\right)\right)$$

uniformément pour $|z|\leqq R<3/2$, $y\geqq 3$, $k\in\mathbf{N}$. On a $Q_0(z, X)=zf(2z)$.

L'utilisation de cette formule et un choix judicieux de R $(R=r/2)$ permettent alors de démontrer le théorème (la méthode utilisée, classique depuis l'article [8], est une variante simple de la méthode du col). Le lecteur intéressé trouvera les détails de la démonstration dans [1].

Signalons que l'étude locale de la fonction $\omega(n)=\sum_{p\mid n}1$ est un problème plus difficile car aucun nombre premier n'y joue de rôle particulier comme ici le nombre 2. Sa solution est l'objet d'un travail récent de A. Hildebrand et G. Tenenbaum (*cf.* [4]).

En conclusion les auteurs tiennent à remercier G. Halász et G. Tenenbaum pour leurs commentaires et suggestions concernant le sujet abordé dans cette Note.

Note reçue et acceptée le 15 février 1988.