Reprinted from *A Tribute to Paul Erdős*,
edited by A. Baker, B. Bollobás and A. Hajnal

Partitions sans petits sommants

Jacques Dixmier et Jean-Louis Nicolas*

Introduction

Soient m et n des entiers $\geqslant 0$. On note $p(n)$ le nombre de partitions de n et $r(n,m)$ le nombre de partitions de n dont toutes les parts sont $\geqslant m$. Depuis Hardy–Ramanujan, le comportement asymptotique de $p(n)$ quand $n \to \infty$ est très bien connu. D'autre part, quand $n \to \infty$, on a

$$r(n,m) = p(n)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{m-1}(m-1)!\left\{1+O\left(\frac{m^2}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

uniformément pour $1 \leqslant m \leqslant n^{1/4}$ ([3], th. 1); et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, quand $n \to \infty$, on a

$$p(n)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{m-1}(m-1)!\exp O\left(\frac{m^2}{\sqrt{n}}\right) \leqslant r(n,m)$$
$$\leqslant p(n)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{m-1}(m-1)!\left\{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

uniformément pour $1 \leqslant m \leqslant \alpha\sqrt{n}$ ([4], §2, proposition). Le but du présent mémoire est de compléter ces résultats: (1) par une évaluation de $\log r(n,m)$ pour $m = \lambda\sqrt{n}$ (λ, constante > 0); (2) par une évaluation de $r(n,m)$ pour $m \leqslant n^{\frac{1}{3}-\epsilon}$.

Conformément à l'usage, on note $p(n,m)$ le nombre de partitions de n dont toutes les parts sont $\leqslant m$. Il sera commode de poser $r(n,x) = r(n,\lceil x\rceil)$ et $p(n,x) = p(n,\lfloor x\rfloor)$ pour x réel > 0.

Les calculs de développements asymptotiques ont été effectués par les systèmes de calcul formel MAPLE et MACSYMA.

* Recherche partiellement financée par le CNRS, Greco 'Calcul formel, et P. R. C. Mathématiques-Informatique'.

1 Rappel de résultats de G. Szekeres

Dans cette partie, nous ne faisons qu'expliciter des résultats de G. Szekeres ([9], [10]), en ajoutant quelques détails utiles pour la suite.

1.1 Pour $x \geqslant 0$, posons

$$F(x) = \int_0^x \frac{x}{e^x - 1}\, dx.$$

Le fonction F est analytique et strictement croissante de 0 à $\frac{1}{6}\pi^2$. On a

$$F(x) \sim x \qquad \text{quand } x \to 0. \tag{1}$$

D'autre part,

$$F(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \int_x^\infty x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\right) dx = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \sum_{n=1}^\infty \frac{nx+1}{n^2} e^{-nx},$$

d'où

$$F(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - x e^{-x} + O(e^{-x}) \qquad \text{quand } x \to \infty. \tag{2}$$

1.2 Pour $x > 0$, posons

$$G(x) = xF(x)^{-1/2}.$$

La fonction G est analytique. On a $G(x)^{-2} = x^{-2}F(x)$, d'où

$$-2G(x)^{-3}\frac{dG}{dx} = -2x^{-3}F(x) + x^{-2}\frac{x}{e^x - 1} = -x^{-3}\left(2F(x) - \frac{x^2}{e^x - 1}\right).$$

Or

$$\frac{d}{dx}\left(2F(x) - \frac{x^2}{e^x - 1}\right) = \frac{2x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^x - 1} + \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} > 0.$$

Pour $x > 0$, on a donc

$$2F(x) - \frac{x^2}{e^x - 1} > \lim_{x \to 0}\left(2F(x) - \frac{x^2}{e^x - 1}\right) = 0,$$

de sorte que $dG/dx > 0$. On a, d'après (1),

$$G(x) \sim \sqrt{x} \qquad \text{quand } x \to 0 \tag{3}$$

et $x^{-1/2}G(x)$ est holomorphe au voisinage de 0. D'après (2),

$$G(x) = x\left\{\tfrac{1}{6}\pi^2\left(1 - \frac{6}{\pi^2} x e^{-x} + O(e^{-x})\right)\right\}^{-1/2} \qquad \text{quand } x \to \infty,$$

d'où

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}} G(x) = x + \frac{3}{\pi^2} x^2 e^{-x} + O(x e^{-x}) \qquad \text{quand } x \to \infty. \tag{4}$$

1.3 L'application $G\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ admet, d'après 1.2, une application réciproque $H\colon]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, qui est une fonction analytique de dérivée > 0, holomorphe au voisinage de 0. La relation définissant H est

$$x^{-2}H(x)^2 = \int_0^{H(x)} \frac{x}{e^x - 1}\, dx. \tag{5}$$

On peut sans difficulté pousser plus loin les dévelopement de $F(x)$ et $G(x)$ quand $x \to 0$ et $x \to \infty$. Un procédé d'inversion classique (cf. par exemple [1], p. V. 45, prop. 5) fournit alors

$$H(x) = x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{13}{144}x^6 - \tfrac{7}{192}x^8 + \tfrac{8081}{518\,400}x^{10} + O(x^{12}) \quad \text{quand } x \to 0 \tag{6}$$

et, quand $x \to \infty$,

$$\begin{aligned} H(x) = {} & \frac{\pi}{\sqrt{6}}x - \left(\tfrac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{6}}{2\pi}x\right)\exp\left\{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}x\right\} \\ & - \left\{\tfrac{1}{4}x^4 + \frac{3\sqrt{6}}{8\pi}x^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2\pi^2}\right)x^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{8\pi} + \frac{3\sqrt{6}}{4\pi^3}\right)x\right\}\exp\left\{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}x\right\} \\ & + O\left(x^6 \exp\left(-\frac{3\pi}{\sqrt{6}}x\right)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

De (5), on déduit

$$2x^{-1}H(x)[x^{-1}H(x)]' = \frac{H(x)H'(x)}{e^{H(x)} - 1},$$

d'où

$$[x^{-1}H(x)]' = \frac{xH'(x)}{2(e^{H(x)} - 1)} \tag{8}$$

et une équation différentielle vérifiée par H:

$$2xH' - 2H = \frac{x^3 H'}{e^H - 1}. \tag{9}$$

1.4 Pour $\lambda > 0$, posons

$$f(\lambda) = 2\frac{H(\lambda)}{\lambda} - \lambda \log(1 - e^{-H(\lambda)}). \tag{10}$$

La fontion f est analytique. On a, d'après (8),

$$f'(\lambda) = \frac{\lambda H'(\lambda)}{e^{H(\lambda)}-1} - \log(1-e^{-H(\lambda)}) - \lambda\frac{H'(\lambda)e^{-H(\lambda)}}{1-e^{-H(\lambda)}},$$

ou

$$f'(\lambda) = -\log(1-e^{-H(\lambda)}) > 0. \tag{11}$$

Les relations (10) et (11) entraînent

$$\lambda f'(\lambda) = f(\lambda) - \frac{2H(\lambda)}{\lambda},$$

d'où

$$2H(\lambda) = \lambda f(\lambda) - \lambda^2 f'(\lambda), \tag{12}$$

$$2H'(\lambda) = f(\lambda) - \lambda f'(\lambda) - \lambda^2 f''(\lambda). \tag{13}$$

En portant dans (9), on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par f:

$$\lambda^2 f'' + \lambda f' - f = 2f''[\exp(\tfrac{1}{2}\lambda f - \tfrac{1}{2}\lambda^2 f'') - 1]. \tag{14}$$

Par ailleurs, (11) entraîne

$$f''(\lambda) = -\frac{H'(\lambda)}{e^{H(\lambda)}-1} < 0. \tag{15}$$

Du développement (6), on déduit, quand $\lambda \to 0$,

$$f(\lambda) = -2\lambda\log\lambda + 2\lambda + \tfrac{1}{4}\lambda^3 - \tfrac{13}{288}\lambda^5 + \tfrac{5}{576}\lambda^7 - \tfrac{8081}{2073\,600}\lambda^9 + O(\lambda^{11}), \tag{16}$$

la fonction $f(\lambda) + 2\lambda\log\lambda$ étant holomorphe au voisinage de 0.

La ressemblance avec les coefficients de (6) vient de (12), qui peut s'écrire

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{f(\lambda)}{\lambda}\right) = -\frac{2H(\lambda)}{\lambda^3}.$$

D'après (7),

$$f(\lambda) = \pi\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \frac{\sqrt{6}}{\pi}\exp\left\{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}\lambda\right\} - \left(\frac{\sqrt{6}}{4\pi}\lambda^2 + \frac{3}{\pi^2}\lambda + \frac{\sqrt{6}}{4\pi} + \frac{3\sqrt{6}}{2\pi^3}\right)\exp\left\{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\lambda\right\}$$
$$+ O\left(\lambda^4\exp\left\{-\frac{3\pi}{\sqrt{6}}\lambda\right\}\right) \quad \text{quand } \lambda \to \infty. \tag{17}$$

1.5 Théoreme (G. Szekeres) *Soit $\lambda > 0$. On a, quand $n \to \infty$,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\log p(n, \lambda\sqrt{n}) \to f(\lambda)$$

uniformément, pourvu que λ reste minoré par une constante positive aussi petite qu'on veut.

En fait, cela est un cas très particulier des résultats de [9] et [10].

2 Etude de $\log r(n,m)$ pour $m = \lambda\sqrt{n}$.

2.1 Soit $x \in]0,1[$. La fonction $x \mapsto x/\sqrt{1-x}$ est strictement croissante de 0 à $+\infty$. Posons, pour $\lambda > 0$ et $0 < x < 1$,

$$J(x,\lambda) = H\left(\frac{x}{\lambda\sqrt{1-x}}\right)$$

$$K(x,\lambda) = 2\lambda\frac{1-x}{x}J(x,\lambda) - \frac{x}{\lambda}\log(1-e^{-J(x,\lambda)}).$$

Les fonctions J et K sont analytiques. Pour λ fixé, J est strictement croissante de 0 à ∞. D'après (6) et (7),

$$J(x,\lambda) \sim \begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda^2} & (x \to 0,\ \lambda \text{ fixé}), \\[2ex] \dfrac{\pi}{\lambda\sqrt{6}\sqrt{1-x}} & (x \to 1,\ \lambda \text{ fixé}), \end{cases}$$

d'où

$$K(x,\lambda) \sim \begin{cases} -2\dfrac{x\log x}{\lambda} & (x \to 0,\ \lambda \text{ fixé}), \\[2ex] \pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{1-x} & (x \to 1,\ \lambda \text{ fixé}). \end{cases}$$

On déduit de là que, pour λ fixé, $\partial K/\partial x$ prends dans $]0,1[$ des valeurs > 0 et des valeurs < 0.

2.2 Lemme *On a* $\dfrac{\partial}{\partial x}\{x^{-1}J(x,\lambda)\} > 0$ *pour* $\lambda > 0$ *et* $0 < x < 1$.

D'après (5), on a

$$\lambda^2\frac{1-x}{x^2}J(x,\lambda)^2 = \int_0^{J(x,\lambda)} \frac{x}{e^x-1}\,dx.$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$2\lambda^2\frac{1-x}{x^2}J\frac{\partial J}{\partial x} + \lambda^2\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right)J^2 = \frac{J}{e^J-1}\frac{\partial J}{\partial x},$$

d'où

$$\frac{\partial J}{\partial x}\left(2\lambda^2\frac{1-x}{x^2} - \frac{1}{e^J-1}\right) = \lambda^2 J\frac{2-x}{x^3} \tag{18}$$

$$x\{2\lambda^2(1-x)(e^J-1)-x^2\}\frac{\partial J}{\partial x} = \lambda^2(2-x)J(e^J-1). \tag{19}$$

Il résulte de (19) que

$$2\lambda^2(1-x)(e^J-1)-x^2 > 0 \tag{20}$$

et

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial J}{\partial x}-J\right)&\{2\lambda^2(1-x)(e^J-1)-x^2\}\\ &= \lambda^2(2-x)J(e^J-1)-2\lambda^2(1-x)J(e^J-1)+x^2J\\ &= \lambda^2xJ(e^J-1)+x^2J > 0,\end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (20), $x\,\partial J/\partial x - J > 0$, ce qui prouve le lemme. □

2.3 Lemme (a) *Pour λ fixé et x parcourant* $]0,1[$, *la fonction $K(x,\lambda)$ a un maximum $M(\lambda)$ et un seul.*

(b) *$M(\lambda)$ est l'unique nombre $x \in$* $]0,1[$ *tel que*

$$\exp\{-J(x,\lambda)\}+\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{x}J(x,\lambda)\right\} = 1.$$

(c) *On a*

$$K(M(\lambda),\lambda) = \lambda\frac{2-M(\lambda)}{M(\lambda)}J(M(\lambda),\lambda).$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial x} &= 2\lambda\frac{1-x}{x}\frac{\partial J}{\partial x}-2\frac{\lambda}{x^2}J-\frac{1}{\lambda}(1-e^{-J})-\frac{x}{\lambda}\frac{e^{-J}}{1-e^{-J}}\frac{\partial J}{\partial x}\\ &= \left(2\lambda\frac{1-x}{x}-\frac{x}{\lambda(e^J-1)}\right)\frac{\partial J}{\partial x}-2\frac{\lambda}{x^2}J-\frac{1}{\lambda}\log(1-e^{-J})\\ &= \lambda J\frac{2-x}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^2}J-\frac{1}{\lambda}\log(1-e^{-J}) \qquad \text{d'après(18)}\\ &= -\frac{\lambda}{x}J-\frac{1}{\lambda}\log(1-e^{-J}).\end{aligned}$$

Les zéros éventuels de $\partial K/\partial x$ sont donc fournis par l'équation

$$-\frac{\lambda^2}{x}J = \log(1-e^{-J}) \tag{21}$$

ou

$$\exp\left(-\frac{\lambda^2}{x}J\right)+\exp(-J) = 1. \tag{22}$$

Compte tenu du lemme 2.2, la fonction

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{\lambda^2}{x}J\right)+\exp(-J)$$

a une dérivée < 0, donc l'égalité (22) ne peut être vérifiée en plus d'un point de $]0,1[$. Compte tenu des remarques du §2.1, on voit que $\partial K/\partial x$ a exactement une racine $M(\lambda)$ et que $x \mapsto K(x,\lambda)$ est maximum pour $x = M(\lambda)$. On a ainsi prouvé (a) et (b). Compte tenu de (21), on a

$$\begin{aligned}K(M(\lambda),\lambda) &= 2\lambda\frac{1-M(\lambda)}{M(\lambda)}J(M(\lambda),\lambda)+\frac{M(\lambda)}{\lambda}\frac{\lambda^2}{M(\lambda)}J(M(\lambda),\lambda)\\ &= \frac{\lambda}{M(\lambda)}\{2-2M(\lambda)+M(\lambda)\}J(M(\lambda),\lambda),\end{aligned}$$

d'où (c). □

2.4 Posons, pour $\lambda > 0$,

$$g(\lambda) = K(M(\lambda),\lambda) = \lambda\frac{2-M(\lambda)}{M(\lambda)}J(M(\lambda),\lambda). \tag{23}$$

Théorème *Soit $\lambda > 0$. On a*

$$\log r(n,\lambda\sqrt{n}) \sim g(\lambda)\sqrt{n} \qquad \textit{quand } n \to \infty.$$

(a) Soit $m_n = \lceil\lambda\sqrt{n}\rceil$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions de n dont toutes les parts sont $\geqslant \lambda\sqrt{n}$, ou, ce qui revient au même, $\geqslant m_n$. On a $r(n,\lambda\sqrt{n}) = r(n,m_n) = \operatorname{Card}\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{P}_i$ l'ensemble des $\pi \in \mathcal{P}$ ayant exactement i parts. Si $i > \sqrt{n}/\lambda$, on a $\mathcal{P} = \varnothing$; on prendra donc $i \leqslant \sqrt{n}/\lambda$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est réunion disjointe des $\mathcal{P}_i$, donc

$$\operatorname{Card}\mathcal{P} = \sum_{i\geqslant 1}\operatorname{Card}\mathcal{P}_i.$$

Si $\pi \in \mathcal{P}_i$, on a $\pi = (m_n+a_1, m_n+a_2,\dots,m_n+a_i)$ où $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_i \geqslant 0$ et $a_1+a_2+\cdots a_i = n-im_n$. Donc

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}_i = p(n-im_n, i). \tag{24}$$

(b) Posons $i\lambda/\sqrt{n} = \rho \in\,]0,1]$. Choisissons une petite constante $\omega \in\,]0,\frac{1}{2}]$ (nous préciserons ce choix ultérieurement) et considérons seulement dans la partie (b) les i tels que $\omega \leqslant \rho \leqslant 1-\omega$.

Alors,

$$n-im_n \geqslant n-\sqrt{n}(1-\omega)\frac{m_n}{\lambda} \to \infty \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

D'autre part,

$$\frac{i}{\sqrt{n-im_n}} = \frac{\rho\sqrt{n}}{\lambda\sqrt{n-\rho\sqrt{n}m_n/\lambda}} \to \frac{\rho}{\lambda\sqrt{1-\rho}} \geqslant \frac{\omega}{\lambda\sqrt{1-\omega}},$$

donc

$$\frac{i}{\sqrt{n-im_n}} \geqslant \frac{\omega}{2\lambda\sqrt{1-\omega}} \qquad \text{pour } n \gg 1.$$

D'après 1.5, on a, uniformément en i,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\log p(n-im_n, i)$$

$$= \sqrt{1-\frac{im_n}{n}}\,\frac{i}{\sqrt{n-im_n}}\log p(n-im_n,i)$$

$$\to \sqrt{1-\rho}\left(\frac{2H\left(\frac{\rho}{\lambda\sqrt{1-\rho}}\right)}{\frac{\rho}{\lambda\sqrt{1-\rho}}} - \frac{\rho}{\lambda\sqrt{1-\rho}}\log\left[1-\exp\left\{-H\left(\frac{\rho}{\lambda\sqrt{1-\rho}}\right)\right\}\right]\right)$$

$$= 2\lambda\frac{1-\rho}{\rho}J(\rho,\lambda) - \frac{\rho}{\lambda}\log(1-\exp\{-J(\rho,\lambda)\}) = K(\rho,\lambda).$$

Soit $\epsilon > 0$. Compte tenu de (24), on a donc, pour $n \geqslant N_1(\epsilon)$,

$$|\log \operatorname{Card}\mathscr{P}_i - \sqrt{n}K(\rho,\lambda)| \leqslant \epsilon\sqrt{n}$$

et par suite, pour $n \geqslant N_2(\epsilon)$,

$$\operatorname{Card}\mathscr{P}_i = \exp\{[K(\rho,\lambda)+\epsilon_1]\sqrt{n}\} \tag{25}$$

avec $|\epsilon_1| \leqslant \epsilon$; et ceci, pour tous les i considérés. Par suite,

$$\sum_i \operatorname{Card}\mathscr{P}_i \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda}\exp\{[g(\lambda)+\epsilon]\sqrt{n}\}.$$

On a

$$\frac{(i+1)\lambda}{\sqrt{n}} - \frac{i\lambda}{\sqrt{n}} = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Imposons à ω d'être tel que $\omega < M(\lambda) < 1-\omega$. Alors, pour $n \geqslant N_3(\epsilon)$, il existe i tel que $|\rho - M(\lambda)| \leqslant \epsilon$. Donc, pour $n \geqslant N_4(\epsilon)$, il existe i tel que $K(\rho,\lambda) \geqslant g(\lambda)-\epsilon$. Compte tenu de (25), on a, pour un tel i, et pourvu que $n \geqslant N_5(\epsilon)$,

$$\operatorname{Card}\mathscr{P}_i \geqslant \exp\{[g(\lambda)-\epsilon]\sqrt{n}\}.$$

Donc

$$\exp\{[g(\lambda)-\epsilon]\sqrt{n}\} \leqslant \sum_i \operatorname{Card}\mathscr{P}_i \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda}\exp\{[g(\lambda)+\epsilon]\sqrt{n}\}.$$

(c) Envisageons dans (c) les i tels que $\rho < \omega$, c'est-à-dire $i < \omega\sqrt{n}/\lambda$. Imposons à ω d'être tel que $f(\omega/\lambda) < \frac{1}{2}g(\lambda)$. Alors, pour $n \geqslant N_6(\epsilon)$,

$$\sum_i \operatorname{Card}\mathscr{P}_i < \exp\{\tfrac{1}{2}g(\lambda)\sqrt{n}\}.$$

(d) Envisageons dans (d) les i tel que $\rho > 1-\omega$, c'est-à-dire $i > (1-\omega)\sqrt{n}/\lambda$. Alors

$$n - im_n \leqslant \frac{1-\omega}{\lambda}\sqrt{n}m_n \leqslant n-(1-\omega)n = \omega n.$$

Donc, pour $n \geqslant N_7(\epsilon)$,

$$\sum_i \operatorname{Card}\mathscr{P}_i \leqslant \sum_{j=1}^{\lfloor \omega n\rfloor} p(j) \leqslant \exp\omega'\sqrt{n},$$

où ω' peut être rendu aussi petit qu'on veut en choisant ω assez petit; en particulier, on peut faire en sorte que $\omega' \leqslant \frac{1}{2}g(\lambda)$.

(e) Finalement

$$\exp\{[g(\lambda)-\epsilon]\sqrt{n}\} < \operatorname{Card}\mathscr{P} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda}\exp\{[g(\lambda)+\epsilon]\sqrt{n}\} + 2\exp\{\tfrac{1}{2}g(\lambda)\sqrt{n}\}.$$

Donc, pour $n \geqslant N_8(\epsilon)$,

$$[g(\lambda)-\epsilon]\sqrt{n} < \log\operatorname{Card}\mathscr{P} \leqslant [g(\lambda)+\epsilon]\sqrt{n},$$

d'où le théorème. □

2.5 Théorème (a) *La fonction $\lambda \mapsto g(\lambda)$ est analytique pour $\lambda > 0$.*

(b) *Posant $J(M(\lambda),\lambda) = J_\lambda$, on a*

$$g'(\lambda) = -J_\lambda < 0, \qquad g''(\lambda) = \frac{2\lambda J_\lambda(e^{J_\lambda}-1)}{M(\lambda)\{2+\lambda^2(e^{J_\lambda}-1)\}} > 0.$$

(c) *On a*

$$\lambda^2 g''(\lambda) + \lambda g'(\lambda) - g(\lambda) = \frac{2g''(\lambda)}{1-e^{-g'(\lambda)}}.$$

Rappelons que $M(\lambda)$ s'obtient en résolvant l'équation en x

$$\exp\{-J(x,\lambda)\} + \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{x}J(x,\lambda)\right\} = 1$$

et que la dérivée par rapport à x du 1er membre est < 0 (cf. notamment le lemme 2.2). Donc $M(\lambda)$ est fonction analytique de λ. Compte tenu de (23), g est analytique.

On a, d'après (23),

$$g(\lambda) = -\lambda J_\lambda + 2\lambda \frac{J_\lambda}{M(\lambda)},$$

d'où

$$g'(\lambda) = -J_\lambda - \lambda J'_\lambda + 2\frac{J_\lambda}{M(\lambda)} + 2\lambda\left(\frac{J_\lambda}{M(\lambda)}\right)'. \tag{26}$$

D'après le lemme 2.3,

$$\exp\{-J_\lambda\} + \exp\left\{-\lambda^2 \frac{J_\lambda}{M(\lambda)}\right\} = 1, \tag{27}$$

d'où, en dérivant,

$$-\exp\{-J_\lambda\}J'_\lambda + \exp\left\{-\lambda^2\frac{J_\lambda}{M(\lambda)}\right\}\left\{-2\lambda\frac{J_\lambda}{M(\lambda)} - \lambda^2\left(\frac{J_\lambda}{M(\lambda)}\right)'\right\} = 0$$

ou, compte tenu de (27),

$$\exp\{-J_\lambda\}J'_\lambda + (1-\exp\{-J_\lambda\})\left\{2\lambda\frac{J_\lambda}{M(\lambda)} + \lambda^2\left(\frac{J_\lambda}{M(\lambda)}\right)'\right\} = 0$$

ou, encore,

$$\lambda^2\left(\frac{J_\lambda}{M(\lambda)}\right)' = -2\lambda\frac{J_\lambda}{M(\lambda)} - \frac{J'_\lambda}{e^{J_\lambda}-1}. \tag{28}$$

Reportons dans (26). On obtient

$$g'(\lambda) = -J_\lambda - \lambda J'_\lambda + 2\frac{J_\lambda}{M(\lambda)} - 4\frac{J_\lambda}{M(\lambda)} - \frac{2J'_\lambda}{\lambda(e^{J_\lambda}-1)},$$

ou

$$g'(\lambda) = -J_\lambda + 2\frac{J_\lambda}{M(\lambda)} + \frac{\lambda^2 - 2 - \lambda^2 e^{J_\lambda}}{\lambda(e^{J_\lambda}-1)} J'_\lambda. \tag{29}$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\lambda\sqrt{1-x}}\right) = \frac{2-x}{2\lambda}(1-x)^{-3/2}, \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{x}{\lambda\sqrt{1-x}}\right) = -\frac{x}{\lambda^2}(1-x)^{-1/2},$$

donc

$$\left(2x(1-x)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda(2-x)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{x}{\lambda\sqrt{1-x}} = 0,$$

donc, compte tenu de la définition de $J(x,\lambda)$,

$$\left(2x(1-x)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda(2-x)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)J(x,\lambda) = 0.$$

Alors, d'après (19),

$$\begin{aligned}\{2\lambda^2(1-x)(e^J-1)-x^2\}\frac{\partial J}{\partial\lambda} &= -\frac{2x(1-x)}{\lambda(2-x)}\{2\lambda^2(1-x)(e^J-1)-x^2\}\frac{\partial J}{\partial x}\\ &= -2\lambda(1-x)J(e^J-1).\end{aligned} \tag{30}$$

Or

$$J'_\lambda = \frac{\partial J}{\partial x}M'(\lambda) + \frac{\partial J}{\partial\lambda}.$$

Compte tenu de (19) et (30):

$$\begin{aligned}&M(\lambda)[2\lambda^2\{1-M(\lambda)\}(e^{J_\lambda}-1) - M(\lambda)^2]J'_\lambda\\ &\quad = \lambda^2\{2-M(\lambda)\}J_\lambda(e^{J_\lambda}-1)M'(\lambda) - 2\lambda\{1-M(\lambda)\}M(\lambda)J_\lambda(e^{J_\lambda}-1).\end{aligned} \tag{31}$$

L'équation (28) s'écrit

$$\lambda^2\{J'_\lambda M(\lambda) - J_\lambda M(\lambda)'\}(e^{J_\lambda}-1) + 2\lambda M(\lambda)J_\lambda(e^{J_\lambda}-1) + M(\lambda)^2 J'_\lambda = 0,$$

ou

$$\lambda^2 J_\lambda(e^{J_\lambda}-1)M(\lambda)^{-1}M(\lambda)' = \{\lambda^2(e^{J_\lambda}-1) + M(\lambda)\}J'_\lambda + 2\lambda J_\lambda(e^{J_\lambda}-1).$$

Reportant dans (31) on obtient:

$$\begin{aligned}&[2\lambda^2\{1-M(\lambda)\}(e^{J_\lambda}-1) - M(\lambda)^2]J'_\lambda\\ &\quad = \{2-M(\lambda)\}\{\lambda^2(e^{J_\lambda}-1)+M(\lambda)\}J'_\lambda\\ &\qquad + \{2-M(\lambda)\}2\lambda J_\lambda(e^{J_\lambda}-1)\\ &\qquad - 2\lambda\{1-M(\lambda)\}M(\lambda)J_\lambda(e^{J_\lambda}-1),\end{aligned}$$

soit, après calculs,

$$M(\lambda)(\lambda^2 - 2 - \lambda^2 e^{J_\lambda})J'_\lambda = 2\lambda J_\lambda(e^{J_\lambda}-1).$$

Reportant dans (29):

$$g'(\lambda) = -J_\lambda - 2\frac{J_\lambda}{M(\lambda)} + \frac{2J_\lambda}{M(\lambda)} = -J_\lambda,$$

d'où

$$g''(\lambda) = -J'_\lambda = \frac{2\lambda J_\lambda(e^{J_\lambda}-1)}{M(\lambda)\{2+\lambda^2(e^{J_\lambda}-1)\}}.$$

D'après (23) et (b), on a

$$\frac{2\lambda J_\lambda}{M(\lambda)} = g(\lambda) + \lambda J_\lambda = g(\lambda) - \lambda g'(\lambda),$$

d'où, en portant dans l'expression de g'' donnée par (b),

$$g''(\lambda) = \{g(\lambda)-\lambda g'(\lambda)\}\frac{e^{-g'(\lambda)}-1}{2+\lambda^2(e^{-g'(\lambda)}-1)},$$

d'où facilement (c). □

2.6 Théorème

$$g(\lambda) \sim 2\frac{\log\lambda}{\lambda} \qquad \textit{quand } \lambda \to \infty.$$

Soit $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}]$. D'après (6), quand $\lambda \to \infty$, on a

$$J(x,\lambda) = H\left(\frac{x}{\lambda\sqrt{1-x}}\right) \to 0 \qquad \text{uniformément dans }]0, 1-\epsilon]. \tag{32}$$

D'autre part, pour $0 < x \leqslant 1-\epsilon$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2}{x}J(x,\lambda) &= \frac{\lambda^2}{x}H\left(\frac{x}{\lambda\sqrt{1-x}}\right) \leqslant \frac{\lambda^2}{x^2}2H\left(\frac{x}{\lambda\sqrt{\epsilon}}\right)\\ &\leqslant \frac{\lambda^2}{x^2}2\frac{x^2}{\lambda^2\epsilon} \qquad \text{pour } \lambda \geqslant \Lambda_1(\epsilon), \text{ d'après (6)}\\ &= \frac{2}{\epsilon}.\end{aligned}$$

Alors, pour $0 < x \leqslant 1-\epsilon$ et $\lambda \geqslant \Lambda_1(\epsilon)$,

$$\exp\{-J(x,\lambda)\}+\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{x}J(x,\lambda)\right\} \geqslant \exp\{-J(x,\lambda)\}+\exp\left\{-\frac{2}{\epsilon}\right\},$$

d'où, d'après (32),

$$\exp\{-J(x,\lambda)\}+\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{x}J(x,\lambda)\right\} > 1 \qquad \text{pour } \lambda \geqslant \Lambda_2(\epsilon).$$

Il résulte de là et du lemme 2.3 que

$$M(\lambda) > 1-\epsilon \qquad \text{pour } \lambda \geqslant \Lambda_2(\epsilon). \tag{33}$$

Ainsi

$$M(\lambda) \to 1. \tag{34}$$

Dans toute la fin de la preuve, on posera

$$\frac{M(\lambda)}{\lambda\sqrt{1-M(\lambda)}} = M_\lambda.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2}{M(\lambda)}J_\lambda &\geqslant \frac{\lambda^2}{1-\epsilon}J(1-\epsilon,\lambda) \qquad \text{pour } \lambda \geqslant \Lambda_2(\epsilon) \text{ ((33) et lemme 2.2)}\\ &= \frac{\lambda^2}{1-\epsilon}H\left(\frac{1-\epsilon}{\lambda\sqrt{\epsilon}}\right)\\ &\geqslant \frac{\lambda^2}{1-\epsilon}\frac{1}{2}\frac{(1-\epsilon)^2}{\lambda^2\epsilon} \qquad \text{pour } \lambda \geqslant \Lambda_3(\epsilon) \text{ (d'après (6))}\\ &= \frac{1-\epsilon}{2\epsilon} \geqslant \frac{1}{4\epsilon}.\end{aligned}$$

Donc, pour $\lambda \geqslant \Lambda_4(\epsilon)$, on a, compte tenu du lemme 2.3,

$$\exp(-J_\lambda) = 1-\exp\left(-\frac{\lambda^2}{M(\lambda)}J_\lambda\right) \geqslant 1-\exp\left(-\frac{1}{4\epsilon}\right).$$

Comme

$$1-\exp\left(-\frac{1}{4\epsilon}\right) \to 1 \qquad \text{quand } \epsilon \to 0,$$

on voit que

$$J_\lambda \to 0, \tag{35}$$

donc $M_\lambda \to 0$ et alors, d'après (6),

$$J_\lambda = H(M_\lambda) \sim M_\lambda^2 = \frac{M(\lambda)^2}{\lambda^2\{1-M(\lambda)\}}. \tag{36}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-M(\lambda)} &\sim \frac{\lambda^2}{M(\lambda)}J_\lambda && \text{d'après (34) et (36)}\\ &= -\log(1-e^{-J_\lambda}) && \text{(lemme 2.3)}\\ &\sim -\log J_\lambda && \text{d'après (35)}\\ &\sim 2\log\lambda+\log\{1-M(\lambda)\} && \text{d'après (34) et (36),}\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{1-M(\lambda)} \sim 2\log\lambda. \tag{37}$$

Enfin

$$\begin{aligned}g(\lambda) &\sim \lambda J_\lambda && \text{d'après (23) et (34)}\\ &\sim \frac{1}{\lambda\{1-M(\lambda)\}} && \text{d'après (34) et (36)}\\ &\sim 2\frac{\log\lambda}{\lambda} && \text{d'après (37).}\end{aligned}$$

2.7 Le théorème 2.6 peut être précisé. Il résulte de (37) que:

$$M(\lambda) = 1-\frac{1+o(1)}{2\log\lambda}.$$

Par ailleurs, l'équation du lemme (2.3) (b) s'écrit:

$$\log(1-\exp\{-J(x,\lambda)\}) = -\frac{\lambda^2}{x}J(x,\lambda).$$

D'après (35), $J_\lambda = J(M(\lambda),\lambda) \to 0$, et d'après (6) et (36),

$$J_\lambda = M_\lambda^2+O(M_\lambda^4) = M_\lambda^2[1+O(\lambda^{-2}\log\lambda)].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\log(1-\exp\{-J_\lambda\}) &= \log J_\lambda + O(J_\lambda)\\ &= 2\log M(\lambda)-2\log\lambda-\log(1-M(\lambda))\\ &\qquad +O(\lambda^{-2}\log\lambda).\end{aligned}$$

$M(\lambda)$ vérifie donc l'équation

$$\begin{aligned}&2\log M(\lambda)-2\log\lambda-\log(1-M(\lambda))+O(\lambda^{-2}\log\lambda)\\ &\qquad = -\frac{M(\lambda)}{1-M(\lambda)}+O(\lambda^{-2}\log^2\lambda),\end{aligned}$$

ou encore,

$$M(\lambda) = 1+\frac{M(\lambda)}{-2\log\lambda-\log(1-M(\lambda))+2\log M(\lambda)+O(\lambda^{-2}\log^2\lambda)}.$$

Si l'on reporte

$$M(\lambda) = 1-\frac{1+o(1)}{2\log\lambda}$$

dans le membre de droite de la relation ci-dessus, on obtient

$$M(\lambda) = 1-\frac{1}{2\log\lambda}+\frac{1-\log(2\log\lambda)}{(2\log\lambda)^2}\{1+o(1)\},$$

et l'on peut continuer par la méthode d'itération mentionnée en 1.3. On obtient, en posant $u = 2\log\lambda$ et $L = \log u$,

$$M(\lambda) = 1-\frac{1}{u}+\frac{1-L}{u^2}+\frac{3L-L^2}{u^3}+\frac{-2L^3+11L^2-6L-5}{2u^4}+O\left(\frac{L^4}{u^5}\right).$$

De (23), on déduit:

$$\begin{aligned}\lambda g(\lambda) &= \frac{2-M(\lambda)}{1-M(\lambda)}M(\lambda)+O(\lambda^{-2}\log^2\lambda)\\ &= u+1-L+\frac{L}{u}+\frac{L^2-2L-1}{2u^2}+\frac{2L^3-9L^2+5}{6u^3}+O\left(\frac{L^4}{u^4}\right).\end{aligned}$$

2.8 Lemme *Pour $n \geqslant 2$, on a:*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(n-k)^2} \leqslant \frac{41}{9n^2}.$$

Pour $n \geqslant 4$, on a:

$$\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k(n-k)^2} = \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k^2(n-k)} \leqslant \frac{0.87231}{n}.$$

La décomposition en éléments simples donne:

$$\frac{1}{k^2(n-k)^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(n-k)^2}+\frac{2/n}{k}+\frac{2/n}{n-k}\right)$$

et comme

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leqslant \gamma+\log n \leqslant 0.578+\log n,$$

on obtient:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(n-k)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\tfrac{1}{3}\pi^2+\frac{4}{n}(0.578+\log n)\right) \leqslant \frac{41}{9n^2}$$

pour $n \geqslant 9$. On achève ensuite pour $2 \leqslant n \leqslant 8$ par un calcul numérique. Il y a égalité pour $n = 4$.

Similairement,

$$\frac{1}{k^2(n-k)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1/n}{k}+\frac{1/n}{n-k}\right)$$

et

$$\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k^2(n-k)} \leqslant \frac{1}{n}\left(\tfrac{1}{6}\pi^2-1+\frac{2}{n}\{\gamma+\log(n-1)-1\}\right).$$

Le crochet ci-dessus est $\leqslant 0.872$ pour $n \geqslant 25$. On calcule ensuite

$$n\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k^2(n-k)}$$

pour $4 \leqslant n \leqslant 24$. Le maximum est obtenu pour $n = 11$. □

2.9 Lemme *Soient deux séries entières à coefficients complexes*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m z^m \qquad \textit{et} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} v_m z^m;$$

on pose

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m z^m = \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m z^m\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m z^m\right).$$

Soit $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe 3 constantes $U, V, \beta \geqslant 0$ telles que

$$|u_m| \leqslant \frac{U\beta^m}{m^2}, \qquad |v_m| \leqslant \frac{V\beta^m}{m^2}$$

pour $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Alors on a, pour $2 \leqslant m \leqslant n$,

$$|w_m| \leqslant \frac{41}{9}\,\frac{UV\beta^m}{m^2}.$$

On a

$$w_m = \sum_{k=1}^{m-1} u_k v_{m-k}$$

et

$$|w_m| \leqslant UV\beta^m \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2(m-k)^2}.$$

On conclut en appliquant le lemme 2.8. □

2.10 Lemme *Soit $\sum_{m=1}^{\infty} u_m z^m$ une série entière à coefficients complexes. On définit la fonction φ par*

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^z - 1 - z$$

et l'on définit les coefficients t_m par

$$\varphi\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m z^m\right) = \sum_{m=2}^{\infty} t_m z^m.$$

Soit $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe deux constantes $U, \beta \geqslant 0$ telles que

$$|u_m| \leqslant \frac{U\beta^m}{m^2}$$

pour $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Alors on a, pour $2 \leqslant m \leqslant n$,

$$|t_m| \leqslant \frac{T\beta^m}{m^2},$$

où

$$T = \tfrac{9}{41}\varphi(\tfrac{41}{9}U).$$

On pose d'abord pour $k \geqslant 2$,

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m z^m\right)^k = \sum_{m=k}^{\infty} u_{m,k} z^m.$$

D'après le lemme 2.9, on a

$$|u_{m,2}| \leqslant \tfrac{41}{9} U^2\beta^m m^{-2}$$

pour $2 \leqslant m \leqslant n$ et, par récurrence sur k,

$$|u_{m,k}| \leqslant (\tfrac{41}{9})^{k-1} U^k \beta^m m^{-2}$$

pour $k \leqslant m \leqslant n$. On a ensuite

$$t_m = \sum_{k=2}^{m} \frac{u_{m,k}}{k!}$$

et

$$|t_m| \leqslant \frac{9}{41}\frac{\beta^m}{m^2} \sum_{k=2}^{m} \frac{(\frac{41}{9}U)^k}{k!} = \tfrac{9}{41}\varphi(\tfrac{41}{9}U)\beta^m m^{-2}.$$

2.11 Lemme *Soient a_0 un nombre réel positif, a_1 un nombre réel et $a_2 = -\frac{1}{8}a_0 - \frac{1}{2}a_0^{-1}$. On définit la suite (a_n) par récurrence. Soit $n \geqslant 2$, on suppose connus $a_0, a_1, \ldots, a_n$. On définit $b_1 = 0$, $b_2, \ldots, b_n$ par*

$$-\varphi\left(-\sum_{i=1}^{\infty} (i+1) a_{i+1} z^i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} b_i z^i,$$

où $\varphi(t) = \mathrm{e}^t - 1 - t$. (On observe que $b_2, \ldots, b_n$ ne dépendent que de $a_2, \ldots, a_n$.) On définit ensuite a_{n+1} par

$$\begin{aligned}2(n+1)^2 a_{n+1} = {} & -2b_n + \frac{4}{a_0}(na_n + b_{n-1}) \\ & + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{a_0}(k^2-1)a_k\{(n-k+1)a_{n-k+1} + b_{n-k}\} \\ & + \{(n-1)^2-1\}a_{n-1}\left(1 + \frac{4a_2}{a_0}\right) - \frac{2}{a_0}(n^2-1)a_n.\end{aligned}$$

(Par convention la somme en k est vide pour $n \leqslant 3$.) Alors il existe $A, \alpha \geqslant 0$ dépendant de a_0 tels que, pour tout $n \geqslant 2$, on ait

$$|a_n| \leqslant A\alpha^n n^{-3}.$$

On fixe d'abord $A = 1/4\alpha$ et l'on choisit α assez grand pour que $|a_2| \leqslant \frac{1}{8}A\alpha^2$. On raisonne ensuite par récurrence: on fixe $n \geqslant 2$, on suppose que

$$|a_m| \leqslant A\alpha^m m^{-3}$$

pour $2 \leqslant m \leqslant n$. On applique le lemme 2.10 avec $u_m = -(m+1)a_{m+1}$.

On a, pour $1 \leqslant m \leqslant n-1$,

$$|u_m| \leqslant \frac{A\alpha^{m+1}}{(m+1)^2} \leqslant A\alpha \frac{\alpha^m}{m^2} = \frac{\alpha^m}{4m^2}.$$

On en déduit que

$$|b_m| \leqslant \frac{B\alpha^m}{m^2}$$

pour $2 \leqslant m \leqslant n$, avec $B = \frac{9}{41}\varphi(\frac{41}{36}) \leqslant 0.22$. Il vient ensuite

$$\begin{aligned} &\left|\frac{2}{a_0}\sum_{k=2}^{n-2}(k^2-1)a_k\{(n-k+1)a_{n-k+1}+b_{n-k}\}\right| \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{a_0}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{A\alpha^k}{k}\left(\frac{A\alpha^{n-k+1}}{(n-k+1)^2}+\frac{B\alpha^{n-k}}{(n-k)^2}\right) \\ &\qquad \leqslant \frac{2A}{a_0}(A\alpha+B)\alpha^n \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k(n-k)^2} \\ &\qquad \leqslant \frac{0.83}{a_0}\frac{A\alpha^n}{n} \leqslant \frac{1.3}{a_0}\frac{A\alpha^n}{n+1} \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 2.8. Puis on a successivement:

$$\begin{aligned} |2b_n| &\leqslant \frac{2B\alpha^n}{n^2} = \frac{A\alpha^n}{n+1}\left(\frac{2B}{A}\frac{n+1}{n^2}\right) \\ &= \frac{A\alpha^n}{n+1}\frac{8B\alpha(n+1)}{n^2} \leqslant 1.32\alpha\frac{A\alpha^n}{n+1}; \\ \left|\frac{4}{a_0}na_n\right| &\leqslant \frac{4}{a_0}A\frac{\alpha^n}{n+1}\frac{n+1}{n^2} \leqslant \frac{3}{a_0}A\frac{\alpha^n}{n+1}; \\ \left|\frac{4}{a_0}b_{n-1}\right| &\leqslant \frac{4}{a_0}B\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{A\alpha^n}{n+1}\left(\frac{4}{a_0}\frac{B}{A\alpha}\frac{n+1}{(n-1)^2}\right) \\ &\leqslant \frac{48B}{a_0}\frac{A\alpha^n}{n+1} \leqslant \frac{11}{a_0}\frac{A\alpha^n}{n+1}; \\ |\{(n-1)^2-1\}a_{n-1}| &\leqslant \frac{A\alpha^{n-1}}{n-1} \leqslant \frac{A\alpha^n}{n+1}\frac{n+1}{(n-1)\alpha} \leqslant \frac{3}{\alpha}\frac{A\alpha^n}{n+1}; \\ \left|\{(n-1)^2-1\}a_{n-1}\frac{4a_2}{a_0}\right| &\leqslant \frac{3}{\alpha}\frac{4A\alpha^2}{8a_0}\frac{A\alpha^n}{n+1} \leqslant \frac{3}{8a_0}\frac{A\alpha^n}{n+1}; \\ \left|\frac{2}{a_0}(n^2-1)a_n\right| &\leqslant \frac{2}{a_0}A\frac{\alpha^n}{n} \leqslant \frac{3}{a_0}A\frac{\alpha^n}{n+1}. \end{aligned}$$

La formule de définition de a_{n+1} nous donne alors

$$|2(n+1)^2 a_{n+1}| \leqslant \frac{A\alpha^n}{n+1}\left(1.32\alpha + \frac{19}{a_0} + \frac{3}{\alpha}\right).$$

Pour α sufisamment grand, le crochet sera $\leqslant 2\alpha$ et l'on obtiendra bien

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{A\alpha^{n+1}}{(n+1)^3}. \qquad \square$$

2.12 Avec les notations de 2.11, on trouve

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0^2+36}{288}, \\ a_4 &= -\frac{17a_0^4+72a_0^2-48}{1152a_0^3}, \\ a_5 &= -\frac{a_0^4-200a_0^2-5200}{230\,400}, \\ a_6 &= -\frac{14a_0^8+7425a_0^6+31\,500a_0^4-32\,400a_0^2+25\,920}{2073\,600a_0^5}, \\ a_7 &= \frac{5a_0^6-882a_0^4+113\,288a_0^2+2469\,600}{406\,425\,600}. \end{aligned}$$

2.13 Dans les sections 2.13 à 2.15 nous prenons

$$a_0 = \pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad a_1 = \log\tfrac{1}{2}a_0 - 1,$$

d'où une suite $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ bien déterminée. La calcul donne

$a_0 = 2.565\,10$	$a_5 = 0.028\,09$	$a_{10} = -0.001\,53$
$a_1 = -0.751\,15$	$a_6 = -0.014\,41$	$a_{11} = 0.000\,93$
$a_2 = -0.515\,56$	$a_7 = 0.007\,82$	$a_{12} = -0.000\,57$
$a_3 = 0.147\,85$	$a_8 = -0.004\,42$	
$a_4 = -0.059\,75$	$a_9 = 0.002\,57$	

En reprenant la preuve de 2.11, on voit que la majoration de $|a_n|$ est valable en prenant $\alpha = 17$ et $A = \frac{1}{68}$. (Des majorations plus fines pourraient être obtenues au prix de calculs plus techniques.) Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$. On a $R \geqslant \frac{1}{17}$. Pour $0 < \lambda < R$, posons

$$g_1(\lambda) = \lambda\log\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n. \tag{38}$$

2.14 Lemme *On a*

$$\lambda^2 g_1''+\lambda g_1'-g_1 = \frac{2g_1''}{1-\exp(-g_1')}.$$

On a

$$g_1'(\lambda) = \log\lambda+1+\sum_{n=1}^{\infty} na_n\lambda^{n-1},$$

$$g_1''(\lambda) = \lambda^{-1}+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\lambda^{n-2};$$

$$\lambda^2+\lambda g_1'-g_1 = 2\lambda+\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-1)a_n\lambda^n$$

$$= -a_0+2\lambda+\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)a_n\lambda^n;$$

$$\exp\{-g_1'(\lambda)\} = \exp\{-1-\log\lambda-a_1\}\exp\left\{-\sum_{n=2}^{\infty} na_n\lambda^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{2}{a_0\lambda}\exp\{-u\},$$

avec

$$u = \sum_{n=2}^{\infty} na_n\lambda^{n-1},$$

d'où

$$\exp(-u) = \varphi(-u)+1-u = -\sum_{n=2}^{\infty} b_n\lambda^n+1-\sum_{n=2}^{\infty} na_n\lambda^{n-1}.$$

Ensuite

$$\lambda\{1-\exp(-g_1')\} = -\frac{2}{a_0}+\left(1+\frac{4a_2}{a_0}\right)\lambda+\frac{2}{a_0}\sum_{n=2}^{\infty}\{(n+1)a_{n+1}+b_n\}\lambda^n,$$

$$2\lambda g_1'' = 2+\sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1)a_{n+1}\lambda^n.$$

Nous devons vérifier que

$$\lambda\{1-\exp(-g_1')\}(\lambda^2 g_1''+\lambda g_1'-g_1) = 2\lambda g_1''.$$

L'identification des termes constants donne $(-2/a_0)(-a_0) = 2$. Celle des termes de degré 1 donne $(-2/a_0)2+(1+4a_2/a_0)(-a_0) = 4a_2$, ce qui est vrai compte tenu de la valeur de a_2. En degré $n \geqslant 2$, on obtient le formule de définition récurrente de a_{n+1}.

2.15 Théorème *Soit (a_n) la suite définie en 2.13. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ (rappelons que $R \geqslant \frac{1}{17}$). Pour $0 < \lambda < R$, on a*

$$g(\lambda) = \lambda\log\lambda+\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n.$$

On reprend la notation g_1 de 2.13 et 2.14. On a, quand $\lambda \to 0$,

$$g_1(\lambda) \to a_0 > 0, \qquad g_1'(\lambda) \to -\infty, \qquad \lambda g_1'(\lambda) \to 0.$$

Montrons que

$$g_1^2(\lambda)-\lambda^2 g_1'^2(\lambda) = 4F(-g_1'(\lambda)). \tag{39}$$

Les dérivées des 2 membres sont

$$2g_1g_1'-2\lambda g_1'^2-2\lambda^2 g_1'g_1'', \qquad 4\frac{g_1'g_1''}{e^{-g_1'}-1}$$

et elles sont égales d'après 2.14. D'autre part, les 2 membres de (39) tendent vers $\frac{2}{3}\pi^2$ quand $\lambda \to 0$. Cela prouve (39).

Posons maintenant

$$\mu(\lambda) = \frac{2\lambda g_1'(\lambda)}{\lambda g_1'(\lambda)-g_1(\lambda)} \tag{40}$$

donc

$$1-\mu(\lambda) = \frac{g_1(\lambda)+\lambda g_1'(\lambda)}{g_1(\lambda)-\lambda g_1'(\lambda)}.$$

Pour λ assez petit, on a $\mu(\lambda) > 0$ et $1-\mu(\lambda) > 0$. Les relations (39) et (40) donnent

$$\frac{\mu(\lambda)^2}{\lambda^2\{1-\mu(\lambda)\}}F(-g_1'(\lambda)) = g_1'(\lambda)^2,$$

ce qui, avec la définition des fonctions H et J, donne

$$-g_1'(\lambda) = H\left(\frac{\mu(\lambda)}{\lambda\sqrt{1-\mu(\lambda)}}\right) = J(\mu(\lambda),\lambda). \tag{41}$$

Montrons maintenant que

$$\exp\{g_1'(\lambda)\}+\exp\left\{\frac{\lambda^2}{\mu(\lambda)}g_1'(\lambda)\right\} = 1. \tag{42}$$

Cette relation est équivalente à

$$\tfrac{1}{2}\lambda^2 g_1'(\lambda)-\tfrac{1}{2}\lambda g_1(\lambda) = \log(1-e^{g_1'(\lambda)}). \tag{43}$$

Les dérivées des 2 membres sont

$$\tfrac{1}{2}\lambda^2 g_1'' + \tfrac{1}{2}\lambda g_1' - \tfrac{1}{2}g_1, \qquad -\frac{e^{g_1'}g_1''}{1-e^{g_1'}}$$

et elles sont égales d'après 2.14. Les 2 membres de (43) tendent vers 0 quand $\lambda \to 0$. Cela prouve (42). On a donc

$$\exp\{-J(\mu(\lambda),\lambda)\} + \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{\mu(\lambda)}J(\mu(\lambda),\lambda)\right\} = 1$$

et le lemme 6 (b) montre que

$$M(\lambda) = \mu(\lambda). \tag{44}$$

Finalement, on a, d'après (23), (44), (40) et (41),

$$g(\lambda) = \lambda\frac{2-\mu(\lambda)}{\mu(\lambda)}J(\mu(\lambda),\lambda) = -\lambda\frac{2g_1'(\lambda)}{2\lambda g_1'(\lambda)}\{-g_1(\lambda)\} = g_1(\lambda).$$

Cette relation a été en fait démontrée pour λ assez petit. Comme g et g_1 sont analytiques sur $]0,R[$, on en déduit le théorème. □

2.16 Remarque Etant donné le théorème de Hardy–Ramanujan, il n'est pas surprenant que $g(\lambda) \to \pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ quand $\lambda \to 0$. Toutefois, cela ne semble pas évident a priori.

2.17 Remarque Soient $\lambda > 0$, n un entier tendant vers $+\infty$ et (m_n) une suite d'entiers tels que $m_n/\sqrt{n} \to \lambda$. Alors, grâce à la continuité de g, le théorème 2.4 entraîne facilement que $\log r(n,m_n) \sim g(\lambda)\sqrt{n}$.

2.18 Comme dans [4], notons $R(n,a)$ le nombre de partitions de n dont aucune sous-somme n'est égale à a. Le résultat suivant est beaucoup plus spécial que ceux de [4] et [5], mais ne semble pas une conséquence de ces articles.

Théorème *Soit m un nombre impair tel que $m = \sqrt{n}\{1+o(1)\}$. On a $\log R(n,m) \geqslant 2.0138\sqrt{n}$ pour $n \gg 1$.*

Nous utiliserons la fonction $\lambda \mapsto s(\lambda)$ suivante, définie pour $0 < \lambda < 1$:

$$s(\lambda) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda}\,f\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) + \sqrt{1-\lambda}\,g\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\right).$$

Soit i un entier pair tel que $0 < i < n$. Posons $n/i = \lambda$. Soit $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des partitions de i dont toutes les parts sont paires et $< m$. Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des partitions de $n-i$ dont toutes les parts sont $> m$. La 'somme directe' d'un élément de $\mathcal{P}_1$ et d'un élément de $\mathcal{P}_2$ est une partition de n dont aucune sous-somme n'est égale à m. D'autre part, 2 couples distincts de $\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2$ ont des sommes directes distinctes. Donc

$$\begin{aligned}
R(n,m) &\geqslant \operatorname{Card}(\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2);\\
\log R(n,m) &\geqslant \log\operatorname{Card}\mathcal{P}_1 + \log\operatorname{Card}\mathcal{P}_2\\
&= \log p(\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}(m-1)) + \log r(n-i, m+1)\\
&= \log p(\tfrac{1}{2}\lambda n, \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\{1+o(1)\}) + \log r((1-\lambda)n, \sqrt{n}\{1+o(1)\})\\
&= \log p\left(\tfrac{1}{2}\lambda n, \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda n}\{1+o(1)\}\right)\\
&\quad + \log r\left((1-\lambda)n, \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\sqrt{(1-\lambda)n}\{1+o(1)\}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que $n \to \infty$ et que i est choisi de telle sorte que $\lambda \to \lambda_0 \in\,]0,1[$. On a, d'après les théorèmes 1.5 et 2.4,

$$\log p\left(\tfrac{1}{2}\lambda n, \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\lambda}}\sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda n}\right) \sim f\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda_0}}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda_0 n},$$

$$\log r\left((1-\lambda)n, \frac{1+o(1)}{\sqrt{1-\lambda}}\sqrt{(1-\lambda)n}\right) \sim g\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_0}}\right)\sqrt{(1-\lambda_0)n}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour $n \gg 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
\log R(n,m) &\geqslant \left\{\sqrt{\tfrac{1}{2}\lambda_0}\,f\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda_0}}\right) + \sqrt{1-\lambda_0}\,g\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_0}}\right) - \epsilon\right\}\sqrt{n}\\
&= \{s(\lambda_0) - \epsilon\}\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

Il semble probable que $s(\lambda)$ est croissant pour $0 < \lambda < \lambda_1$ et décroissant pour $\lambda_1 < \lambda < 1$, avec un nombre λ_1 voisin de 0.34. En tous cas, un calcul numérique fournit $s(0.34) = 2.013\,844$, d'où le théorème. □

3 Etude de $r(n,m)$ pour $m \leqslant n^{\frac{1}{3}-\epsilon}$.

Dans cette partie, nous utilisons des méthodes probabilistes en usage depuis longtemps en théorie additive de nombres. Pour un emploi récent de ces méthodes dans un sujet voisin, cf. [6].

3.1 Lemme *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ des nombres réels > 0. On définit, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, la fonction $\chi_i(t)$ qui vaut $1/u_i$ pour $0 \leqslant t \leqslant u_i$ et 0 ailleurs. On pose*

$$\varphi_k = \chi_1 * \chi_2 * \cdots * \chi_k,$$

la convolée des fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_k$.

Soit maintenant f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On définit par récurrence l'opérateur $D^{(j)}(u_1, \ldots, u_j; f, x)$ par

$$D^{(1)}(u_1;f,x) = f(x)-f(x-u_1),$$
$$D^{(j)}(u_1,\dots,u_j;f,x) = D^{(j-1)}(u_1,\dots,u_{j-1};f,x) - D^{(j-1)}(u_1,\dots,u_{j-1};f,x-u_j).$$

Alors, si f est de classe C^k sur $[\frac{1}{2},x]$ et si $x \geqslant u_1+u_2+\cdots+u_k+\frac{1}{2}$, on a

$$D^{(k)}(u_1,\dots,u_k;f,x) = \left(\prod_{i=1}^{k} u_i\right)\int_{\frac{1}{2}}^{x} f^{(k)}(t)\varphi_k(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration se fait par récurrence sur k. Lorsque les u_i sont égaux à 1, la démonstration est donnée dans [7]. Nous remercions A. Odlyzko pour nous avoir signalé ce lemme. □

3.2 Rappelons quelques formules qui se trouvent dans [3].

$$p(n) = \frac{C^3}{2\pi\sqrt{2}}\varphi'(C^2[n-\tfrac{1}{24}])+f_1(n),$$

où

$$C = \pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad \varphi(x) = \frac{\exp\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \qquad f_1(n) = O\left(\frac{1}{n}\exp\tfrac{1}{2}C\sqrt{n}\right)$$

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n}\exp C\sqrt{n}, \qquad r(n,m) = D^{(m-1)}(1,2,\dots,m-1;p,n). \tag{45}$$

Enfin, la dérivée $\varphi^{(m)}(x)$ s'écrit:

$$\varphi^{(m)}(x) = \frac{\exp\sqrt{x}}{2^m x^{(m+1)/2}}y_m\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

où y_m est le m-ieme polynôme de Bessel. En utilisant le lemme précédent avec $k=m-1$ et $u_i=i$, on obtient

$$r(n,m) = \frac{(m-1)!\,C^m}{2^{m+1}\pi\sqrt{2}}\int_{n-\frac{1}{2}m(m-1)}^{n}\varphi(n-t)\frac{\exp C\sqrt{t-\frac{1}{24}}}{(t-\frac{1}{24})^{(m+1)/2}}y_m\left(-\frac{1}{C\sqrt{t-\frac{1}{24}}}\right)\mathrm{d}t + O\left(\frac{2^{m-1}}{n}\exp\tfrac{1}{2}C\sqrt{n}\right) \tag{46}$$

où l'on a noté φ au lieu de φ_{m-1}.

3.3 On fixe comme précédemment $u_i=i$ et l'on désigne par X_i une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est χ_i. On choisit les X_i de telle manière que $X_1,\dots,X_{m-1}$ soient independantes. On appellera Y la somme $X_1+\cdots+X_{m-1}$, et la fonction de répartition de Y est φ. On a

$$E(X_i)=\int x\chi_i(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}i, \qquad V(X_i)=\int x^2\chi_i(x)\,\mathrm{d}x-E(X_i)^2 = \tfrac{1}{12}i^2,$$

d'où l'on déduit

$$E(Y) = \tfrac{1}{4}m(m-1), \qquad V(Y) = \tfrac{1}{72}m(m-1)(2m-1).$$

On note $\sigma=\sqrt{V(Y)}$ l'écart type de Y et l'on applique l'inégalité de Bernstein (cf. [8], p. 365): soit μ un nombre vérifiant $0<\mu\leqslant\sigma/m$, alors

$$\mathrm{Proba}(|Y-\tfrac{1}{4}m(m-1)|\geqslant\mu\sigma)\leqslant 2\exp\left(-\frac{\mu^2}{2(1+\mu m/2\sigma)^2}\right). \tag{47}$$

3.4 Théorème *Soit $0<\epsilon<\frac{1}{3}$ et $m\leqslant n^{\frac{1}{3}-\epsilon}$; alors on a, quand $n\to\infty$,*

$$r(n,m) \sim p(n)(m-1)!\left(\frac{C}{2\sqrt{n}}\right)^{m-1}\exp\left\{-\left(\tfrac{1}{8}C+\frac{1}{2C}\right)\frac{m^2}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Nous allons partir de la formule (46). Rappelons d'abord un résultat de M. Chellali (cf. [2]); si $m^{3/2}x\to 0$, alors

$$y_m(x) = \exp(\tfrac{1}{2}m^2x)\{1+O(mx)\}.$$

Soit maintenant $t\in[n-\frac{1}{2}m(m-1),n]$, on a

$$t = n+O(n^{2/3}),$$
$$x := -\frac{1}{C\sqrt{t-\frac{1}{24}}} = -\frac{1}{C\sqrt{n}}+O(n^{-5/6}),$$
$$y_m(x) = \exp\left(-\frac{m^2}{2C\sqrt{n}}\right)\{1+O(n^{-1/6})\}.$$

Le formule (46) devient

$$r(n,m) = \frac{(m-1)!\,C^m}{2^{m+1}\pi\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{m^2}{2C\sqrt{n}}\right)\{1+O(n^{-1/6})\}I + O\left(\frac{2^{m-1}}{n}\exp\tfrac{1}{2}C\sqrt{n}\right) \tag{48},$$

avec

$$I = \int_{n-\frac{1}{2}m(m-1)}^{n}\varphi(n-t)\frac{\exp C\sqrt{t-\frac{1}{24}}}{(t-\frac{1}{24})^{(m+1)/2}}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $t\in[n-\frac{1}{2}m(m-1),n]$, on a

$$t = n+O(m^2)$$

et

$$(t-\tfrac{1}{24})^{(m+1)/2} = \exp\left\{\tfrac{1}{2}(m+1)\left[\log n+O\left(\frac{m^2}{n}\right)\right]\right\}$$

$$= n^{(m+1)/2}\left\{1+O\left(\frac{m^3}{n}\right)\right\}.$$

On a ainsi

$$I = n^{-(m+1)/2}\{1+O(n^{-3\epsilon})\}J, \tag{49}$$

avec

$$J = \int_{n-\frac{1}{2}m(m-1)}^{n} \varphi(n-t)\exp C\sqrt{t-\tfrac{1}{24}}\ dt.$$

Lorsque $m = o(n^{1/4})$ le même raisonnement montre que

$$J \sim \exp C\sqrt{n} \int_{n-\frac{1}{2}m(m-1)}^{n} \varphi(n-t)\ dt = \exp C\sqrt{n}$$

et le théorème se réduit à

$$r(n,m) \sim p(n)(m-1)!\left(\frac{C}{2\sqrt{n}}\right)^{m-1},$$

qui a déjà été démontré dans [3].

On peut donc supposer $m \geqslant n^{1/5}$.

On coupe alors l'intervalle d'intégration de J de la façon suivante. Rappelons que

$$\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{72}m(m-1)(2m-1)} = \sqrt{V(Y)}.$$

On pose

$$\tau = \min(\epsilon, \tfrac{1}{20}), \qquad \mu = n^{\tau},$$
$$a_0 = n-\tfrac{1}{2}m(m-1), \qquad a_1 = n-\tfrac{1}{4}m(m-1)-\mu\sigma,$$
$$a_2 = n-\tfrac{1}{4}m(m-1)+\mu\sigma, \qquad a_3 = n$$

et, pour $0 \leqslant i \leqslant 2$,

$$J_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi(n-t)\exp(C\sqrt{t-\tfrac{1}{24}})\ dt.$$

On observe ensuite que, comme m est supposé $\geqslant n^{1/5}$, on a $\mu \leqslant \sigma/m$ pour n assez grand, et que, pour x vérifiant $\mu \leqslant x \leqslant \sigma/m$, on a

$$0 \leqslant \frac{xm}{4\sigma} \leqslant \tfrac{1}{4}.$$

L'inégalité de Bernstein (47) implique alors:

$$\mathrm{Proba}(|Y-\tfrac{1}{4}m(m-1)| \geqslant x\sigma) \leqslant 2\exp(-\tfrac{2}{9}\mu^2). \tag{50}$$

Par application de la formule de Taylor, si $t \to +\infty$ et si $h = o(t^{3/4})$, alors on a

$$\exp(C\sqrt{t+h}) = \exp(C\sqrt{t})\exp\left(\frac{Ch}{2\sqrt{t}}\right)\left\{1+O\left(\frac{h^2}{t^{3/2}}\right)\right\}. \tag{51}$$

Evaluons maintenant J_1. Il est commode de poser $t_0 = n-\frac{1}{4}m(m-1)$. Pour $t \in [a_1, a_2]$, on a

$$t = t_0+O(\mu\sigma),$$

et, par (50),

$$\exp(C\sqrt{t-\tfrac{1}{24}}) = \exp(C\sqrt{t_0})\{1+O(\mu\sigma n^{-1/2})\}$$
$$= \exp(C\sqrt{t_0})\{1+O(n^{-\tau/2})\}.$$

On obtient alors

$$J_1 = \exp(C\sqrt{t_0})\{1+O(n^{-\tau/2})\} \int_{a_1}^{a_2} \varphi(n-t)\ dt.$$

Mais

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(n-t)\ dt = 1-\mathrm{Proba}(|Y-\tfrac{1}{4}m(m-1)| \geqslant \mu\sigma)$$

et, d'après (50),

$$J_1 = \exp(C\sqrt{t_0})\{1+O(n^{-\tau/2})\}$$

et, par (51),

$$J_1 \sim \exp(C\sqrt{n})\exp\left(-\frac{Cm^2}{8\sqrt{n}}\right). \tag{52}$$

Il reste à montrer que

$$J_0+J_2 = o(J_1). \tag{53}$$

On a

$$J_0 \leqslant \exp(C\sqrt{t_0}) \int_{a_0}^{a_1} \varphi(n-t)\ dt,$$

et comme

$$\int_{a_0}^{a_1} \varphi(n-t)\ dt = \mathrm{Proba}(Y-\tfrac{1}{4}m(m-1) \leqslant -\mu\sigma) \leqslant 2\exp(-\tfrac{2}{9}n^{2\tau}),$$

on a bien $J_0 = o(J_1)$.

Pour évaluer J_2, on fait une intégration par parties, en posant $u = -\exp(C\sqrt{t-\frac{1}{24}})$ et $dv = -\varphi(n-t)\,dt$,

$$v(t) = \int_0^{n-t} \varphi(w)\,dw.$$

On obtient

$$J_2 = \exp(C\sqrt{t_0+\mu\sigma-\tfrac{1}{24}}) \int_0^{\frac{1}{4}m(m-1)-\mu\sigma} \varphi(w)\,dw + K,$$

avec

$$K = \int_{t_0+\mu\sigma}^{n} v(t)\frac{C}{2}\frac{\exp(C\sqrt{t-\frac{1}{24}})}{\sqrt{t-\frac{1}{24}}}\,dt.$$

Mais

$$\int_0^{\frac{1}{4}m(m-1)-\mu\sigma} \varphi(w)\,dw = \mathrm{Proba}(Y-\tfrac{1}{4}m(m-1) \leqslant -\mu\sigma)$$

$$\leqslant 2\exp(-\tfrac{2}{9}n^{2\tau}),$$

et il rester à montrer que $K = o(J_1)$. On écrit:

$$K = K_1+K_2 = \int_{t_0+\sigma\mu}^{t_0+\sigma^2/m} + \int_{t_0+\sigma^2/m}^{n}.$$

On a

$$K_2 \leqslant \tfrac{1}{2}C\exp(C\sqrt{n})\left(n-t_0-\frac{\sigma^2}{m}\right)v\left(t_0+\frac{\sigma^2}{m}\right).$$

De plus

$$v\left(t_0+\frac{\sigma^2}{m}\right) = \mathrm{Proba}\left(Y-\tfrac{1}{4}m(m-1) \leqslant -\frac{\sigma^2}{m}\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{2}{9}\frac{\sigma^2}{m^2}\right).$$

Comme

$$\frac{\sigma^2}{m^2} \sim \tfrac{1}{72}m \geqslant \tfrac{1}{72}n^{1/5} \quad \text{et} \quad \frac{m^2}{\sqrt{n}} = O(n^{1/6}),$$

on voit avec (52) que $K_2 = o(J_1)$.

Dans K_1, on fait le changement de variable $t = t_0+x\sigma$. On obtient, pour n assez grand,

$$K_1 \leqslant \sigma \int_\mu^{\sigma/m} v(t_0+x\sigma)\exp(C\sqrt{t_0+x\sigma})\,dx$$

$$\leqslant 2\sigma \int_\mu^{\sigma/m} 2\exp(-\tfrac{2}{9}x^2)\exp(C\sqrt{t_0})\exp\left(C\frac{x\sigma}{2\sqrt{t_0}}\right)dx.$$

On observe que

$$\frac{\sigma}{\sqrt{t_0}} = O\left(\frac{m^{3/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

et donc tend vers 0. On aura donc

$$K_1 \ll \exp(C\sqrt{t_0}) \int_\mu^\infty \exp(-\tfrac{1}{9}x)\,dx \ll \exp(C\sqrt{t_0})\exp(-\tfrac{1}{9}n^\tau).$$

On a ainsi montré que $K_1 = o(J_1)$, doù (53).

Dans (48), le terme de reste est négligeable devant le terme principal. En effet, le logarithme du terme principal est équivalent à $C\sqrt{n}$, tandis que

$$\log\left(\frac{2^{m-1}}{2}\exp\frac{C\sqrt{n}}{2}\right) \sim \frac{C\sqrt{n}}{2}.$$

Finalement, en utilisant (48), (49), (53), (52) et (45), on a

$$\begin{aligned}
r(n,m) &\sim \frac{(m-1)!\,C^m}{2^{m+1}\pi\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{m^2}{2C\sqrt{n}}\right)I \\
&\sim \frac{(m-1)!\,C^m}{2^{m+1}\pi\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{m^2}{2C\sqrt{n}}\right)n^{-\frac{1}{2}(m+1)}J \\
&\sim \frac{(m-1)!\,C^m}{2^{m+1}\pi\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{m^2}{2C\sqrt{n}}\right)n^{-\frac{1}{2}(m+1)}J_1 \\
&\sim \frac{(m-1)!\,C^m}{2^{m+1}\pi\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{m^2}{2C\sqrt{n}}\right)n^{-\frac{1}{2}(m+1)}\exp(C\sqrt{n})\exp\left(-\frac{Cm^2}{8\sqrt{n}}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}n}\exp(C\sqrt{n})(m-1)!\left(\frac{C}{2\sqrt{n}}\right)^{m-1}\exp\left\{-\left(\tfrac{1}{8}C+\frac{1}{2C}\right)\frac{m^2}{\sqrt{n}}\right\} \\
&\sim p(n)(m-1)!\left(\frac{C}{2\sqrt{n}}\right)^{m-1}\exp\left\{-\left(\tfrac{1}{8}C+\frac{1}{2C}\right)\frac{m^2}{\sqrt{n}}\right\}. \qquad \square
\end{aligned}$$

3.5 Remarque On reconnaît dans le théorème $-(\frac{1}{8}C+1/2C)$ qui est le coefficient de λ^2 dans le développement de $g(\lambda)$. On espérait que, en posant $\lambda = m/\sqrt{n}$ ou $\lambda = (m-1)/\sqrt{n}$, on aurait obtenu une formule du genre

$$\log r(n,m) - g(\lambda)\sqrt{n} \to 0$$

ou

$$\log r(n,m) - \frac{g(\lambda)}{C}\log p(n) \to 0.$$

Jusqu'à présent, nous n'avons pas trouvé une telle relation.

4 Tables numériques

On construit des procédures permettant calculer les différentes fonctions intervenant dans la partie théorique.

4.1 Calcul de $F(x)$. Pour $x > 1$, on utilise la formule:

$$F(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \sum_{n\geqslant 1}\frac{nx+1}{n^2}\mathrm{e}^{-nx}.$$

Pour $x \leqslant 1$, on utilise le développement en série entière

$$F(x) = x - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{36}x^3 - \tfrac{1}{3600}x^5 + \cdots.$$

4.2 Calcul de $H(y)$. $x = H(y)$ est solution de l'équation

$$x^2 = y^2F(x).$$

On part de $x_0 = y$, puis par la méthode de Newton, on calcule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - y^2F(x_n)}{2x_n - \dfrac{y^2x_n}{\mathrm{e}^{x_n}-1}}.$$

4.3 Calcul de $f(\lambda)$. On a

$$f(\lambda) = \frac{2H(\lambda)}{\lambda} - \lambda\log(1-\mathrm{e}^{-H(\lambda)}).$$

4.4 Calcul de $M(\lambda)$. On résoud l'équation

$$\Phi(x) = \exp\{-J(x,\lambda)\} + \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{x}J(x,\lambda)\right\} - 1 = 0,$$

où

$$J(x,\lambda) = H\left(\frac{x}{\lambda\sqrt{1-x}}\right).$$

Là encore on utilise la méthode de Newton. Comme valeur de départ x_0 on choisit

$$x_0 = \begin{cases} -0.78\lambda\log 0.78\lambda & \text{si } \lambda \leqslant 0.25,\\ 0.4 & \text{si } 0.25 < \lambda < 3,\\ 1-\dfrac{1}{2\log\lambda} & \text{si } \lambda \geqslant 3.\end{cases}$$

Puis on construit la suite

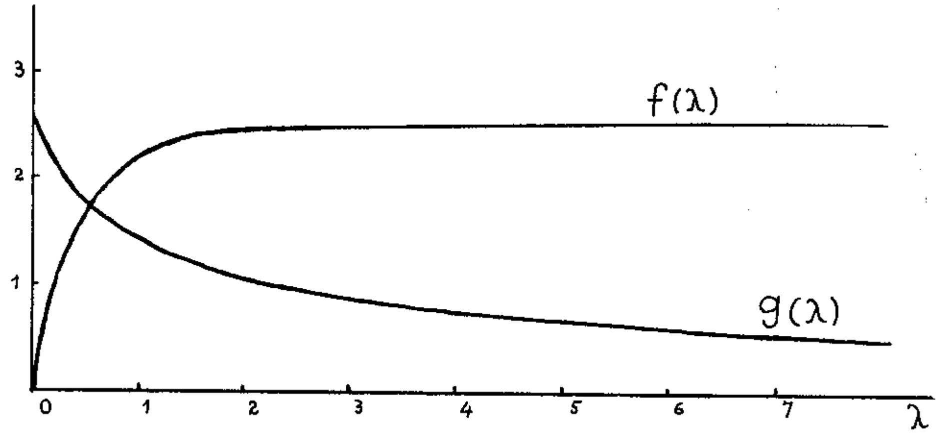
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Phi(x_n)}{\Phi'(x_n)},$$

qui tend vers $M(\lambda)$. Le calcul de $\Phi'(x)$ n'est pas très simple: on utilise (19).

4.5 Calcul de $g(\lambda)$. On a

$$g(\lambda) = \lambda\frac{2-M(\lambda)}{M(\lambda)}J(M(\lambda),\lambda).$$

λ	$f(\lambda)$	$g(\lambda)$	λ	$f(\lambda)$	$g(\lambda)$
0.01	0.112 10	2.511 48	2	2.490 79	1.064 95
0.02	0.196 48	2.471 63	3	2.546 89	0.876 90
0.03	0.270 40	2.436 91	4	2.560 31	0.753 78
0.04	0.337 53	2.405 48	5	2.563 80	0.665 55
0.05	0.399 60	2.376 48	6	2.564 74	0.598 58
0.06	0.457 66	2.349 40	7	2.565 00	0.545 67
0.07	0.512 38	2.323 89	8	2.565 07	0.502 62
0.08	0.564 24	2.299 72	9	2.565 09	0.466 79
0.09	0.613 61	2.276 71	10	2.565 10	0.436 41
0.1	0.660 77	2.254 71	20		0.273 72
0.2	1.045 76	2.073 45	30		0.204 95
0.3	1.329 03	1.935 73	40		0.165 89
0.4	1.548 59	1.823 81	50		0.140 35
0.5	1.723 07	1.729 51	60		0.122 21
0.6	1.863 79	1.648 18	70		0.108 57
0.7	1.978 38	1.576 85	80		0.097 91
0.8	2.072 36	1.513 49	90		0.089 32
0.9	2.149 88	1.456 63	100		0.082 24
1.0	2.214 12	1.405 19	200		0.047 28
1.1	2.267 58	1.358 31	300		0.033 95
1.2	2.312 23	1.315 35	400		0.026 76
1.3	2.349 65	1.275 77	500		0.022 22
1.4	2.381 11	1.239 14	600		0.019 07
1.5	2.407 63	1.205 11	700		0.016 75
1.6	2.430 07	1.173 37	800		0.014 96
1.7	2.449 09	1.143 69	900		0.013 54
1.8	2.465 25	1.115 84	1000		0.012 38
1.9	2.479 03	1.089 64			



Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, Hermann, Paris, 1976

[2] M. Chellali, Sur les zéros des polynômes de Bessel, III, *CRAS*, **307**, (I) (1988), 651–4, et Thèse de l'Université de Grenoble, 1989

[3] J. Dixmier & J.-L. Nicolas, Partitions without small parts, *Proceedings of the Number Theory Conference of Budapest, 1987* (to appear)

[4] P. Erdős, J.-L. Nicolas & A. Sárközy, On the number of partitions of n without a given subsum, I, *Discrete Math.*, **75** (1989), 155–66

[5] P. Erdős, J.-L. Nicolas & A. Sárközy, On the number of partitions of n without a given subsum, II (to appear in *Number Theory at Allerton Park* (eds. B. Berndt, H. Diamond, H. Halberstam & A. Hildebrand), Birkhaüser, 1990)

[6] G. A. Freiman, On extremal additive problems of Paul Erdős (to appear)

[7] A. Odlyzko, Differences of the partition function, *Acta Arithmetica*, **49** (1988), 237–54

[8] A. Rényi, *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris, 1966

[9] G. Szekeres, An asymptotic formula in the theory of partitions, *Quart. J. Math. Oxford*, **2** (1951), 85–108

[10] G. Szekeres, Some asymptotic formulae in the theory of partitions, II, *Quart. J. Math. Oxford*, **4** (1953), 96–111