# Number Theory in Progress

Proceedings of the International Conference on Number Theory
organized by the Stefan Banach International Mathematical Center
in Honor of the 60th Birthday of Andrzej Schinzel
Zakopane, Poland, June 30–July 9, 1997

*Editors*

Kálmán Győry
Henryk Iwaniec
Jerzy Urbanowicz

*Offprint*

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1999

## Table of contents of Volume I



# Grandes valeurs de la fonction $d_k$


*Jean-Luc Duras, Jean-Louis Nicolas et Guy Robin**



**Abstract.** Let $d_k(n)$ denote the generalised divisor function which appears in the expansion of $\zeta(s)^k$ in Dirichlet series, where $\zeta(s)$ is the Riemann function. The aim of this work is to study how large $d_k(n)$ can be in terms of $n$ and $k$. Various upper bounds for $d_k(n)$ are given. The superior highly composite numbers which were introduced by Ramanujan are one of the main tools to get these upper bounds.


## 1. Introduction

Pour $k$ réel positif, on considère la fonction $d_k$ définie par l'égalité, valable pour $s$ complexe tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{d_k(n)}{n^s} = \zeta(s)^k, \tag{1}$$

où $\zeta(s)$ désigne la fonction de Riemann ; $d_k$ est une fonction multiplicative et compte tenu de

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} (1-p^{-s})^{-1} \quad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1$$

il vient $d_k(1) = 1$ et, pour $m$ entier $\geq 1$,

$$d_k(p^m) = \frac{k(k+1)\cdots(k+m-1)}{m!} = \binom{k+m-1}{m} = \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)\Gamma(m+1)}. \tag{2}$$

Les propriétés usuelles des séries de Dirichlet nous donnent pour $k \geq 1$ :

$$d_k(n) = \sum_{\delta | n} d_{k-1}(\delta). \tag{3}$$

On a $d_1 = 1$, $d_2 = d$, qui est la fonction nombre de diviseurs, et pour $k$ entier

$$d_k(n) = \sum_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_k = n} 1,$$


* Recherche partiellement financée par le CNRS, LACO (Limoges), UPRES-A-6090 et Institut Girard Desargues (Lyon), UPRES-A-5028.

est le nombre de façons de représenter $n$ comme produit de $k$ facteurs.

Le but de ce travail est l'étude des "grandes valeurs" des fonctions $d_k$ pour $k > 1$ et plus spécialement lorsque $k$ tend vers l'infini. À partir de maintenant, nous supposerons que $k$ est un nombre réel strictement supérieur à 1.

Soit $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de $n$ comptés avec multiplicité. Il est facile de montrer que pour $k > 1$ et $n \geq 1$ on a

$$\log d_k(n) \leq \Omega(n) \log k \leq \frac{\log k \log n}{\log 2}. \tag{4}$$

Norton (cf. [10]) a démontré le résultat suivant : pour tout $k \geq \log(n)$, on a

$$\log d_k(n) < k + 2\log(n).$$

Nous améliorons ce résultat en prouvant :

**Théorème 1.1.**
(i) *Soit $s$ réel $> 1$. Pour $k$ réel $\geq 1$ et pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\log d_k(n) \leq (k-1)\log\zeta(s) + s\log n.$$

(ii) *En particulier, pour $s = 2$, on a*

$$\log d_k(n) \leq (k-1)\log(\frac{\pi^2}{6}) + 2\log n \leq \frac{k-1}{2} + 2\log n.$$

(iii) *Enfin, pour tout $s$ réel $> 0$, on a*

$$\log d_k(n) \leq (k-1) \sum_{p \leq k^{1/s}} \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) + s\log n.$$

La démonstration de (i) est facile : on a par (3)

$$\frac{d_k(n)}{n^s} = \sum_{m|n} \frac{d_{k-1}(m)}{n^s} \leq \sum_{m|n} \frac{d_{k-1}(m)}{m^s} < \sum_{m \geq 1} \frac{d_{k-1}(m)}{m^s}$$

soit

$$d_k(n) < n^s \zeta^{k-1}(s)$$

ce qui donne (i) en prenant le logarithme. La démonstration de (iii) sera donnée au paragraphe 4.

Il est connu depuis Wigert (cf. [18]) que l'ordre maximum de la fonction $d_2(n)$ est $\exp\left(\frac{\log 2 \log n}{\log\log n}(1+o(1))\right)$, c'est-à-dire que l'on a pour $n \to \infty$

$$\log d_2(n) \leq \frac{\log 2 \log n}{\log\log n}(1+o(1)) \tag{5}$$

et qu'il existe une suite $n_i$ de valeurs de $n$ (par exemple la suite $n_1 = 2$, $n_2 = 2 \times 3$, $\ldots$, $n_i = 2 \times 3 \times \ldots \times p_i$, où $p_i$ est le $i$-ème nombre premier) pour lesquels (5) est une égalité.



Ceci a été précisé par Ramanujan (cf. [11] et [12]) qui a montré que l'ordre maximum de $\log d_2(n)$ est

$$\log 2 \,\mathrm{Li}(\log n) + O(\log n \exp(-a\sqrt{\log n})) \tag{6}$$

où $a$ est une constante réelle positive et $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Ramanujan avait aussi considéré l'ordre maximum des fonctions $d_k$ (cf. [13], Section 57). Heppner (cf. [5]) a étendu la formule (6) a une large classe de fonctions multiplicatives incluant les fonctions $d_k$. L'ordre maximum de $\log d_k(n)$ est :

$$\log k \,\mathrm{Li}(\log n) + O_k(\log n \exp(-a\sqrt{\log n})). \tag{7}$$

Compte tenu du développement asymptotique du logarithme intégral :

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \ldots + (r-1)!\frac{x}{(\log x)^r} + O_r\left(\frac{x}{(\log x)^{r+1}}\right),$$

ceci nous permet d'écrire, pour tout entier $r \geq 1$, $k$ fixé, en posant $\log_2 n = \log\log n$

$$\frac{\log d_k(n)}{\log k} \leq \frac{\log n}{\log_2 n} + \frac{\log n}{(\log_2 n)^2} + \ldots + (r-1)!\frac{\log n}{(\log_2 n)^r} + O_{k,r}\left(\frac{\log n}{(\log_2 n)^{r+1}}\right). \tag{8}$$

Posons, pour $r$ entier $\geq 1$ et $n \geq 3$

$$\Lambda_r(k,n) := \left(\frac{\log d_k(n)}{\log k} - \frac{\log n}{\log_2 n} - \ldots - (r-2)!\frac{\log n}{(\log_2 n)^{r-1}}\right) \times \frac{(\log_2 n)^r}{(r-1)!\log n}. \tag{9}$$

D'après (8), $\Lambda_r(k,n)$ est majoré pour $k$ fixé. Nous pouvons donc poser :

$$\lambda_r(k) := \max_{n \geq 3} \Lambda_r(k,n). \tag{10}$$

En particulier, nous poserons pour $n \geq 3$

$$\Lambda(k,n) = \Lambda_1(k,n) = \frac{\log d_k(n) \log_2 n}{\log k \log n} \tag{11}$$

et

$$\lambda(k) = \lambda_1(k) = \max_{n \geq 3} \Lambda(k,n). \tag{12}$$

Les valeurs de $\lambda_r(k)$ sont connues lorsque $k = 2$ pour $r = 1$ et $r = 2$ (cf. [8]),

$$\log d(n) \leq 1{,}53794 \log 2 \frac{\log n}{\log_2 n}, \qquad n \geq 3,$$

$$\log d(n) \leq \log 2 \frac{\log n}{\log_2 n}\left(1 + \frac{1{,}9349}{\log_2 n}\right), \qquad n \geq 3,$$

et lorsque $k = 3$ pour $r = 1$ et $r = 2$ (cf. [14])

$$\log d_3(n) \leq 1{,}59141 \log 3 \frac{\log n}{\log_2 n}, \qquad n \geq 3,$$

$$\log d_3(n) \leq \log 3 \frac{\log n}{\log_2 n}\Big(1 + \frac{2{,}10833}{\log_2 n}\Big), \qquad n \geq 3.$$

Nous démontrerons au paragraphe 3

**Théorème 1.2.**
(i) *Pour tout $k$ réel $\geq 2000$, on a la minoration*

$$\lambda(k) \geq \frac{\log k}{\log 16} + \frac{\log_2 2 + 1}{\log 4} > \frac{\log k}{\log 16} + \frac{0{,}316}{\log 2}.$$

(ii) *Pour $k$ réel $> 1$ et $r$ entier, la fonction $k \to \lambda_r(k)$ est croissante et non bornée.*

D'après la valeur (7) de l'ordre maximum de $\log d_k(n)$, il existe une suite de valeurs de $n$ pour lesquelles (8) est une égalité. On a donc $\lambda_r(k) > 1$, et pour chaque $r$ et chaque $k$, il existe un nombre fini de valeurs de $n$ pour lesquelles on a $\lambda_r(k) = \Lambda_r(k,n)$.

Nous supposerons maintenant $r = 1$. Nous désignerons par $M_k$ l'un quelconque des nombres vérifiant

$$\lambda(k) = \Lambda(k, M_k). \tag{13}$$

En général, pour $k$ fixé, il y aura un ou deux nombres $M_k$. Sous la conjecture de Schanuel [1)], M. Waldschmidt (cf. [17]) sait démontrer que, pour un $k$ fixé, il ne peut pas exister trois nombres distincts $n_1, n_2, n_3$ tels que l'on ait

$$\Lambda(k, n_1) = \Lambda(k, n_2) = \Lambda(k, n_3)$$

et donc que pour chaque $k$, il existe au plus deux nombres $M_k$.

Ramanujan (cf. [12]) a introduit les nombres hautement composés supérieurs (qui sont relatifs à la fonction $d_2$). L'étude de ces nombres a été ensuite reprise par Erdős (cf. [4]), Nicolas (cf. [7] et l'article de synthèse [8]), Robin (cf. [14] et [15]). Les résultats présentés dans cet article utilisent comme outil essentiel les nombres $k$-hautement composés supérieurs qui généralisent à la fonction $d_k$ les nombres hautement composés supérieurs. Ramanujan avait déjà défini les nombres $k$-hcs (cf. [13], Section 57), mais jusqu'à récemment, personne ne le savait.

1) C'est une conjecture très difficile de la théorie des nombres transcendants qui affirme que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$ est supérieur ou égal à $n$ (cf. [2]).



**Définition.** Un entier $N$ est dit *$k$-hautement composé supérieur* ($k$-hcs) s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, on ait :

$$\frac{d_k(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{d_k(N)}{N^\varepsilon}. \tag{14}$$

Posons

$$x := k^{1/\varepsilon} \tag{15}$$

et

$$I_p(x) := \left[\frac{k-1}{k^{\log p/\log x} - 1}\right] \tag{16}$$

avec la convention suivante : si $t$ n'est pas entier, $[t]$ désigne la partie entière de $t$, tandis que si $t$ est entier, $[t]$ vaudra soit $t$ soit $t-1$. On pose

$$N_x^{(k)} = N_x = \prod_{p \leq x} p^{I_p(x)}. \tag{17}$$

Pour $k$ et $x$ fixés, on peut se demander combien il peut y avoir de nombres $N_x^{(k)}$ définis par (17) et (16). Autrement dit en combien de points le maximum de la fonction multiplicative $d_k(n)/n^\varepsilon$ est il atteint? Lorsque $k = 2$ (cf. [8], p. 221), ou plus généralement lorsque $k$ est rationnel, le théorème des 6 exponentielles (cf. [6], chap. 2) montre que la quantité $\dfrac{k-1}{k^{\log p/\log x} - 1}$ figurant dans (16) ne peut pas être un nombre entier pour trois valeurs distinctes de $p$. En conséquence, lorsque $k$ est rationnel, il y a au plus 4 nombres $N_x^{(k)}$. Lorsque $k$ est irrationnel, on ne peut rien dire sans hypothèse ; cependant, sous la conjecture de Schanuel, (cf. [17]), on peut montrer qu'il existe au plus 4 nombres $N_x^{(k)}$ (voir ci-dessous la démonstration de la proposition 4.4).

Nous démontrerons les résultats suivants :

**Théorème 1.3.** *Soit $k > 1$ et $M_k$ un nombre maximisant $\Lambda(k,n)$ (défini par (11)). Alors $M_k \geq 26880$ et $M_k$ est $k$-hcs. Plus précisément, on a $M_k = N_{x_k}^{(k)}$ avec $N_{x_k}^{(k)}$ défini par* (17) *et*

$$\begin{aligned}\log x_k &= \frac{(\log_2 M_k)^2}{\lambda(k)(\log_2 M_k - 1)} = \frac{1}{\lambda(k)}\Big(\log_2 M_k + 1 + \frac{1}{\log_2 M_k - 1}\Big)\\ &= \frac{\log_2 M_k \log M_k \log k}{(\log_2 M_k - 1)\log d_k(M_k)}\end{aligned}$$

**Théorème 1.4.** *Avec les notations du théorème* 1.3, *on a les propriétés*
(i) *Si $k \geq 2000$, $x_k \geq 3$.*
(ii) *Si $k \geq 2{,}5 \cdot 10^6$, $x_k > 4$.*
(iii) *Si $k \geq 400000$, $x_k < 5$.*
(iv) *Si $k \geq 400000$, $x_k < 4 + \dfrac{13{,}1}{\log k}$.*

Notons qu'il résulte des points (i) et (iii) du théorème 1.4 et de (17) que pour $k \geq 400000$, les facteurs premiers de $M_k$ sont 2 et 3.

**Théorème 1.5.** *On pose $\beta = \log(3/2)/\log 4 = 0{,}2924\ldots$. Avec les notations du théorème 1.3, on a pour k tendant vers l'infini:*

(i) $\log x_k = \dfrac{\log 4}{1 + \frac{\log_2 2 - 1}{\log k}} \left(1 + O\left(\dfrac{\log k}{k^\beta}\right)\right).$

(ii) $x_k = 4\left(1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{(\log k)^i} + O\left(\frac{\log k}{k^\beta}\right)\right)$ *avec*

$$a_1 = 2\log 2(1 - \log_2 2) = 1{,}89\ldots$$
$$a_2 = 2(\log 2 + \log^2 2)(1 - \log_2 2)^2 = 4{,}38\ldots$$

(iii) $\lambda(k) = \dfrac{\log k}{\log 16} + \dfrac{\log_2 2 + 1}{\log 4} + \dfrac{(1 + \log_2 2)^2}{\log 16}\dfrac{1}{\log k} + O\left(\dfrac{(\log k)^2}{k^\beta}\right).$

**Théorème 1.6.** *Lorsque k parcourt la suite des entiers supérieurs à 400000, la suite $(\lambda(k)/\log k)$ est décroissante.*

Dans un prochain article, nous espérons donner un algorithme de calcul de $M_k$ pour $k \geq 2$ et fournir des tables de $M_k$, $x_k$ et $\lambda_k$ qui permettront de compléter les théorèmes 1.4 et 1.6 pour les petites valeurs de $k$. En particulier, nous prouverons que pour $k \geq 52845$, $M_k$ n'a que 2 et 3 comme facteurs premiers. Nous prouverons aussi que la fonction $(\lambda(k)/\log k)$ est décroissante pour $k \geq 2$ et que l'on a pour tout $n \geq 3$ et $k$ réel $\geq 2$

$$\log d_k(n) \leq 1{,}53794\,\frac{(\log k)^2}{\log 2}\,\frac{\log n}{\log_2 n}.$$

Nous espérons aussi étendre les théorèmes précédents au cas $r \geq 2$. Si l'on désigne par $M_{r,k}$ l'un des nombres tels que $\lambda_r(k) = \Lambda_r(k, M_{r,k})$, nous montrerons que $M_{r,k}$ est $k$-hcs, et plus précisément qu'il est égal à $N^{(k)}_{x_{k,r}}$ avec

$$\frac{1}{\log x_{k,r}} = \frac{L^{r-1} - (r-1)!}{L^r} + (r-1)!\,\lambda_r(k)\,\frac{L-r}{L^{r+1}},$$

et $L = \log_2 M_{k,r}$. Ensuite nous montrerons que pour $r$ fixé, on a $\lim_{k\to\infty} x_{k,r} = 2^{r+1}$ ce qui entraîne par (17) que, pour $k$ assez grand, les facteurs premiers de $M_{r,k}$ sont tous inférieurs à $2^{r+1}$. Enfin, nous montrerons que, pour $r$ fixé et $k \to \infty$, on a

$$\lambda_r(k) \sim \left(\frac{r}{r+1}\right)^{r+1} \frac{1}{r!}\,\frac{(\log k)^r}{\log 2}.$$

Lorsque $r = 1$ ou $r = 2$, on pourra trouver une partie de ces résultats dans [3].

Dans le paragraphe 2, nous donnons des estimations de la fonction $\Gamma$ qui nous seront utiles pour encadrer $d_k(p^m)$ (cf. (2)). Au paragraphe 3 nous démontrerons le théorème 1.2. Au paragraphe 4, nous rappellerons les propriétés des nombres $k$-hcs,



et nous achèverons de prouver le théorème 1.1. Dans les paragraphes suivants, nous donnerons successivement les démonstrations des théorèmes 1.3, 1.4, 1.5 et 1.6. L'idée directrice de ces démonstrations est simple: c'est le théorème 1.3. Mais il faut ensuite majorer ou minorer assez finement le nombre $k$-hcs donné par (17) et (16), et cela devient quelquefois technique: les calculs ont été conduits à l'aide du système de calcul formel MAPLE.

## 2. Lemmes sur la fonction gamma

**Lemme 2.1.** *Soit $k \geq 1$ et $u \geq 1$ deux nombres réels. On a*

$$\log\binom{k+u-1}{u} = \log\frac{\Gamma(k+u)}{\Gamma(k)\,\Gamma(u+1)} = u\left(\log\frac{ke}{u} + S(u,k)\right)$$

*avec*

$$\frac{-u^2}{2k^2} - \frac{1}{12u^2} - \frac{7}{12k} \leq S(u,k) + \frac{1}{2}\,\frac{\log u}{u} - \frac{u}{2k} + \frac{1}{2u}\log 2\pi \leq -\frac{u^2}{6k^2} + \frac{u^3}{3k^3} + \frac{1}{12ku}.$$

*Démonstration.* On utilise la relation $\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u)$ et la formule de Stirling sous la forme (cf. [1], p. 24)

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\,x^{x-1/2}e^{-x}e^{\mu(x)}, \qquad x > 0 \tag{18}$$

avec

$$0 < \mu(x) < 1/(12x).$$

Il vient

$$\log\binom{k+u-1}{u} = u\log\frac{k}{u} + (k+u)\log\left(1+\frac{u}{k}\right) - \frac{1}{2}\log(2\pi)$$
$$-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{u}{k}\right) - \frac{1}{2}\log u + \mu(k+u) - \mu(k) - \mu(u).$$

On développe alors

$$\log\left(1+\frac{u}{k}\right) = \frac{u}{k} - \frac{u^2}{2k^2} + \theta_1\,\frac{u^3}{3k^3}, \quad 0 < \theta_1 < 1$$

ce qui donne

$$(k+u)\log\left(1+\frac{u}{k}\right) = u\left(1 + \frac{u}{2k} - \frac{u^2}{2k^2} + \theta_1\frac{u^2}{3k^2} + \theta_1\frac{u^3}{3k^3}\right).$$

Pour les autres termes, on a

$$A = -\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{u}{k}\right) + \mu(k+u) - \mu(k) - \mu(u) \leq \mu(k+u) < \frac{1}{12(k+u)} < \frac{1}{12k}$$
$$A \geq -\frac{u}{2k} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{12u} \geq u\left(-\frac{1}{2k} - \frac{1}{12uk} - \frac{1}{12u^2}\right) \geq u\left(-\frac{1}{12u^2} - \frac{7}{12k}\right)$$

et le lemme s'ensuit.

**Lemme 2.2.** *Pour* $k \geq 100$, $u = ak^{1/2}$, $1{,}8 \leq a \leq 9{,}4$, *on a*

$$\log \frac{\Gamma(k+u)}{\Gamma(k)\Gamma(u+1)} > ak^{1/2} \log \frac{k^{1/2}e}{a} - \frac{1}{4} \log k$$

*Démonstration.* D'après le lemme précédent,

$$uS(u,k) \geq -\frac{1}{4}\log k - \frac{1}{2}\log a + \frac{a^2}{2} - \frac{\log 2\pi}{2} - \frac{a^3}{2k^{1/2}} - \frac{1}{12ak^{1/2}} - \frac{7a}{12k^{1/2}}$$

et l'on vérifie que, pour $k_0 = 100$

$$\frac{a^2}{2} \geq \frac{1}{2}\log a + \frac{\log 2\pi}{2} + \frac{a^3}{2k_0^{1/2}} + \frac{1}{12ak_0^{1/2}} + \frac{7a}{12k_0^{1/2}}.$$

**Lemme 2.3.** *Si* $k \geq 2$ *et si* $1 \leq u \leq \frac{11}{10}k^{1/2}$,

$$\log \frac{\Gamma(k+u)}{\Gamma(k)\Gamma(u+1)} \leq u \log \frac{ke}{u}.$$

*Démonstration.* On doit montrer que, sous les hypothèses, $S(u,k) \leq 0$. Par le lemme 2.1, on a

$$S(u,k) \leq -\frac{\log(2\pi)}{2u} + \frac{u}{2k} + \frac{u^3}{3k^3} + \frac{1}{12k}.$$

Le second membre est une fonction croissante de $u$, pour $u \geq 1$. En y remplaçant $u$ par $11\sqrt{k}/10$, on obtient un polynôme en $1/\sqrt{k}$ qui est négatif pour $k \geq 2$.

**Lemme 2.4.** *Soit* $x$ *et* $y$ *deux nombres réels vérifiant* $x \geq 2$ *et* $1 \leq y \leq x-1$. *On a*

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)} \leq \frac{x^x}{y^y(x-y)^{x-y}}.$$

*Démonstration.* Par la formule (18), il vient en notant que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\binom{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x^x}{y^y(x-y)^{x-y}} \sqrt{\frac{x}{y(x-y)}} \exp\left(\mu(x) - \mu(y) - \mu(x-y)\right).$$

On en déduit le lemme en remarquant que $\mu(x) \leq \frac{1}{12x} \leq \frac{1}{24}$, $\mu(y) > 0$, $\mu(x-y) > 0$, $\frac{x}{y(x-y)} \leq \frac{x}{x-1} \leq 2$ et $\frac{\exp(1/24)}{\sqrt{\pi}} = 0{,}588\ldots < 1$.



## 3. Démonstration du théorème 1.2

*Démonstration de* (i). Prenons $k \geq 2000$. Il existe un nombre entier $u$ qui s'écrit $u = ak^{1/2}$ avec $1{,}975 \leq a \leq 2$. D'après (12), (11), (2) et le lemme 2.2, on a pour $N = 2^u$

$$\begin{aligned}\lambda(k) \geq \Lambda(k,N) &= \log\left(\frac{\Gamma(k+u)}{\Gamma(u+1)\Gamma(k)}\right)\frac{\log(u\log 2)}{u\log k\log 2}\\ &\geq \left(\log\frac{ek^{1/2}}{a} - \frac{1}{4a}\frac{\log k}{k^{1/2}}\right)\frac{\log(ak^{1/2}\log 2)}{\log k\log 2}\end{aligned}$$

ce qui donne en développant

$$\begin{aligned}\lambda(k) \geq \frac{\log k}{\log(16)} + \frac{\log_2 2+1}{\log 4} - \frac{1}{4ak^{1/2}\log 2}\left(\frac{1}{2}\log k + \log_2 2 + \log a\right)\\ + \frac{(1-\log a)(\log_2 2+\log a)}{\log 2\log k}.\end{aligned}$$

En remplaçant suivant les cas $a$ par 1,975 ou 2 dans les deux derniers termes, on les minore par une fonction de $k$ dont l'étude des variations montre qu'elle est positive pour $k \geq 2000$, et cela complète la preuve de (i).

*Démonstration de* (ii). Pour $m > 0$, la fonction $k \mapsto \log\frac{k+m-1}{m}/\log k$ est croissante; par suite la fonction $k \mapsto \log d_k(n)/\log k$ l'est aussi d'après la formule (2). La fonction $k \mapsto \Lambda_r(k,n)$ est donc aussi croissante.

Soit $k' > k$, on peut écrire $\lambda_r(k') = \Lambda_r(k', M_{k',r}) \geq \Lambda_r(k', M_{k,r})$ et comme $\Lambda_r$ est une fonction croissante de $k$

$$\Lambda_r(k', M_{k,r}) \geq \Lambda_r(k, M_{k,r}) = \lambda_r(k)$$

ce qui prouve la croissance de $\lambda_r(k)$. Pour $r \geq 1$, on a pour tout $n$,

$$\Lambda_{r+1}(k,n) = (\Lambda_r(k,n) - 1)\frac{\log_2 n}{r}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\lambda_{r+1}(k) &\geq \Lambda_{r+1}(k, M_{k,r})\\ &= (\Lambda_r(k, M_{k,r}) - 1)\frac{\log_2 M_{k,r}}{r} = (\lambda_r(k) - 1)\frac{\log_2 M_{k,r}}{r}.\end{aligned}$$

Comme par (10), $M_{k,r} \geq 3$, on a $\lambda_{r+1}(k) \geq (\lambda_r(k) - 1)\frac{\log_2 3}{r}$ et que par (i), $\lambda_1(k)$ n'est pas bornée, on voit par récurrence que $\lambda_r(k)$ n'est bornée pour aucune valeur de $r$.

## 4. Nombres $k$-hautement composé supérieurs

**Définition 4.1.** Un entier $N$ est dit *$k$-hautement composé* ($k$-hc) pour $k > 1$ si et seulement si

$$n < N \Rightarrow d_k(n) < d_k(N).$$

Les nombres 2-hc ont été étudiés par Ramanujan (cf. [12], et aussi [8]) et leurs propriétés se généralisent sans difficulté aux nombres $k$-hc avec $k \neq 2$. Mais ce n'est pas notre propos ici; citons seulement

**Proposition 4.2.** *Si $N$ est $k$-hc alors*

$$N = 2^{I_2}3^{I_3}\cdots p^{I_p}$$

*avec $I_2 \geq I_3 \geq \ldots \geq I_p$.*

Les nombres $k$-hautement composé supérieur ($k$-hcs) ont été définis dans l'introduction. Nous avons

**Proposition 4.3.** *Si $N$ est $k$-hcs, il est aussi $k$-hc.*

*Démonstration.* Soit $n < N$. Il faut montrer $d_k(n) < d_k(N)$. Or, par (14), on a $d_k(n) < (n/N)^\varepsilon d_k(N) < d_k(N)$.

Il nous faut maintenant justifier la formule (17). Pour étudier le maximum de la fonction multiplicative $d_k(n)/n^\varepsilon$, il faut étudier pour chaque $p$ premier le maximum de la fonction $f$ définie par $f(m) = d_k(p^m)/p^{m\varepsilon}$. Par (2), on a $f(m)/f(m-1) = \dfrac{k+m-1}{mp^\varepsilon}$. La fonction homographique $t \mapsto \dfrac{t+k-1}{tp^\varepsilon}$ est décroissante pour $t > 0$, et elle vaut 1 pour $t = t_0 = \dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1}$. Si $t_0$ n'est pas entier, la suite $f(m)$ est maximale en un seul point $m_0 = \lfloor t_0 \rfloor$, et si $t_0$ est un entier, elle atteint son maximum en deux points $t_0 - 1$ et $t_0$.

Il sera commode d'écrire la formule (17) sous une autre forme. Définissons

$$\nu_i := \frac{\log\left(\frac{i+k-1}{i}\right)}{\log k} \text{ pour } i \geq 1 \tag{19}$$

On a $\nu_1 = 1$, et la suite $\nu_i$ est décroissante. Il vient alors

$$N_x = N_x^{(k)} = \prod_i \prod_{x^{\nu_{i+1}} < p \leq x^{\nu_i}} p^{\ell(i)}, \tag{20}$$

avec la convention qu'en général, $\ell(i) = i$; mais si $p = x^{\nu_i}$, alors $\ell(i)$ peut prendre deux valeurs, $i$ ou $i-1$.

**Proposition 4.4.** *Soit $P^-(n)$ le plus petit nombre premier ne divisant pas $n$. Pour $k$ fixé, on considère la suite $(n_i)_{i\geq 1}$ des nombres $k$-hcs rangés par ordre croissant. On a $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ et pour tout $i \geq 1$, $n_{i+1} \leq n_i P^-(n_i)$.*



*Démonstration.* Cette proposition a été donnée par Ramanujan (cf. [12], Section 36) lorsque $k = 2$. Pour $k$ fixé, désignons par $X_{p,m}$ la solution en $x$ de l'équation $\dfrac{k-1}{k^{\frac{\log p}{\log x}} - 1} = m$ où $p$ est premier et $m$ est un entier supérieur ou égal à 1. On a

$$X_{p,m} = \exp\left(\frac{\log p \log k}{\log\left(1 + \frac{k-1}{m}\right)}\right).$$

On ordonne les nombres $X_{p,m}$ en une suite croissante: $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$. On a $X^{(1)} = X_{2,1} = 2$, et $X^{(2)} = \min(X_{2,2}, X_{3,1})$. Par la formule (17), on voit que, pour $X^{(i)} < x < X^{(i+1)}$, il y a un et un seul nombre $N_x$ qui est aussi de la forme $N_{X^{(i)}}$ et $N_{X^{(i+1)}}$. S'il existe un unique couple $(p,m)$ tel que $X^{(i)} = X_{p,m}$, alors pour $x = X^{(i)}$, il y a deux nombres $N_x$: si $N'$ est le plus petit, l'autre est $pN'$. S'il existe deux couples $(p_1, m_1)$ et $(p_2, m_2)$ tels que $X^{(i)} = X_{p_1,m_1} = X_{p_2,m_2}$ (c'est ce qui se passe lorsque $k = 3$, $X^{(2)} = X_{2,2} = X_{3,1} = 3$) alors il y a 4 nombres définis par $N_x$: $N'$, $p_1N'$, $p_2N'$ et $p_1p_2N'$. S'il existe $s$ couples $(p_1, m_1)$, $(p_2, m_2)$, $\ldots$, $(p_s, m_s)$ avec $s \geq 3$ tels que $X^{(i)} = X_{p_1,m_1} = X_{p_2,m_2} = \cdots = X_{p_s,m_s}$ (nous avons vu dans l'introduction que cette situation est peu vraisemblable puisque, sous la conjecture de Schanuel, elle ne peut se produire) alors il y aura pour $x = X^{(i)}$, $2^s$ nombres définis par (17): $N'$, $p_1N'$, $\ldots$, $p_1p_2\cdots p_sN'$.

Les nombres $k$-hcs sont donc tous de la forme $N_{X^{(i)}}$ définis par (17) et $N_{X^{(i)}}$ et $N_{X^{(i+1)}}$ ont un élément en commun, le seul nombre $N_x$ défini par (17) pour $X^{(i)} < x < X^{(i+1)}$. La démonstration de la proposition s'en suit, par la description ci-dessus des nombres $N_{X^{(i)}}$ et en remarquant que $X_{p,m} \geq p$ et que par (17), $P^-(N_x) \geq x$.

*Démonstration du théorème* 1.1 (iii). Posons $\varepsilon = s$, définissons $x$ par (15) et écrivons $N = N_x^{(k)}$. Par (14), nous avons pour tout $n \geq 1$

$$\log d_k(n) \leq s\log n + \log d_k(N) - s\log N. \tag{21}$$

En utilisant (2) et la décomposition en facteurs premiers de $N$ donnée par (17), il vient avec $I_p = I_p(x)$

$$\log d_k(N) - s\log N = \sum_{p \leq k^{1/s}} \left(\log\binom{k-1+I_p}{I_p} - sI_p\log p\right).$$

L'application du lemme 2.4 donne

$$\log d_k(N) - s\log N \leq \sum_{p\leq k^{1/s}} y(I_p),$$

où l'on a posé $y(t) = (k-1+t)\log(k-1+t) - t\log t - (k-1)\log(k-1) - st\log p$. La dérivée

$$y'(t) = \log\left(\frac{k-1+t}{tp^s}\right) = \log\left(\frac{1}{p^s}\left(1 + \frac{k-1}{t}\right)\right)$$

est décroissante en $t$, et vaut 0 pour $t = t_0 = \dfrac{k-1}{p^s - 1}$. La fonction $y(t)$ est donc croissante sur l'intervalle $[I_p, t_0]$ et

$$\log d_k(N) - s \log N \leq \sum_{p \leq k^{1/s}} y\Big(\frac{k-1}{p^s-1}\Big) = (k-1) \sum_{p \leq k^{1/s}} \log \frac{1}{1-1/p^s},$$

ce qui avec (21) achève la démonstration du théorème 1.1.

## 5. Démonstration du théorème 1.3

**Lemme 5.1.** *Soit $n \geq 2$, $P = P^-(n)$ le plus petit nombre premier ne divisant pas $n$ et $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de $n$ comptés avec multiplicité. On pose*

$$G(n) = (1 + \Omega(n)) \frac{\log_2(nP)}{\log(nP)} - \Omega(n) \frac{\log_2 n}{\log n}.$$

*Alors, si $G(n) > 0$, on a pour tout $k > 1$ :*

$$\Lambda(k, n) < \Lambda(k, nP)$$

*où $\Lambda(k,n)$ est défini par* (11).

*Démonstration.* Posons

$$F(k) = \log k(\Lambda(k, nP) - \Lambda(k,n)),$$

$$A = \frac{\log_2(nP)}{\log(nP)} \quad \text{et} \quad B = \frac{\log_2 n}{\log n}.$$

Notons que, comme $nP \geq 6$, $A$ est strictement positif. Par (11) et par la multiplicativité de $d_k$, il vient

$$F(k) = A \log d_k(nP) - B \log d_k(n) = (A - B) \log d_k(n) + A \log k.$$

Si $A \geq B$, on a $F(k) > 0$ puisque, par (2), on a $d_k(n) \geq 1$.

Si $A < B$, on a par (4)

$$F(k) \geq (A - B)\Omega(n) \log k + A \log k = G(n) \log k,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

**Lemme 5.2.** *Soit $k > 1$. Le plus petit nombre $k$-hcs supérieur ou égal à* 1619 *est inférieur à* 18000.

*Démonstration.* Par la proposition 4.4, il existe des nombres $k$-hcs inférieurs ou égaux à 1618 par exemple 1 et 2. Soit $N'$ le plus grand d'entre eux. $N'$ n'est pas multiple de 11 ; sinon, par les propositions 4.3 et 4.2, $N'$ serait multiple de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310 > 1619$. Le plus petit nombre $k$-hcs supérieur ou égal à 1619 est le nombre $k$-hcs suivant $N'$. Appelons le $N''$. Par la proposition 4.3, il vient

$$N'' \leq P^-(N')N' \leq 11N' \leq 11 \times 1618 = 17998 < 18000.$$

**Lemme 5.3.** *Soit $N'$ un nombre $k$-hcs. Soit $N'' > N'$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq N'$ on ait*

$$\frac{d_k(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{d_k(N'')}{(N'')^\varepsilon}. \tag{22}$$

*Alors la relation* (22) *est vérifiée pour tout $n \geq 1$ et $N''$ est $k$-hcs.*

*Démonstration.* C'est le lemme 4 de [9]. La démonstration est simple et utilise uniquement la définition (14) des nombres $k$-hcs.

*Démonstration du théorème* 1.3. Montrons d'abord que $M_k \geq 26880$. A l'aide de l'ordinateur, on calcule pour $3 \leq n \leq 26879$ la quantité $G(n)$ définie dans le lemme 5.1. On trouve $G(n) > 0$ sauf pour $n \in E$ où

$$E = \{480, 768, 840, 960, \ldots, 25920, 26460\}$$

est un ensemble à 93 éléments.

Par (13), (12) et le lemme 5.1, il est clair que l'on doit avoir $G(M_k) \leq 0$. Il reste donc à prouver $M_k \notin E$. Pour chaque $n \in E$, on effectue avec MAPLE les calculs suivants

$$F(k) = \log k(\Lambda(k, 2nP^-(n)) - \Lambda(k,n)).$$

En raison de la multiplicativité de $d_k$, et par (11) et (2), $F(k)$ est une expression de la forme $\sum_{i=0}^{I} a_i \log(k+i) + b$, et sa dérivée vaut

$$F'(k) = \sum_{i=0}^{I} \frac{a_i}{k+i} = \frac{P_F(k)}{k(k+1)\ldots(k+I)}$$

où $P_F(k)$ est un polynôme de degré au plus égal à $I$. Pour chaque $n \in E$, on vérifie que $P_F$ a ses coefficients tous positifs. La dérivée $F'(k)$ est donc positive pour $k > 1$, et comme $d_k(1) = 1$, et que par (11), $F(1) = 0$ on a bien $F(k) > 0$ pour $k > 1$ et $n$ ne peut pas être égal à $M_k$.

Si l'on calcule les polynômes $P_F$ pour tous les $n$ entre 3 et 26879, on constate qu'ils sont tous à coefficients positifs sauf pour $n = 2310$ et $n = 4620$. En approfondissant cette méthode, il serait possible d'obtenir une meilleure minoration pour $M_k$ que 26880.

On pose ensuite

$$\varepsilon = \frac{\lambda(k) \log k(\log_2 M_k - 1)}{(\log_2 M_k)^2}. \tag{23}$$

On note que, comme $M_k \geq 26880$, on a $\log_2 M_k \geq 2{,}3$ et $\varepsilon$ est positif. Pour prouver que $M_k$ est $k$-hcs, on va appliquer le lemme 5.3 avec $N'$ le plus petit nombre $k$-hcs supérieur à 1619, $N'' = M_k$ et la valeur ci-dessus de $\varepsilon$. Par le lemme 5.2, $N'$ est inférieur à 18000, et comme $M_k \geq 26880$, on a bien $N' < N''$. On doit prouver que pour $n \geq N'$, la relation (22) est vérifiée, c'est-à-dire

$$\log d_k(n) - \varepsilon \log n \leq \log d_k(M_k) - \varepsilon \log M_k. \tag{24}$$

On écrit

$$\log d_k(n) - \varepsilon \log n$$
$$= \Big(\log d_k(n) - \frac{\lambda(k)\log k \log n}{\log\log n}\Big) + \Big(\frac{\lambda(k)\log k\log n}{\log\log n} - \varepsilon\log n\Big). \tag{25}$$

Par (11) et (12) la première parenthèse est négative ou nulle, et par (13) elle est nulle pour $n = M_k$. La seconde parenthèse vaut $\lambda(k)\log k\, y(t)$ avec $t = \log n$ et

$$y(t) = \frac{t}{\log t} - \Big(\frac{1}{\log_2 M_k} - \frac{1}{(\log_2 M_k)^2}\Big)t.$$

La dérivée

$$y'(t) = \Big(\frac{1}{\log t} - \frac{1}{\log_2 M_k}\Big)\Big(1 - \frac{1}{\log t} - \frac{1}{\log_2 M_k}\Big)$$

s'annule pour $t_1 = \log M_k$ et $t_2 = \exp\Big(\frac{\log_2 M_k}{\log_2 M_k - 1}\Big)$, et comme $\log_2 M_k > 2$, on a $1 < t_2 < e^2 < t_1$. L'étude des variations de la fonction $y$ montre que $y(t) \leq y(t_1) = \dfrac{\log M_k}{(\log_2 M_k)^2}$ pour tout $t \geq e^2$, et de (25) on déduit

$$\log d_k(n) - \varepsilon\log n \leq \log d_k(M_k) - \varepsilon \log M_k = \frac{\lambda(k)\log k \log M_k}{(\log_2 M_k)^2} \tag{26}$$

pour tout $n \geq e^{e^2}$ et donc pour tout $n \geq N'$ puisque $N' \geq 1619 > e^{e^2}$. Par le lemme 5.3, on conclut que $M_k$ est bien $k$-hcs, et la valeur de $x_k$ annoncée se déduit de (23) et de (15).

## 6. Démonstration du théorème 1.4

*Démonstration de* (i): *pour* $k \geq 2000$, *on a* $x_k \geq 3$.

Prenons $k \geq 2000$ et supposons $x_k < 3$. Par le théorème 1.3, on a $M_k = N_{x_k}^{(k)}$. Nous noterons $N = N_{x_k}^{(k)}$ pour simplifier. Par (17), on a $N = 2^I$ et d'après (16), $I \leq \dfrac{k-1}{k^{\log 2/\log x_k} - 1} \leq \dfrac{k-1}{k^{\log 2/\log 3} - 1}$. Notons que la fonction $k \mapsto k^{\log 2/\log 3 + 0{,}4} - k - k^{0{,}4} + 1$ est croissante pour $k \geq 2$ et s'annule en $k_0 = 25{,}084\ldots$. Donc, pour $k \geq 2000$, on a

$$I \leq \frac{k-1}{k^{\log 2/\log 3} - 1} < k^{0{,}4}. \tag{27}$$



La formule (2) et le lemme 2.3 donnent

$$\log d_k(N) = \log\binom{k+I-1}{I} \leq I \log\frac{ke}{I} = \frac{\log N}{\log 2}(\log k + 1 - \log_2 N + \log_2 2).$$

Par (13) et (11), il s'ensuit que

$$\lambda(k) = \Lambda(k,N) \leq \frac{\log_2 N}{\log 2}\Big(1 + \frac{1 - \log_2 N + \log_2 2}{\log k}\Big).$$

D'après le théorème 1.2, il vient

$$\log_2 N\Big(1 + \frac{1 - \log_2 N + \log_2 2}{\log k}\Big) \geq \frac{\log k}{4} + \frac{1 + \log_2 2}{2}. \tag{28}$$

Posons $\log_2(N) = t\log k$ ; (28) devient

$$t\log k\Big(1 - t + \frac{1 + \log_2 2}{\log k}\Big) - \frac{\log k}{4} - \frac{1 + \log_2 2}{2} \geq 0.$$

Or, le trinôme en $t$ ci-dessus a comme racine $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 + \log_2 2}{2\log k}$. Donc, pour qu'il soit positif, il faut $t \geq 1/2$, c'est-à-dire $\log N \geq \sqrt{k}$, soit encore $I \geq \dfrac{\sqrt{k}}{\log 2} > \sqrt{k}$ ce qui contredit (27).

*Démonstration de* (ii): *pour* $k \geq 2{,}5 \cdot 10^6$, *on a* $x_k > 4$.

Posons $k_0 = 2{,}5 \cdot 10^6$. Supposons que l'on ait $3 \leq x_k \leq 4$ ; alors d'après le théorème 1.3 et (17), on aurait $M_k = N_{x_k}^{(k)} = 2^{I_2(x_k)}3^{I_3(x_k)}$. Nous écrirons pour simplifier $N$, $x$, $I$, $J$ au lieu de $N_{x_k}^{(k)}$, $x_k$, $I_2(x_k)$, et $I_3(x_k)$ respectivement de telle sorte que $N = 2^I 3^J$. Le théorème 1.3 donne alors

$$\frac{\log x}{\log k} = \frac{\log N}{\log d_k(N)}\,\frac{\log_2 N}{\log_2 N - 1}. \tag{29}$$

Minorons $I$ et $\log I$ : on a d'après (16)

$$I \geq \frac{k-1}{k^{\log 2/\log x} - 1} - 1 \geq \frac{k}{k^{\log 2/\log x}} - 1$$

car $a \geq b > 1 \Longrightarrow \dfrac{a-1}{b-1} \geq \dfrac{a}{b}$. Il s'ensuit que

$$I \geq k^{1 - \log 2/\log x}\Big(1 - \frac{\eta}{\log k}\Big)$$
$$\text{avec } \eta = 0{,}06412 \geq \frac{\log k_0}{k_0^{1-\log 2/\log 3}}, \tag{30}$$

$$\log I \geq (1 - \log 2/\log x)\log k - \frac{\eta'}{\log k}$$
$$\text{avec } \eta' = 0{,}06426 \geq -\log\Big(1 - \frac{\eta}{\log k_0}\Big)\log k_0. \tag{31}$$

On peut déduire de (30)

$$I \geq c_0 k^{1-\log 2/\log x} \text{ avec } c_0 = 0{,}995 < 1 - \eta/\log k_0. \tag{32}$$

Notons que de (32), on déduit

$$I \geq 0{,}995\, k_0^{1-\log 2/\log 3} \geq 228. \tag{33}$$

Majorons $J$ : on a d'après (16), pour $k \geq k_0$

$$J \leq \frac{k}{k^{\log 3/\log x} - 1} = k^{1-\log 3/\log x}\left(1 + \frac{1}{k^{\log 3/\log x} - 1}\right) \leq c_1 k^{1-\log 3/\log x} \tag{34}$$

avec $c_1 = 1 + \dfrac{1}{k_0^{\log 3/\log 4} - 1} \leq 1 + 10^{-5}$. Il vient ensuite

$$\log N \geq I \log 2, \qquad \log_2 N \geq \log I + \log_2 2. \tag{35}$$

On a par (16)

$$J \leq I \leq \frac{k-1}{k^{\log 2/\log x} - 1} \leq \frac{k-1}{\sqrt{k} - 1} = 1 + \sqrt{k} \leq \frac{11}{10}\sqrt{k}$$

pour $k \geq 100$, et par (2) et le lemme 2.3, on peut écrire

$$\log d_k(N) \leq I \log \frac{ke}{I} + J \log \frac{ke}{J}$$

soit

$$\log d_k(N) \leq I\left(\log \frac{ke}{I} + \frac{\rho}{\log k}\right) \tag{36}$$

où $\rho = \dfrac{J}{I} \log k \log\left(\dfrac{ke}{J}\right)$ est majoré plus loin.

En observant que $\log N \dfrac{\log_2 N}{\log_2 N - 1}$ est une fonction croissante de $N$ pour $\log_2 N \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (soit $\log N \geq 5{,}05$ ce qui est vérifié par (33) et (35)), la formule (29) donne avec (35) et (36)

$$\frac{\log x}{\log k} \geq \log 2\left(1 + \frac{1}{\log I + \log_2 2 - 1}\right)\frac{1}{\log \frac{ke}{I} + \frac{\rho}{\log k}}. \tag{37}$$

Majorons $\rho$ : la fonction $J \mapsto J \log \dfrac{ke}{J}$ est croissante pour $J \leq k$ (ce qui est assuré, car pour $k \geq k_0$, on a par (34) $J \leq c_1 k_0^{-\log 3/\log 4} k < k$). On a donc par (32) et (34)

$$\rho \leq \frac{c_1}{c_0} k^{-\log(3/2)/\log x} \log k\left(1 + \frac{\log 3}{\log x}\log k\right).$$



Or le membre de droite est une fonction de $k$ et de $x$, qui, pour $x$ fixé $> 1$ est décroissante en $k$, pour $k > 3{,}6 \log x$. Donc, pour $3 \leq x \leq 4$ et $k \geq k_0$, on a

$$\rho \leq \frac{c_1}{c_0} k_0^{-\log(3/2)/\log x} \log k_0\left(1 + \frac{\log 3}{\log x}\log k_0\right).$$

Maintenant, le membre de droite est croissant en $x$ pour $3 \leq x \leq 4$. On a donc

$$\rho \leq \frac{c_1}{c_0} k_0^{-\log 3/2/\log 4} \log k_0\left(\frac{\log 3}{\log 4}\log k_0 + 1\right) \leq 2{,}5241.$$

En posant $\rho_0 = 2{,}5241$ (37) devient donc :

$$\frac{\log x}{\log k} \geq \log 2\left(1 + \frac{1}{\log I + \log_2 2 - 1}\right)\frac{1}{\log \frac{ke}{I} + \frac{\rho_0}{\log k}}. \tag{38}$$

La fonction $t \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{t-a}\right)\left(\dfrac{1}{b-t}\right) = \dfrac{t-a+1}{(t-a)(b-t)}$ est croissante en $t$ pour $t \geq t_0 = a - 2 + \sqrt{b+4-3a}$. En posant $a = 1 - \log_2 2$, $b = 1 + \log k + \dfrac{\rho_0}{\log k}$, on obtient $t_0 \leq \sqrt{\log k}$. Un calcul simple montre qu'il résulte de (31) que $t = \log I \geq (1 - \log 2/\log 3)\log k - \dfrac{\eta'}{\log k_0} > \sqrt{\log k}$ pour $k \geq k_0$. Donc le second membre de (38) est une fonction croissante de $\log I$, et (31) et (38) donnent

$$\frac{\log x}{\log k} \geq \log 2\left(1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\log 2}{\log x}\right)\log k + \log_2 2 - 1 - \frac{\eta'}{\log k}}\right) \times \frac{1}{\frac{\log k \log 2}{\log x} + 1 + \frac{\rho_0 + \eta'}{\log k}}.$$

On pose $X = \log x$, $K = \log k$, $L = \log_2 2$ et l'on multiplie les deux membres par $\dfrac{K}{X}\log 2 + 1 + \dfrac{\rho_0 + \eta'}{K}$. Il vient en développant

$$\frac{X}{K}\left(1 + \frac{\rho_0 + \eta'}{K}\right) \geq \frac{\log 2}{\left(1 - \frac{\log 2}{X}\right)K + L - 1 - \frac{\eta'}{K}} \geq \frac{\log 2}{\frac{K}{2} + L - 1}$$

(car $X = \log x \leq \log 4$) et encore

$$X \geq \frac{2\log 2}{\left(1 + \frac{2(L-1)}{K}\right)\left(1 + \frac{\rho_0 + \eta'}{K}\right)}. \tag{39}$$

Mais le dénominateur est inférieur à 1 (car $|2(L-1)| > \rho_0 + \eta'$) et donc on obtient $X = \log x > \log 4$ ce qui est contraire à l'hypothèse $x \leq 4$.

*Démonstration de* (iii) : *pour $k \geq 400000$, on a $x_k < 5$.*

On suppose $k \geq k_0 := 400000$. Comme dans les preuves de (i) et (ii), on utilise le théorème 1.3. On a $\lambda(k) = \Lambda(k, M_k)$ et $M_k = N_{x_k}^{(k)}$ qu'on notera $N$. On notera $x$ au lieu de $x_k$. On a par les théorèmes 1.2 et 1.3

$$\frac{\log k}{\log 16} + 0{,}4569 < \lambda(k) = \frac{1}{\log x}\left(\log_2 N + 1 + \frac{1}{\log_2 N - 1}\right) \tag{40}$$

et par (17)

$$N = \prod_{p \le x} p^{I_p} \le \prod_{p \le x} p^{\left(\frac{k-1}{k^{\log p/\log x}-1}\right)}.$$

Cette fois ci, il nous faut majorer $N$, et en reportant dans (40), en déduire une majoration pour $x$.

Nous procéderons en deux temps : d'abord, nous montrons la majoration grossière $x = x_k \le 18$. Dans les calculs qui vont suivre, nous supposerons que $\xi_0 \le x < \xi_1$. Les variables $\xi_o$ et $\xi_1$ sont initialisées à $\xi_0 = 16$ et $\xi_1 = +\infty$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{t}$ étant croissante pour $t \ge 0$, on a pour $x < \xi_1$ et $k \ge k_0$

$$\frac{k^{\log p/\log x} - 1}{\log p \, \log k / \log x} \ge \frac{k_0^{\log p/\log \xi_1} - 1}{\log p \, \log k_0 / \log \xi_1}.$$

D'après (16), on a $I_p \le \dfrac{k-1}{k^{\log p/\log x} - 1} \le \dfrac{(k-1)\log x}{a_p(\xi_1)\log k \, \log p}$ avec

$$a_p(x) = \frac{k_0^{\log p/\log x} - 1}{\log k_0 \log p} \log x.$$

Notons que $a_p(\infty) = 1$. Avec les notations de (19), écrivons $N \le \prod_{p \le x} p \prod_{p \le x^{\nu_2}} p^{I_p - 1}$ avec $\nu_2 = \log((k+1)/2)/\log k$.

En utilisant la majoration de la fonction de Chebyshev (cf. [16]) valable pour tout $t \ge 0$

$$\theta(t) := \sum_{p \text{ premier} \le t} \log p < \alpha t \text{ avec } \alpha = 1{,}000081$$

et la décroissance en $p$ des exposants $I_p(x)$ donnés par (16), il vient

$$\begin{aligned} \log N &\le \alpha x + (I_2 - 1)\alpha x^{\nu_2} \le \alpha x(1 + I_2 x^{\nu_2 - 1}) \\ &\le \alpha x \left(1 + \frac{(k-1)\log x}{a_2(\xi_1)\log k \log 2} \, \frac{1}{x^{1-\nu_2}}\right). \end{aligned}$$

Comme pour tout $t > 0$ et $u > 0$, $\dfrac{\log t}{t^u} < \dfrac{1}{eu}$, on a

$$\log N \le \alpha x \left(1 + \frac{(k-1)}{ea_2(\xi_1)\log k \log 2} \, \frac{1}{1 - (\log(k+1)/2)/\log k}\right).$$

Comme

$$\log \frac{k+1}{2} = \log k + \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \log 2 \le \log k + \frac{1}{k} - \log 2,$$

il s'ensuit que

$$\log N \le \alpha x k \left(\frac{1}{k} + \frac{k-1}{ea_2(\xi_1)\log 2(k\log 2 - 1)}\right).$$



Compte tenu de la décroissance en $k$ de l'expression dans la parenthèse, il vient

$$\log N \le \gamma_0(\xi_1) k x \tag{41}$$

avec

$$\gamma_0(\xi_1) = \alpha \left(\frac{1}{k_0} + \frac{k_0 - 1}{ea_2(\xi_1)\log 2(k_0 \log 2 - 1)}\right). \tag{42}$$

Comme $N = M_k$ et que par le théorème 1.3, on a $M_k \ge 26880$, il s'ensuit que $\log_2 N > 2$. La fonction $t \mapsto t + \dfrac{1}{t-1}$ est croissante pour $t > 2$ ; il vient donc d'après (41) et (40)

$$\frac{\log k}{\log 16} + 0{,}4569 \le \frac{1}{\log x}\left(\log x + \log k + \log \gamma_0(\xi_1) + 1 + \frac{1}{\log(\gamma_0(\xi_1)kx) - 1}\right).$$

En supposant $x \ge \xi_0 := 16$, il vient

$$\log x \le \frac{\log k + \log \gamma_0(\xi_1) + 1}{\frac{\log k}{\log 16} - 0{,}5431} + \frac{\frac{1}{\log(16\gamma_0(\xi_1)k) - 1}}{\frac{\log k}{\log 16} - 0{,}5431}.$$

Le membre de droite ci-dessus est la somme d'une fonction homographique de $\log k$ et d'un terme décroissant en $k$. La fonction homographique est décroissante en $k$ pour $\gamma_0(\xi_1) > \exp(-0{,}5431 \log 16 - 1) = 0{,}0816\ldots$. Sous cette condition, on peut écrire pour tout $k \ge k_0$

$$\log x_k = \log x \le \frac{\log k_0 + \log \gamma_0(\xi_1) + 1 + \frac{1}{\log(16\gamma_0(\xi_1)k_0) - 1}}{\frac{\log k_0}{\log 16} - 0{,}5431}. \tag{43}$$

On utilise trois fois cette formule, avec successivement
$\xi_1 = \infty$, $a_2 = 1$, $\gamma_0(\xi_1) = 0{,}77$ alors $x \le 28{,}06$,
$\xi_1 = 28{,}06$, $a_2 = 5{,}07$, $\gamma_0(\xi_1) = 0{,}152$ alors $x \le 18{,}98$,
$\xi_1 = 18{,}98$, $a_2 = 6{,}53$, $\gamma_0(\xi_1) = 0{,}118$ alors $x \le 17{,}84$.

On peut donc supposer maintenant que $\xi_0 \le x \le \xi_1$ avec $\xi_0 = 4$ et $\xi_1 = 18$. Nous allons utiliser le fait que $x$ est borné pour mieux majorer les $I_p$. Nous avons par (16)

$$I_p(x) \le \frac{k}{k^{\frac{\log p}{\log x}} - 1} = k^{1 - \frac{\log p}{\log x}}\left(1 + \frac{1}{k^{\frac{\log p}{\log x}} - 1}\right) \le c_0(\xi_1) k^{1 - \frac{\log p}{\log x}} \tag{44}$$

avec

$$c_0(x) = 1 + \frac{1}{k_0^{\log 2/\log x} - 1}.$$

Il s'ensuit que, par (17)

$$\log N \le c_0(\xi_1) \sum_{2\le p\le x} k^{1-\frac{\log p}{\log x}} \log p$$
$$= c_0(\xi_1) k^{1-\frac{\log 2}{\log x}} \Big( \log 2 + \sum_{3\le p\le x} k^{-\frac{\log(p/2)}{\log x}} \log p \Big).$$

On pose $a(x) = \log 2 + \sum_{3\le p\le x} k_0^{-\frac{\log(p/2)}{\log x}} \log p \le a(\xi_1)$, $b := b(x) = \log(c_0(x)a(x))$ et

$$T := \frac{1}{2} - \frac{\log 2}{\log x} \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{\log x} = \frac{1/2 - T}{\log 2}. \tag{45}$$

Nous obtenons ainsi une meilleure majoration que celle de la formule (41)

$$\log N \le c_0(\xi_1) a(\xi_1) k^{1-\log 2/\log x} \tag{46}$$

dont on déduit

$$\log_2 N \le (1 - \log 2/\log x)\log k + b(\xi_1) = (\frac{1}{2} + T)\log k + b(\xi_1). \tag{47}$$

En procédant comme précédemment, avec les formules (40) et (47) il vient

$$\frac{\log k}{4} + 0{,}316$$
$$\le \Big(\frac{1}{2} - T\Big)\left(\Big(\frac{1}{2} + T\Big)\log k + 1 + b(\xi_1) + \frac{1}{(\frac{1}{2}+T)\log k - 1 + b(\xi_1)}\right),$$

soit

$$T^2 \log k + T(1 + b(\xi_1)) - \frac{1}{2} b(\xi_1) - 0{,}184 + \frac{2T-1}{(1+2T)\log k - 2 + 2b(\xi_1)} \le 0, \tag{48}$$

On pose $K = \log k$. On a $K \ge \log 400000 \ge 12$. Comme $4 \le x \le 18$, par (45), on a $0 \le T \le 1/2$. La solution de l'inéquation (48) est donnée par le lemme :

**Lemme 6.1.** *Soit $b$ un paramètre réel, $b \ge -0{,}368$. On pose*

$$f(T,K) = T^2 K + T(1+b) - \frac{b}{2} - 0{,}184 + \frac{2T-1}{(1+2T)K - 2 + 2b}.$$

*Pour chaque $K$ fixé, $K \ge 12$, l'équation $f(T,K) = 0$ a une et une seule solution $T_0 = T_0(K)$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$ et $T_0$ est une fonction décroissante de $K$ pour $K \ge 12$.*

*Démonstration du lemme.* Pour $K \ge 12$, on a

$$f(0,K) = -\frac{b}{2} - 0{,}184 - \frac{1}{K - 2 + 2b} < 0$$

et

$$f\Big(\frac{1}{2}, K\Big) = \frac{K}{4} + 0{,}316 > 0.$$



De plus

$$\frac{\partial f}{\partial T}(T,K) = 2KT + 1 + b + \frac{4(K+b-1)}{((1+2T)K - 2 + 2b)^2} > 0$$

pour $K \ge 12$ et $0 \le T \le 1/2$. Ceci prouve l'existence et l'unicité de $T_0(K)$. Sa décroissance résulte du théorème des fonctions implicites puisque

$$\frac{\partial f}{\partial K}(T,K) = T^2 + \frac{1 - 4T^2}{((1+2T)K - 2 + 2b)^2} > 0$$

pour $0 \le T \le 1/2$.

Trois passages par la formule (48) conduisent au résultat :

| $\xi_1$ | $a \le$ | $c_0 \le$ | $b \le$ | $T_0(k_0) \le$ | $x_k \le$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 0,91 | 1,048 | -0,04 | 0,1 | 5,66 |
| 5,66 | 0,75 | 1,006 | -0,28 | 0,07 | 5,02 |
| 5,02 | 0,74 | 1,004 | -0,29 | 0,069 | 4,994 |

*Démonstration de* (iv) : *pour $k \ge 400000$, on a $x_k \le 4 + \dfrac{13{,}1}{\log k}$.*

Nous allons en fait démontrer

$$\frac{1}{2} - \frac{\log 2}{\log x_k} \le \frac{0{,}9}{\log k}. \tag{49}$$

Le théorème s'en déduira, car on aura

$$x = x_k \le \exp\left(\frac{\log 4}{1 - 1{,}8/\log k}\right)$$

et la convexité de la fonction $y(t) = \exp\left(\dfrac{\log 4}{1-t}\right)$ pour $0 \le t = 1{,}8/\log k \le t_0 = 1{,}8/\log k_0 < 1$ implique

$$y(t) - y(0) \le \frac{t}{t_0}(y(t_0) - y(0)),$$

soit pour $k \ge k_0 = 400000$, $x \le 4 + 1{,}8\dfrac{y(t_0)-4}{t_0}/\log k \le 4 + \dfrac{13{,}1}{\log k}$.

Nous conservons les notations précédentes. Nous savons maintenant par (17) que $N = 2^I 3^J$ puisque $x := x_k < 5$. On va majorer plus finement $I = I_2(x)$ et $J = I_3(x)$. Par (16), il vient

$$I < \frac{k}{k^{\log 2/\log x} - 1} = k^{1-\log 2/\log x}\left(1 + \frac{1}{k^{\log 2/\log x} - 1}\right),$$

soit, en utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{t}$

$$I \le k^{1-\log 2/\log x}\left(1 + \frac{c_1(k_0)}{\log k}\right) \text{ avec } c_1(k) = \log k \frac{1}{k^{\log 2/\log 5} - 1}$$

et $c_1(k_0) \leq 0{,}051$. De même

$$J \leq k^{1-\log 3/\log x}\left(1+\frac{c_1(k_0)}{\log k}\right).$$

On a alors

$$\log N = I\log 2 + J\log 3 \leq a(k_0)k^{1-\log 2/\log x}\left(1+\frac{c_1(k_0)}{\log k}\right) \tag{50}$$

avec $a(k) := \log 2 + k^{-\log(3/2)/\log 5}\log 3$. Il suit

$$\log a(k) \leq \log\log 2 + \left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)k^{-\log(3/2)/\log 5}.$$

La fonction $t \mapsto e^t/t$ est croissante dans $[1,+\infty[$, donc pour $t \geq t_0 \geq 1$, $e^t \geq \frac{e^{t_0}}{t_0}t$.

Avec $t = \frac{\log 3/2}{\log 5}\log k$ et $t_0 = \frac{\log 3/2}{\log 5}\log k_0$, on obtient

$$\log a(k) \leq \log\log 2 + \frac{c_2(k_0)}{\log k} \quad \text{avec } c_2(k) = \left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)\frac{\log k}{k^{\log(3/2)/\log 5}}.$$

et $c_2(k_0) \leq 0{,}793$. De (50), on déduit donc

$$\log_2 N \leq (1-\log 2/\log x)\log k + \log_2 2 + \frac{c_3(k_0)}{\log k} \tag{51}$$

avec $c_3(k) = c_1(k) + c_2(k)$ et $c_3(k_0) \leq 0{,}85$. Il découle des théorèmes 1.2 et 1.3

$$(\log 2)\lambda(k) = \frac{\log 2}{\log x}\left(\log_2 N + 1 + \frac{1}{\log_2 N - 1}\right) \geq \frac{\log k}{4} + \frac{\log_2 2 + 1}{2}. \tag{52}$$

En posant $T := \frac{1}{2} - \frac{\log 2}{\log x}$, $K := \log k$, $u := \frac{\log_2 2 + 1}{2} = 0{,}316\ldots$, $v := 2 - 2\log_2 2 = 2{,}367\ldots$, $c := 0{,}85 > c_3(k_0)$, il vient

$$T^2K + T\left(2u + \frac{c}{K}\right) - \frac{c}{2K} - \frac{1-2T}{(2T+1)K - v + \frac{2c}{K}} \leq 0.$$

Le dénominateur de la dernière fraction est positif pour $k \geq k_0$. Posons $T = z/K$, multiplions par $2K^3$ et développons. Nous obtenons avec MAPLE:

$$\begin{aligned}
&4z^3K^2 + \left(2K^3 + (-2v+8u)K^2 + 8cK\right)z^2\\
&\quad + \left(4uK^3 + (-4uv+4)K^2 + (-2cv+8uc)K + 4c^2\right)z\\
&\quad + (-2-c)K^3 + cK^2v - 2c^2K \leq 0.
\end{aligned}$$

Notons le premier membre de l'inéquation précédente $f(z;K)$; en remplaçant $u$, $v$ et $c$ par leur valeur numérique, on obtient

$$\begin{aligned}
f(z;K) = {}& 4z^3K^2 + \left(2K^3 - 2{,}932K^2 + 6{,}80K\right)z^2\\
&+ \left(1{,}267K^3 + 0{,}537K^2 - 2{,}492K + 2{,}890\right)z\\
&- 2{,}85K^3 + 2{,}323K^2 - 1{,}445K.
\end{aligned}$$



On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} = {}& 12z^2K^2 + 2\left(2K^3 - 2{,}932K^2 + 6{,}80K\right)z\\
&+ 1{,}267K^3 + 0{,}537K^2 - 2{,}492K + 2{,}890
\end{aligned}$$

et l'on vérifie facilement que $f(z;K)$ est une fonction croissante de $z$ pour $z > 0$ et $K = \log k \geq 12$. Par suite si $f(z_0;K) \geq 0$, il vient $z \leq z_0$.

On a $f(0{,}9;K) = -0{,}090K^3 + 3{,}347K^2 + 1{,}820K + 2{,}601$ et $f(0{,}9;K) \geq 0$ si $K < K_0 := 37{,}74$, la racine réelle du membre de droite de l'équation précédente.

Par suite si $\log k \leq 37$, $z = T/K \leq 0{,}9$ et cela prouve (49) pour $k_0 \leq k \leq 10^{16} \leq \exp(37)$.

Supposons maintenant $k \geq k_1 = 800000$. On recommence les mêmes calculs en remplaçant $k_0$ par $k_1$. On a $c_1(k_1) \leq 0{,}04$, $c_2(k_1) \leq 0{,}702$ et dans $f(z;K)$, on prend $c = 0{,}75 > c_3(k_1)$. La dérivée en $z$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 12z^2K^2 + 2\left(2K^3 - 2{,}932K^2 + 6{,}0K\right)z + 1{,}267K^3 + 0{,}537K^2 - 2{,}199K + 2{,}250$$

est positive pour $K \geq 13$, et l'on a

$$f(0{,}9;K) = 0{,}010K^3 + 3{,}074K^2 + 1{,}756K + 2{,}025$$

qui est toujours positif pour $K > 0$. Cela achève la preuve de (49), et aussi celle du théorème 1.4.

## 7. Démonstration du théorème 1.5

D'après le théorème 1.4 (ii) et (iii), on sait que, pour $k$ assez grand, $M_k = N$ s'écrit $2^I3^J$ et que de plus, par (ii) et (iv), $x = x_k = 4 + O\left(\frac{1}{\log k}\right)$. Il s'ensuit que

$$k^{\log 2/\log x} \asymp k^{1/2}$$

(où $f(t) \asymp g(t)$ signifie $f = O(g)$ et $g = O(f)$). Par (16), il vient

$$I = I_2(x) = \frac{k-1}{k^{\frac{\log 2}{\log x}} - 1} + O(1) = k^{1-\frac{\log 2}{\log x}}(1 + O(k^{-1/2})) \asymp \sqrt{(k)}$$

et

$$J = I_3(x) = \frac{k-1}{k^{\frac{\log 3}{\log x}} - 1} + O(1) = O(Ik^{-\beta}).$$

Il suit

$$\log N = I\log 2 + J\log 3 = I\log 2(1 + O(k^{-\beta})), \tag{53}$$

$$\log I = \left(1 - \frac{\log 2}{\log x}\right)\log k + O(k^{-1/2}) \tag{54}$$

et

$$\log_2 N = \log I + \log_2 2 + O(k^{-\beta}) = \left(1 - \frac{\log 2}{\log x}\right)\log k + \log_2 2 + O(k^{-1/2}). \quad (55)$$

On a aussi par (2) et le lemme 2.1

$$\log d_k(2^I) = I\left(\log\frac{ke}{I} + O\left(\frac{\log k}{k^{1/2}}\right)\right),$$
$$\log d_k(3^J) = O(J\log k) = O(I(\log k)k^{-\beta}),$$

d'où

$$\log d_k(N) = I\log\frac{ke}{I}(1 + O(k^{-\beta})). \quad (56)$$

Considérons alors la relation fournie par (13), (11) et le théorème 1.3

$$\lambda(k) = \frac{\log d_k(N)\log_2 N}{\log k \log N} = \frac{1}{\log x}\,\frac{(\log_2 N)^2}{\log_2 N - 1}; \quad (57)$$

par (56) et (53), elle devient

$$\log x(\log k + 1 - \log I)(\log_2 N - 1)(1 + O(k^{-\beta})) = \log k \log 2 \log_2 N.$$

En utilisant ensuite (54) et (55) on a successivement :

$$(\log x + \log 2\log k)(\log_2 N - 1)(1 + O(k^{-\beta})) = \log k\log 2\log_2 N,$$
$$\log x(\log_2 N - 1) - \log 2\log k + O((\log k)^2 k^{-\beta}) = 0, \quad (58)$$
$$\log x\left(\left(1 - \frac{\log 2}{\log x}\right)\log k + \log_2 2 - 1\right) - \log 2\log k + O((\log k)^2 k^{-\beta}) = 0,$$
$$\log x\left(1 + \frac{\log_2 2 - 1}{\log k}\right) = \log 4 + O((\log k)k^{-\beta}),$$

ce qui démontre (i). Le développement asymptotique (ii) se déduit de (i) par les règles usuelles de calcul sur les séries formelles.

Il reste à démontrer (iii). Pour calculer $\lambda(k)$, utilisons

$$\lambda(k) = \frac{1}{\log x}\left(\log_2 N + 1 + \frac{1}{\log_2 N - 1}\right), \quad (59)$$

qui découle de (57). Par (i), (54), (55) et (58) on a successivement

$$\frac{\log 2}{\log x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log_2 2 - 1}{\log k}\right) + O\left(\frac{\log k}{k^\beta}\right),$$
$$\log I = \frac{\log k}{2} + \frac{1 - \log_2 2}{2} + O\left(\frac{(\log k)^2}{k^\beta}\right),$$
$$\log_2 N = \frac{\log k}{2} + \frac{1 + \log_2 2}{2} + O\left(\frac{(\log k)^2}{k^\beta}\right),$$
$$\frac{1}{\log x(\log_2 N - 1)} = \frac{1}{\log 2\log k} + O\left(\frac{1}{k^\beta}\right)$$



et en substituant dans (59), on obtient

$$\lambda(k) = \frac{1}{2\log 2}\left(1 + \frac{\log_2 2 - 1}{\log k} + O\left(\frac{\log k}{k^\beta}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\log k}{2} + \frac{1 + \log_2 2}{2} + 1 + O\left(\frac{(\log k)^2}{k^\beta}\right)\right) + \frac{1}{\log 2\log k} + O\left(\frac{1}{k^\beta}\right)$$

qui fournit après développement le résultat annoncé.

## 8. Démonstration du théorème 1.6 : décroissance de la suite $\lambda(k)/\log k$

**Lemme 8.1.** *Pour $k \ge k_0 = 400000$ et pour $u$ vérifiant $1 \le u \le 2{,}5\sqrt{k}$, on a*

$$\log d_k(p^u) = \log\binom{k+u-1}{u} \ge \frac{u\log k}{2}\left(1 + \frac{2}{k}\right).$$

*Démonstration.* Le lemme 2.1 donne

$$\log d_k(p^u) \ge u\left(\log\frac{ke}{u} + S(u,k)\right)$$

et l'on sait minorer $S(u,k)$ :

- Pour $50 \le u \le 2{,}5\,k^{1/2}$ on a

$$S(u,k) \ge \frac{u}{2k} - \frac{1}{2u}\log(2\pi) - \frac{\log u}{2u} - \frac{1}{12u^2} - \frac{7}{12k} - \frac{6{,}25}{2k}$$
$$\ge \frac{1}{k}\left(25 - \frac{7}{12} - \frac{6{,}25}{2}\right) - \frac{\log(2\pi)}{100} - \frac{\log 50}{100} - \frac{1}{12\times 50^2}$$
$$\ge \frac{511}{24k_0} - 0{,}058 \ge -0{,}06$$

pour $k \ge k_0$. Il vient par le lemme 2.1

$$\log d_k(p^u) \ge u(\log k + 1 - \frac{1}{2}\log k - \log 2{,}5 - 0{,}06)$$
$$\ge u\left(\frac{\log k}{2} + 0{,}023\right) \ge \frac{u\log k}{2}\left(1 + \frac{0{,}046}{\log k}\right)$$

et $0{,}046/\log k \ge 2/k$ pour $k \ge k_0$.

- Pour $u \le 50$, on a

$$S(u,k) \ge \frac{u}{2k} - \frac{\log 2\pi}{2u} - \frac{\log u}{2u} - \frac{u^2}{2k^2} - \frac{1}{12u^2} - \frac{7}{12k}$$
$$\ge \frac{1}{2k} - \frac{\log 2\pi}{2} - \frac{1}{2e} - \frac{2500}{2k^2} - \frac{1}{12} - \frac{7}{12k}$$
$$\ge -\frac{1}{12k_0} - \frac{2500}{k_0^2} - 1{,}187 \ge -1{,}2$$

et on en déduit

$$
\begin{aligned}
\log d_k(p^u) &\geq u(\log k + 1 - \log 50 - 1{,}2)\\
&\geq u(\log k - 4{,}12)\\
&= \frac{u \log k}{2}\left(1+\frac{2}{k}\right) + u\left\{\log k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right) - 4{,}12\right\}.
\end{aligned}
$$

La quantité entre accolades est positive pour $k \geq k_0$ et cela complète la preuve du lemme 8.1.

**Lemme 8.2.** *Soit $t$ un nombre réel $\geq 5$. Alors on a l'inégalité*

$$1 - \left(\frac{\log(t-1)}{\log t}\right)^2 \geq \frac{2}{t \log t}.$$

*Démonstration.* Par le développement en série du logarithme, on a

$$\log(1 - \frac{1}{t}) \leq -\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{t}\left(1 + \frac{1}{2t}\right)$$

et l'on en déduit

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\log(t-1)}{\log t}\right)^2 &= \left(1 + \frac{\log\left(1-\frac{1}{t}\right)}{\log t}\right)^2 \leq \left(1 - \frac{\frac{1}{t}\left(1+\frac{1}{2t}\right)}{\log t}\right)^2\\
&= 1 - \frac{2}{t\log t} - \frac{\log t - \left(1+\frac{1}{2t}\right)^2}{t^2 \log^2 t} \leq 1 - \frac{2}{t \log t}
\end{aligned}
$$

en observant que pour $t \geq 2$, $1 + \frac{1}{2t} \leq \frac{5}{4}$ et pour $t \geq 5$, $\log t \geq \frac{25}{16}$.

*Démonstration du théorème* 1.6. Soit $k_0 = 400000$, et $k$ un réel, $k \geq k_0$. On va montrer que

$$\frac{\lambda(k-1)}{\log(k-1)} > \frac{\lambda(k)}{\log k}.$$

Soit $M_k$ défini par (13). On a

$$\frac{\lambda(k)}{\log k} = \frac{\Lambda(k, M_k)}{\log k}$$

et par (12)

$$\frac{\lambda(k-1)}{\log(k-1)} \geq \frac{\Lambda(k-1, M_k)}{\log(k-1)}.$$

Il suffit donc de montrer

$$\frac{\Lambda(k-1, M_k)}{\log(k-1)} \geq \frac{\Lambda(k, M_k)}{\log k}$$



ce qui s'écrit par (11)

$$\frac{\log d_{k-1}(M_k)}{(\log(k-1))^2} \geq \frac{\log d_k(M_k)}{(\log k)^2}.$$

Par les théorèmes 1.3 et 1.4 et la formule (17), nous savons que $M_k = N = 2^{I_2} 3^{I_3}$ avec $I_2 \geq I_3 \geq 1$. Il nous suffit donc de prouver que pour $p = 2$ et $p = 3$ on a l'inégalité

$$\frac{\log d_{k-1}(p^{I_p})}{(\log(k-1))^2} \geq \frac{\log d_k(p^{I_p})}{(\log k)^2}.$$

Or, par (2), on a $\dfrac{d_{k-1}(p^{I_p})}{d_k(p^{I_p})} = \dfrac{k-1}{k-1+I_p}$ et il nous suffit donc de prouver

$$\log d_k(p^{I_p})\left(1 - \left(\frac{\log(k-1)}{\log k}\right)^2\right) \geq \log\left(\frac{k-1+I_p}{k-1}\right). \tag{60}$$

Par l'inégalité (44) avec $\xi_1 = 5$ et par (49), on a

$$
\begin{aligned}
I_p(x) &\leq c_0(5) k^{1-\frac{\log 2}{\log x}}\\
&\leq 1{,}004\, k^{1/2} k^{\frac{1}{2}-\frac{\log 2}{\log x}}\\
&\leq 1{,}004\, k^{1/2} k^{\frac{0{,}9}{\log k}} \doteq 1{,}004 \exp(0{,}9) k^{1/2}\\
&\leq 2{,}5\sqrt{k}
\end{aligned}
$$

et l'on peut appliquer le lemme 8.1 à $d_k(p^{I_p})$. Par les lemmes 8.1 et 8.2, le membre de gauche de (60) est supérieur à

$$\frac{I_p \log k}{2}\left(1+\frac{2}{k}\right)\frac{2}{k \log k} = \frac{I_p}{k}\left(1+\frac{2}{k}\right) \geq \frac{I_p}{k-1}$$

pour $k \geq 2$, tandis que le membre de droite vérifie

$$\log\left(\frac{k-1+I_p}{k-1}\right) = \log\left(1+\frac{I_p}{k-1}\right) < \frac{I_p}{k-1},$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.6.

On peut sans doute montrer que la fonction $\lambda(k)/\log(k)$ est décroissante en $k$, mais cela semble nécessiter des inégalités un peu techniques sur la fonction $\Gamma$.

## Références

[1] Artin, E., The gamma function (traduit par M. Butler). Holt, Rinehart and Winston, New York 1964.

[2] Baker, A., Transcendental number theory. Cambridge University Press, Cambridge 1975.

[3] Duras, J.L., Étude de la fonction nombre de façons de représenter un entier comme produit de $k$ facteurs. Thèse de l'Université de Limoges, France, 1993.

[4] Erdős, P., On highly composite numbers. J. London Math. Soc. 19 (1944), 130–133.

[5] Heppner, E., Die maximale Ordnung Primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen. Arch. Math. (Basel) 24 (1973), 63–66.

[6] Lang, S., Introduction to transcendental numbers. Addison-Wesley, Reading 1966.

[7] Nicolas, J.-L., Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan. Canad. J. Math. 3 (1971), 116–130.

[8] — On highly composite numbers. In: Ramanujan revisited (éd. par G.E. Andrews et al.), 215–244. Academic Press, Boston 1988.

[9] Nicolas, J.-L., Robin, G., Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de $n$. Canad. Math. Bull. 26 (1983), 485–492.

[10] Norton, K., Upper bounds for sums of powers of divisor functions. J. Number Theory, 40 (1992), 60–85.

[11] Ramanujan, S., On the number of divisors of a number. J. Indian Math. Soc. 7 (1915), 131–133.

[12] — Highly composite numbers. Proc. London Math. Soc. (2) 14 (1915), 347–400.

[13] — Highly composite numbers, annotated by J.-L. Nicolas and G. Robin. Ramanujan J. 1 (1997), 119–153.

[14] Robin, G., Méthodes d'optimisation pour un problème de théorie des nombres. RAIRO Inform. Théor. 17 (1983), 239–247.

[15] — Sur une famille de nombres hautement composés supérieurs. Studia Sci. Math. Hungar. 23 (1988), 61–71.

[16] Schoenfeld, L., Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II. Math. Comp. 30 (1976), 337–360.

[17] Waldschmidt, M., Communication personnelle aux auteurs.

[18] Wigert, S., Sur l'ordre de grandeur du nombre de diviseurs d'un entier. Ark. Mat. 3, no. 18 (1906-1907), 1–9.




## Table of contents of Volume II