

SUR LA FONCTION:
NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS

ABSTRACT. Let $\omega(n)$ be the number of prime factors of n ; n is said ω -largely composite if $m \leq n \Rightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$.

The quantity $Q_1(X)$ of such numbers $\leq X$ verifies $e^{c_1\sqrt{\log X}} \leq Q_1(X) \leq e^{c_2\sqrt{\log X}}$. Then we prove

$$\text{card} \left\{ n \leq x \mid \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x} \right\} = x^{1-c+o(1)}$$

and if $\Omega(n)$ is the total number of prime factors of n counted according to multiplicity, $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1+o(1))$.

An integer n is defined ω -interesting if

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

A short study of these numbers is given. We prove that there exists infinitely many strangulation points (n_k) for the function $n - \omega(n)$

i.e. such that: $m < n_k \Rightarrow m - \omega(m) < n_k - \omega(n_k)$

and $m > n_k \Rightarrow m - \omega(m) > n_k - \omega(n_k)$

Finally, we deduce from some formula of A. Selberg the exact order of $\text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) > \alpha \log \log x\}$ for $\alpha > 1$.

INTRODUCTION

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n . On définit $\omega(n) = k$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. Les fonctions ω et Ω sont additives: une fonction f est additive si $(m, n) = 1$ entraîne $f(mn) = f(m) + f(n)$. Hardy et Ramanujan (cf. [Har]) ont démontré en 1917 que la

valeur moyenne de $\omega(n)$ était $\log \log n$. En 1934, P. Turan donnait une démonstration simple de ce résultat, en prouvant: (cf. [Tur])

$$\sum_{n=1}^x (\omega(n) - \log \log x)^2 = O(x \log \log x).$$

En 1939, M. Kac et P. Erdős démontraient (cf. [Kac]):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{card} \{ n \leq x; \omega(n) \leq \log \log x + t\sqrt{\log \log x} \} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du. \end{aligned}$$

Ensuite, P. Erdős ([Erd 1]) et L. G. Sathe ([Sat]) s'intéressaient aux entiers $n \leq x$ tels que $\omega(n)$ soit de l'ordre de $c \log \log x$. A. Selberg ([Sel 1]) donnait la « formule de Selberg »

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = z F(z) x (\log x)^{z-1} + o(x (\log x)^{\text{Re}(z-2)})$$

où pour $R > 0$, le O est uniforme pour $|z| \leq R$; $F(z)$ est la fonction entière

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^z.$$

Cette formule permet d'obtenir plus simplement les résultats de Sathe. Dans la proposition 3, nous suivrons les idées de A. Selberg pour calculer un équivalent de:

$$\text{card} \{ n \leq x \mid \omega(n) > \alpha \log \log x \}, \quad \alpha > 1.$$

La formule (1) a été étendue par H. Delange (cf. [Del 1] et [Del 2]).

Soit p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et posons $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$. Ce nombre A_k est le plus petit entier naturel n tel que $\omega(n) = k$. On dit que n est ω -hautement composé si $m < n \Rightarrow \omega(m) < \omega(n)$. La suite des nombres ω -hautement composés est la suite A_k .

A l'aide du théorème des nombres premiers, on a: $\log A_k \sim p_k \sim k \log k$; on en déduit que pour tout n (cf. [Wri], ch. XVIII):

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1))$$

et que $Q_h(X)$ le nombre de nombres ω -hautement composés $\leq X$ vérifie:

$$Q_h(X) \sim \frac{\log X}{\log \log X}.$$

On dit maintenant que $n \geq 2$ est ω -largement composé, si $1 \leq m \leq n \Rightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$. Si $A_k \leq n < A_{k+1}$, n est ω -largement composé si et seulement si $\omega(n) = k$. Soit $Q_l(X)$ le nombre de nombres ω -largement composés $\leq X$. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. Il existe deux constantes $0 < c_1 < c_2$ telles que:

$$\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leq Q_l(X) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

Nous démontrerons ensuite:

THÉORÈME 2. Soit c , $0 < c < 1$. On a:

$$f_c(x) = \text{card} \left\{ n \leq x; \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x} \right\} = x^{1-c+o(1)}.$$

Entre les résultats obtenus par la formule de Selberg et le théorème 2, il y a un trou à boucher, pour estimer par exemple: $\text{card} \{ n \leq x \mid \omega(n) > (\log x)^\alpha \}$, $0 < \alpha < 1$. Kolesnik et Straus (cf. [Kol]) ont donné une formule asymptotique assez compliquée qui fournit partiellement une solution à ce problème.

Nous nous intéresserons ensuite aux valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$, pour quelques fonctions arithmétiques f . Nous démontrerons en particulier:

THÉORÈME 3. On a, pour $n \rightarrow +\infty$:

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1 + o(1)).$$

Au paragraphe IV, nous disons qu'un nombre n est ω -intéressant si:

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Cette définition caractérise une famille de nombres n qui ont beaucoup de facteurs premiers, en les comparant avec des nombres m plus grands que n (contrairement à la définition des nombres hautement composés). Nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on dit qu'une fonction f a un point d'étranglement en n , si

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) \quad \text{et} \quad m > n \Rightarrow f(m) > f(n).$$

Interprétation géométrique: Le graphe de f , contenu dans l'angle droit de sommet $(n, f(n))$ et de côté parallèle aux axes, s'étrangle en n . Nous démontrerons:

THÉORÈME 4. La fonction $n \rightarrow n - \omega(n)$ a une infinité de points d'étrangement.

Pour démontrer ce théorème, nous construirons une infinité de points n tels qu'il existe juste avant n , une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

§ 1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Minoration: D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) il existe entre $(1-2\varepsilon) \log X$ et $(1-\varepsilon) \log X$ un nombre x tel que:

$$\pi(x+f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \quad \text{et} \quad \pi(x) - \pi(x-f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x}$$

pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $\frac{f(x)}{x}$ décroisse et tende vers 0.

On choisit $f(x) = c \sqrt{x} \log x$. Soit k tel que $p_k \leq x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres:

$$n = A_{k-r} q_1 \dots q_r, \quad 0 \leq r \leq s$$

où q_1, \dots, q_r sont des nombres premiers distincts choisis parmi p_{k+1}, \dots, p_{k+s} .

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$ et il y en a 2^s . De plus ils vérifient:

$$n \leq A_k \left(\frac{p_{k+s}}{p_{k-s}} \right)^s.$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leq x + f(x)$ et $p_{k-s} \geq x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \frac{f(x)}{\log x}$. On a alors:

$$\log \frac{n}{A_k} \leq s \log \frac{x+f(x)}{x-f(x)} \sim 2c^2 \log x.$$

Si l'on choisit $c < \frac{1}{\sqrt{2}}$, on aura donc $A_k \leq n < A_{k+1}$ et ces nombres n seront ω -largement composés et $\leq X$. On aura donc :

$$Q_i(X) \geq 2^s \geq \exp \left(\frac{(1-\varepsilon) \log 2}{\sqrt{2}} \sqrt{\log X} \right).$$

Majoration: La majoration de $Q_i(X)$ est basée sur le lemme:

LEMME 1. Soit $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_k$ le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et soit $T(x)$ le nombre de solutions de l'inéquation:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots \leq x, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

Si $C > \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$, on a pour x assez grand:

$$\log T(x) \leq C \sqrt{\frac{x}{\log x}}.$$

Démonstration. Le nombre de solutions de l'équation:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots = n, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

est le nombre $S(n)$ de partitions de n en sommants premiers et distincts. Le nombre $T(x) = \sum_{n \leq x} S(n)$ peut être évalué par le théorème taubérien de Hardy et Ramanujan (cf. [Ram]) et Roth et Szekeres donnent la formule [Roth]:

$$\log S(n) = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{n}{\log n}} \left(1 + O \left(\frac{\log \log n}{\log n} \right) \right)$$

et montrent que $S(n)$ est une fonction croissante de n . On a alors: $T(x) \leq x S[x]$.

Nous nous proposons de majorer le nombre d'éléments de l'ensemble:

$$E_k = \{ n \mid \omega(n) = k, n < A_{k+1} \}.$$

Soit $n \in E_k, n = q_1^{a_1} \dots q_k^{a_k}$; le nombre $n' = q_1 q_2 \dots q_k$ est sans facteur carré et $n' \in E_k$. De plus $\frac{n}{n'} < p_{k+1}$. On a donc:

$$\text{card } E_k \leq p_{k+1} \text{ card } E'_k,$$

avec: $E'_k = \{n \mid n \text{ sans facteur carré, } \omega(n) = k, n < A_{k+1}\}$.

Maintenant si $n \in E'_k$, n s'écrit:

$$n = 2^{1-x_k} 3^{1-y_{k-1}} \dots p_k^{1-x_1} p_{k+1}^{x_1} \dots p_{k+r}^{x_r} \dots$$

avec x_i et y_i valant 0 ou 1 et $\sum x_i = \sum y_i$. Il vient:

$$\begin{aligned} \log \frac{n}{A_k} &= x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} \\ &+ \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \end{aligned}$$

Le nombre d'éléments de E'_k est donc majoré par le nombre de solutions de l'inéquation, en x_i et y_i valant 0 ou 1:

$$\begin{aligned} x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots \\ + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \leq \log p_{k+1}. \end{aligned}$$

On en déduit: $\text{card } E'_k \leq N_1 N_2$, avec $N_i =$ nombre de solutions de l'inéquation ξ_i ($i=1, 2$):

$$(\xi_1) \quad x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots \leq \log p_{k+1}$$

$$(\xi_2) \quad y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \leq \log p_{k+1}.$$

Soit R le plus grand nombre r tel que $p_{k+r} < 2p_k$. On coupe l'inéquation ξ_1 en deux:

$$\xi'_1: \quad \sum_{r=1}^R x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leq \log p_{k+1},$$

$$\xi''_1: \quad \sum_{r=R+1}^{\infty} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leq \log p_{k+1}.$$

Le nombre de variables de ξ''_1 est en fait fini, et majoré par $p_k p_{k+1}$. Le nombre de variables non nulles d'une solution de ξ''_1 est majoré par $\frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}$. Le nombre N''_1 de solutions de ξ''_1 est majoré par:

$$N''_1 \leq \sum_{j \leq \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}} \binom{p_k p_{k+1}}{j} \leq \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1} (p_k p_{k+1})^{\frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}}$$

ce qui assure:

$$N''_1 = \exp(O(\log p_k)^2).$$

Il résulte de l'inégalité de Brun-Titchmarsh (cf. [Hal 1] et [Mon]):

$$\pi(x) - \pi(x-y) < 2y / \log y$$

valable pour $1 < y \leq x$ que, pour $k \geq 2$:

$$p_{k+r} - p_k > \frac{r}{2} \log(p_{k+r} - p_k) \geq \frac{r}{2} \log 2r.$$

On en déduit que pour $r \leq R$, on a:

$$\log \frac{p_{k+r}}{p_k} \geq \frac{p_{k+r} - p_k}{p_{k+r}} \geq \frac{r \log 2r}{4p_k} \geq c \frac{p_r}{p_k}.$$

Toute solution de ξ'_1 est donc solution de l'inéquation:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r + \dots \leq \frac{1}{c} p_k \log p_{k+1}$$

et d'après le lemme précédent, on a:

$$\log N'_1 = O(\sqrt{p_k})$$

et le nombre de solutions de ξ_1 vérifie:

$$\log N_1 = O(\sqrt{p_k}).$$

On démontre de même que le nombre N_2 de solutions de ξ_2 vérifie:

$$\log N_2 = O(\sqrt{p_k}).$$

Ce qui entraîne:

$$\log(\text{card } E'_k) \leq \log N_1 + \log N_2 = O(\sqrt{p_k})$$

et:

$$\text{card } E_k \leq p_{k+1} (\text{card } E'_k) = \exp(O(\sqrt{p_k})).$$

Finalement, l'ensemble des nombres ω -largement composés est $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$; la quantité $Q_1(X)$ de tels nombres $\leq X$ vérifie, en posant $A_{k_0} \leq X < A_{k_0+1}$, ce qui entraîne $\log X \sim p_{k_0}$:

$$Q_1(X) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \exp(O(\sqrt{p_k})) \leq k_0 \exp(O(\sqrt{p_{k_0}})) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

Remarque. On peut conjecturer que $\log Q_1(X) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\log X}$. En effet si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$, le « 2 » venant de la formule de Brun-Titchmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k , on peut assimiler $\log \frac{p_{k+r}}{p_k}$ à $r \frac{\log p_{k+1}}{p_k}$ et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leq p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

$x_i, y_i \in \{0, 1\}$. Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{p_k}$.

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Minoration: Posons $k = \left\lceil \frac{c \log x}{\log \log x} \right\rceil + 1$ et $A_k = e^{\theta(p_k)} = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ où $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ est la fonction de Chebichev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}$. Il y en a $\left\lfloor \frac{x}{A_k} \right\rfloor$ qui sont inférieurs à x . On a (cf. [Land], § 57):

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k / \log^2 p_k) = k(\log k + \log \log k - 1 + o(1)).$$

Il vient en posant $l = \log x, l_2 = \log \log x, l_3 = \log \log \log x$:

$$k = \frac{cl}{l_2} + O(1)$$

$$\log A_k = cl + c(\log c - 1)(1 + o(1))l/l_2$$

et

$$f_c(x) \geq \left\lfloor \frac{x}{A_k} \right\rfloor \geq x^{1-c} \exp\left(c(1 - \log c)(1 + o(1)) \frac{\log x}{\log \log x}\right).$$

Majoration: En développant par la formule multinomiale (cf. [Com], t. 1, p. 38 ou [Hal 2], p. 147), on obtient:

$$\left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}\right)^k \geq k! \sum_{2 \leq p_{i_1} < \dots < p_{i_k} \leq x} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}$$

On a donc, pour $k \in \mathbb{N}$, en désignant par S l'ensemble des nombres sans facteur carrés,

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x, n \in S \\ \omega(n) = k}} 1 \leq \sum_{\substack{n \leq x, n \in S \\ \omega(n) = k}} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k!} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}\right)^k.$$

Evaluons maintenant le nombre d'entiers $n \leq x$ dont les facteurs premiers sont exactement $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$. On doit avoir

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k} \leq x; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Ce qui entraîne

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq \left\lceil \frac{\log x}{\log 2} \right\rceil; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Or le nombre de solutions de cette inéquation est un nombre de combinaisons avec répétition et vaut $\binom{\lceil \log x / \log 2 \rceil}{k} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^k$.

On a donc

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) = k}} 1 \leq \frac{1}{(k!)^2} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}\right)^k \left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^k$$

et

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) \geq k}} 1 \leq x \sum_{j \geq k} \frac{\left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}\right)^j (\log x / \log 2)^j}{(j!)^2}$$

On utilise la majoration $\sum_{j \geq k} \frac{a^j}{(j!)^2} \leq \frac{a^k}{(k!)^2} \frac{1}{1 - a/(k+1)^2}$ valable pour $a < (k+1)^2$. On sait d'autre part (cf. [Land] § 28) qu'il existe B tel que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq \log \log x + B, \text{ et on choisit:}$$

$$k = \left\lceil \frac{c \log x}{\log \log x} \right\rceil + 1.$$

On obtient alors

$$f_c(x) \leq \frac{x(l_2 + B)^k (l/\log 2)^k}{(k!)^2} \left(1 + O\left(\frac{l_2^3}{l}\right)\right)$$

et en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leq x^{1-c} \exp\left(3c(1+o(1)) \frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x}\right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

§ 3. VALEURS EXTRÊMES DE $f(n) + f(n+1)$

1) Fonction $\sigma(n) =$ somme des diviseurs de n .

On remarque d'abord que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma(n) &= n \prod_{p^a || n} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \\ &= n(1+o(1)) \prod_{\substack{p^a || n \\ p \leq \log n}} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \end{aligned}$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n / \log \log n$ et:

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p^a || n \\ p > \log n}} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) &\leq \prod_{\substack{p^a || n \\ p > \log n}} \frac{1}{1-1/p} \leq \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log \log n}} \\ &= 1 + \frac{O(1)}{\log \log n} \end{aligned}$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n , $\sigma(n) \geq n$ et pour n pair, $\sigma(n) \geq \frac{3}{2}n$. On a

donc pour tout n : $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geq \frac{5}{2}n$. Inversement, pour k fixé, le

nombre $n = 4p_2 p_3 \dots p_k + 1$ est tel que n et $n+1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1-\varepsilon) \log n$ et donc vérifie: $\sigma(n) + \sigma(n+1)$

$$= \frac{5}{2}n(1+o(1)).$$

On obtient les grandes valeurs de $\sigma(n) + \sigma(n+1)$ de la façon suivante: Il résulte de (2) que

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leq n(1+o(1))(P_1 + P_2)$$

avec

$$P_1 = \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \log n}} \frac{1}{1-1/p} \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{\substack{p|n+1 \\ p \leq \log n}} \frac{1}{1-1/p}.$$

Comme P_1 et P_2 sont supérieurs à 1, $P_1 + P_2 \leq P_1 P_2 + 1$ et

$$P_1 P_2 \leq \prod_{p \leq \log n} \frac{1}{1-1/p} \sim e^\gamma \log \log n,$$

où γ est la constante d'Euler d'après la formule de Mertens (cf. [Wri] § 22.8). Cela donne pour tout n

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leq n(1+o(1))e^\gamma \log \log n.$$

Ce résultat est le meilleur possible puisque pour une infinité de n , on a (cf. [Wri] § 22.9):

$$\sigma(n) \sim n e^\gamma \log \log n.$$

Pour que la majoration $P_1 + P_2 \leq P_1 P_2 + 1$ soit bonne, il faut choisir P_1 ou P_2 voisin de 1. L'examen des tables de $\max_{n \leq x} \sigma(n)$ et de

$$\max_{n \leq x} (\sigma(n) + \sigma(n-1))$$

montre que souvent un nombre N hautement abondant (c'est-à-dire vérifiant $n < N \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(N)$) vérifie: $\max_{n \leq N+1} (\sigma(n) + \sigma(n-1)) = \sigma(N) + \sigma(N-1)$ ou $\sigma(N+1) + \sigma(N)$.

2) Indicateur d'Euler ϕ .

On a une relation analogue à (2):

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n(1+o(1)) \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

On démontre comme précédemment que pour tout $n > 1$, on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \leq \frac{3}{2}n$$

et que, pour une infinité de n

$$\phi(n) + \phi(n+1) \sim \frac{3}{2}n.$$

Pour les petites valeurs de $\phi(n) + \phi(n+1)$, on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \geq n(1+o(1))(P_1+P_2) \geq 2n(1+o(1))\sqrt{P_1P_2},$$

avec

$$P_1 = \prod_{\substack{p|n \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{\substack{p|n+1 \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

et comme

$$P_1P_2 \geq \prod_{p \leq \log n} (1-1/p) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log \log n},$$

on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \geq \frac{2e^{-\gamma/2}n(1+o(1))}{\sqrt{\log \log n}}.$$

Cette inégalité est une égalité pour les n construits de la façon suivante: Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_k = \prod_{p \leq p_k} (1-1/p)$. Soit k' le plus grand entier tel

que $P_{k'} \geq \sqrt{P_k}$; on pose alors $R = p_1 p_2 \dots p_{k'}$; $S = p_{k'+1} \dots p_k$; on a $\frac{\phi(R)}{R} = \frac{\phi(S)}{S} (1+o(1))$ et l'on prend pour n la plus petite solution des

congruences: $n \equiv 0 \pmod{R}$; $n+1 \equiv 0 \pmod{S}$. Cette solution vérifie $R \leq n < RS = \exp(\theta(p_k))$, ce qui montre que n tend vers l'infini avec k ,

$$\text{et } \frac{\phi(n)}{n} \leq \frac{\phi(R)}{R} \text{ et } \frac{\phi(n+1)}{n+1} \leq \frac{\phi(S)}{S}.$$

3) Fonction Ω : Démonstration du théorème 3.

PROPOSITION 1. Soit $\varepsilon > 0$ et $k > 0$. On écrit $n(n+1) = U_k V_k$ où U_k est le produit des facteurs premiers $\leq k$. Alors il existe $n_0(k, \varepsilon)$ tel que pour $n \geq n_0$, on ait $U_k \leq n^{1+\varepsilon}$.

Le théorème 3 résulte de cette proposition puisque pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Omega(n) + \Omega(n+1) &= \Omega(n(n+1)) = \Omega(U_k) + \Omega(V_k) \\ &\leq \frac{\log U_k}{\log 2} + \frac{\log V_k}{\log k} \\ &\leq (1+\varepsilon) \frac{\log n}{\log 2} + \frac{2 \log n}{\log k}, \quad \text{pour } n \geq n_0. \end{aligned}$$

Etant donné η , il suffit donc de choisir ε assez petit et k assez grand pour obtenir: $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1+\eta)$ pour $n \geq n_0$.

La proposition 1 résulte de la proposition 2 (cf. [Rid] et [Sch], th 4F), comme nous l'a précisé M. Langevin:

PROPOSITION 2 (Ridout). Soit θ un nombre algébrique $\neq 0$. Soit $P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ des nombres premiers distincts, et $\delta > 0$. Il y a un nombre fini de nombres rationnels a/b avec:

$$a = a' P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_s^{\alpha_s} \quad \text{et} \quad b = b' Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \dots Q_t^{\beta_t}$$

avec: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t \in \mathbb{N}$ et $a', b' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| \theta - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{|a'b'| |ab|^\delta}.$$

Démonstration de la proposition 1. Supposons que pour une infinité de n , on ait $U_k > n^{1+\varepsilon}$. On peut partager les nombres premiers $\leq k$ en deux parties P_1, P_2, \dots, P_s et Q_1, Q_2, \dots, Q_t , de telle sorte qu'il y ait une infinité de n tels que $U_k > n^{1+\varepsilon}$ et tels que

$$\begin{aligned} p \leq k \quad \text{et} \quad p | n &\Rightarrow p \in \{P_1, \dots, P_s\}, \\ p \leq k \quad \text{et} \quad p | n+1 &\Rightarrow p \in \{Q_1, \dots, Q_t\}. \end{aligned}$$

On écrit $n = n' P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ et $(n+1) = n'' Q_1^{\beta_1} \dots Q_t^{\beta_t}$ et l'on choisit $\theta = 1$, $\delta = \varepsilon/3$. Il y aurait alors une infinité de nombres rationnels $\frac{n+1}{n}$, solution de

$$\left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| < \frac{1}{|n'n''| (n(n+1))^\delta}$$

puisque $n'n'' = V_k \leq n^{1-\varepsilon} + n^{-\varepsilon}$, ce qui contredirait la proposition 2.

Les valeurs de $n \leq 300\,000$ vérifiant

$$m < n \Rightarrow \Omega(m(m+1)) < \Omega(n(n+1))$$

sont (avec, entre parenthèses la valeur de $\Omega(n(n+1))$): 2 (2); 3 (3); 7 (4); 8 (5); 15 (6); 32 (7); 63 (9); 224 (10); 255 (11); 512 (13); 3968 (14); 4095 (17); 14436 (18); 32768 (19); 65535 (20); 180224 (22); 262143 (24).

On constate que les nombres $2^n + \{-1, 0, +1\}$, lorsque n a de nombreux facteurs premiers, figurent en bonne place dans cette table. Malheureusement, la proposition 2 n'est pas effective, et il n'est pas possible de montrer par cette méthode que la table en contient une infinité.

4) Fonction ω .

Nous avons rappelé dans l'introduction que pour tout n , on a

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1)).$$

$$\text{Soit } l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(n) + \omega(n+1)}{\log n / \log \log n}.$$

On a $1 \leq l \leq 2$ de façon évidente. On a probablement $l = 1$, mais il semble impossible de le démontrer.

La suite des nombres n tels que $m < n \Rightarrow \omega(m(m+1)) < \omega(n(n+1))$ est: 1, 2, 5, 14, 65, 209, 714, 7314, 28570, 254540, etc ... On a en particulier $714 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ et $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. L'équation

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_k$$

a-t-elle des solutions > 714 ? (cf. [Nel]).

Pour les petites valeurs de $\omega(n) + \omega(n+1)$, le résultat de Chen (pour une infinité de nombres premiers p , on a $\Omega(2p+1) \leq 2$, cf. [Hal 1], chap 11) montre que pour une infinité de n , on a

$$\omega(n) + \omega(n+1) \leq \Omega(n) + \Omega(n+1) \leq 4.$$

L'ultime amélioration du résultat de Chen ($\Omega(2p+1) = 1$) permettrait de remplacer 4 par 3 qui est le meilleur résultat possible pour Ω .

Si l'on a $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$, n et $n+1$ doivent être des puissances de nombres premiers. L'un des deux étant pair, doit donc être une puissance de 2. Cette situation se produira en particulier si n est un nombre premier de Mersenne ($n = 2^p - 1$ avec p premier) ou si $n+1$ est un nombre premier de Fermat ($n+1 = 2^{2^k} + 1$). D'autre part l'équation $2^n \pm 1 = p^a$

avec $a \geq 2$ qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n tels que $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$ est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

§ 4. NOMBRES ω -INTÉRESSANTS

Définition. On dit que n est ω -intéressant, si l'on a

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Interprétation géométrique: pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

Propriété 1: Pour $k \geq 1$, le nombre $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ est ω -intéressant. En effet: si $\omega(m) \leq k$ on a bien: $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta$, $\Delta > 0$, on a alors $m \geq A_k 3^\Delta$ et:

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{k + \Delta}{A_k 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{\left(1 + \frac{\Delta}{k}\right)}{3^\Delta} \leq \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1 + \Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

Propriété 2: Soit n vérifiant:

$$A_k < n < A_{k+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \omega(n) = k$$

alors n est ω -intéressant.

Démonstration: Soit $m > n$, ou bien on a: $m \geq A_{k+1}$ et d'après la propriété 1:

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leq \frac{(k+1) \left(1 - \frac{1}{k}\right)}{n} < \frac{\omega(n)}{n}$$

ou bien on a: $n < m < A_{k+1}$ et cela entraîne $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

Propriété 3: Pour une infinité de valeurs de k , il existe un nombre ω -intéressant, plus grand que A_k et ayant $k-1$ facteurs premiers.

Démonstration : Soit k tel que

$$(3) \quad \frac{p_{k+1}}{p_k+1} > 1 + \frac{1}{k-1};$$

alors $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-1} (p_k+1)$ est ω -intéressant :

Remarquons d'abord que l'on a $A_k < n < n' = A_k \frac{p_{k+1}}{p_k}$ et que pour $k \geq 2$, d'après la propriété 2, n' est ω -intéressant. Ensuite, $\omega(n) = k-1$; si m vérifie $n < m < n'$ on a : $\omega(m) \leq k-1$; si m vérifie $n' \leq m$, on a

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n')}{n'} = \frac{k}{n'} < \frac{k-1}{n};$$

d'après l'hypothèse.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers tels que $p_{k+1} - p_k > 2 \log p_k$ (cf. [Pra], p. 157). Pour ces nombres on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k+1} > 1 + \frac{2 \log p_k - 1}{p_k+1}$$

et comme $p_k \sim k \log k$, cela entraîne la relation (3).

Remarque 1. Si k vérifie $p_{k+1} - p_k < \frac{p_k}{k-1}$ il est facile de voir qu'il

n'existe aucun nombre ω -intéressant compris entre A_k et $n' = A_k \frac{p_{k+1}}{p_k}$.

Cette situation se produit pour une infinité de k . On peut donc conjecturer que pour une infinité de k , les nombres ω -intéressants compris entre A_k et A_{k+1} vérifient $\omega(n) \geq k$.

Remarque 2. Désignons par n'' le plus petit entier suivant A_k et ayant $(k-1)$ facteurs premiers. On a $n'' \leq n = A_k \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$. Il est possible d'obtenir une meilleure majoration de n'' de la façon suivante: Le théorème de Sylvester-Schur affirme que $P(u, r)$, le plus grand facteur premier du produit $(u+1) \dots (u+r)$ est plus grand que r si $u \geq r$. (cf. [Lan]).

Considérons le produit : $\prod_{t=1}^{p_{k-2}} (p_{k-1} p_k + t)$. Il doit avoir un facteur premier $q > p_{k-2}$, et soit $t = t_q$ tel que q divise $p_{k-1} p_k + t$. Alors le nombre $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-2} (p_{k-1} p_k + t_q)$ a $k-1$ facteurs premiers et l'on a $n \leq A_k (1 + p_{k-2}/p_k p_{k-1})$. Le résultat de Ramachandra (cf. [Ramac]):

si $r^{3/2} \leq u \leq r^{\log \log r}$, on a : $P(u, r) > r^{1+2\lambda}$ avec $\lambda = -\left(8 + \frac{\log u}{\log r}\right)$

permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leq A_k \left(1 + \frac{1}{p_k^{1+\alpha}}\right)$. On peut prendre $\alpha = 0,000974$.

Propriété 4. Soit n un nombre ω -intéressant, $n \geq (k-1) A_k$ alors $\omega(n) \geq k$. Cela entraîne qu'un nombre ω -intéressant compris entre A_k et A_{k+1} a plus de $(k-1)$ facteurs premiers.

Démonstration. Soit $n \geq (k-1) A_k$ vérifiant $\omega(n) \leq k-1$; on écrit

$$A_k(t-1) \leq n < A_k t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geq k$. Ce nombre n ne peut pas être ω -intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leq \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leq \frac{k}{A_k t} \leq \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture: Peut-on remplacer $n \geq (k-1) A_k$ par $n \geq (1+\varepsilon(k)) A_k$ avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω -intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω -largement composés: Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω -largement composés non ω -intéressants (exemple: $n = (p_{k+1}-1) A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

§ 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

PROPOSITION 3. Posons $N_k(x) = \text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) > k\}$. Pour α fixé, $\alpha > 1$, on a lorsque $x \rightarrow +\infty$ (avec les notations de l'introduction)

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha-1} \alpha^{\frac{1}{2} + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x(1+O(1/\log \log x))}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}}$$

où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y .

Pour $0 < \alpha < 1$, la formule ci-dessus est valable (en remplaçant $\frac{F(\alpha)}{\alpha-1}$ par $\frac{F(\alpha)}{1-\alpha}$) pour estimer $\text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) \leq \alpha \log \log x\}$.

Démonstration (communiquée par H. Delange). Soit $P_x(z) = \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)}$.

Le théorème des résidus montre que:

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{P_x(z)}{(z-1)z^{k+1}} dz$$

où γ est un cercle de centre 0 et de rayon $r > 1$. On applique la formule de Selberg (1)

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{z F(z) x (\log x)^{r-2}}{(z-1)z^{k+1}} dz + R_1(x),$$

avec

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{O(x (\log x)^{\text{Re}z-2})}{(z-1)z^{k+1}} dz = O\left(\frac{x (\log x)^{r-2}}{(r-1)r^k}\right)$$

On pose $\frac{z F(z)}{z-1} = G(z)$. G est holomorphe en $z = r$ et l'on écrit

$$G(z) = G(r) + (z-r)G'(r) + (z-r)^2 H(z, r),$$

avec $H(z, r) = \frac{1}{2} G''(r)$. Par la formule de Taylor, il existe $\lambda, 0 < \lambda < 1$

tel que $H(z, r) = \frac{1}{2} G''(\lambda z + (1-\lambda)r)$. La fonction H est donc continue et

$H(z, r)$ est bornée uniformément pour $z \in \gamma, 1 < r_1 \leq r \leq r_2$. On pose $\log \log x = l$. On obtient

$$\begin{aligned} N_k(x) &= \frac{1}{2i\pi \log x} \int_{\gamma} \frac{x G(z) e^{zl}}{z^{k+1}} dz + R_1(x) \\ &= \frac{1}{2i\pi \log x} \left(\int_{\gamma} \frac{x G(r) e^{zl}}{z^{k+1}} dz + \int_{\gamma} \frac{x(z-r) e^{zl} G'(r)}{z^{k+1}} dz \right) + R_1(x) + R_2(x) \\ &= \frac{x}{\log x} G(r) \frac{l^k}{k!} + \frac{x}{\log x} G'(r) \left(\frac{l^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{r l^k}{k!} \right) + R_1(x) + R_2(x). \end{aligned}$$

On choisit $r = \frac{k}{l}$ de telle sorte que le coefficient de $G'(r)$ s'annule, et

on a

$$R_2(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_{\gamma} \frac{x(z-r)^2 H(z, r) e^{zl}}{z^{k+1}} dz.$$

Si l'on pose $z = r e^{i\theta}$, on a $|z - r|^2 |e^{zl}| = 2r^2 (1 - \cos \theta) e^{r l \cos \theta}$.

On peut montrer que, lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, on a $\int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) e^{\alpha \cos \theta} d\theta = O(e^{\alpha \alpha^{-3/2}})$ (cf. par exemple, [Dieu], ch. IV). On en déduit que

$$R_2(x) = O\left(\frac{x}{\log x} \frac{e^{rl}}{l^{3/2} r^{k-1/2}}\right)$$

et finalement

$$N_k(x) = \frac{x}{\log x} G(r) \frac{l^k}{k!} + O\left(\frac{x}{\log x} \frac{e^{rl}}{l^{3/2} r^{k-1/2}}\right) + O\left(\frac{x (\log x)^{r-2}}{(r-1)r^k}\right)$$

On pose $k = [\alpha \log \log x], r = \frac{k}{l} = \alpha + O\left(\frac{1}{\log \log x}\right)$, on a donc $G(r)$

$= G(\alpha) \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right)$, on évalue chacun des termes ci-dessus (en particulier $k!$ par la formule de Stirling: $k! \sim l^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}$) et on obtient la proposition 3.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, on suit la même méthode, en intégrant sur un cercle de rayon $r = \frac{k}{l} < 1$.

PROPOSITION 4. Soit $(n_0, A) = 1$, et $\alpha > 0$. Alors on a, avec $d(n) = \sum_{d|n} 1$,

$$(i) \sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod A \\ n \leq x}} d(n) \leq \frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right) + 2\sqrt{x},$$

$$(ii) \sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod A \\ n \leq x \\ \omega(n) \geq \alpha \log \log x}} 1 \leq \frac{1}{(\log x)^{\alpha \log 2}} \left(\frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right) + 2\sqrt{x}\right)$$

En particulier cette dernière somme est $O\left(\frac{x}{A (\log x)^{\alpha \log 2 - 1}}\right)$ lorsque

$$A = O(\sqrt{x}).$$

Démonstration. La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i): Les nombres pour lesquels $\omega(n) \geq \alpha \log \log x$ vérifient $d(n) \geq 2^{\omega(n)}$ soit $d(n) \geq (\log x)^{\alpha \log 2}$.

On a

$$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod A \\ n \leq x}} d(n) \leq \sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod A \\ n \leq x}} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{n} \\ d|n}} 2 \leq \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \sum_{\substack{n \equiv n_0 \pmod A \\ d|n \\ n \leq x}} 1.$$

Or les nombres n sur lesquels s'effectue cette dernière sommation vérifient $n = n_0 + yA \equiv 0 \pmod d$. Si $(A, d) = 1$, cette congruence a une solution et une seule en y dans chaque intervalle de longueur d . Si $(A, d) \neq 1$, pour que cette congruence ait une solution, on doit avoir $(A, d) \mid n_0$, d'où $(A, n_0) \neq 1$; il n'y a donc pas de solutions. Finalement, il y a au plus une solution dans chaque intervalle de longueur d et la somme est

$$\leq \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \left(\frac{x}{Ad} + 1 \right) \leq 2\sqrt{x} + \frac{2x}{A} \left(1 + \frac{1}{2} \log x \right).$$

Remarque. Dans le cas $A = 1, \alpha = 2$, on trouve dans l'estimation (ii) le même exposant pour $\log x$ que dans la proposition 3. Ceci est à rapprocher du fait que (cf. [And])

$$\sum_{n \leq x; \omega(n) \sim 2 \log \log x} d(n) \sim x \log x.$$

Par des méthodes plus compliquées, il est possible d'obtenir pour (ii) une meilleure majoration.

LEMME 2. Soit $M = (a_{ij})$ une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans un corps K . Soit \mathcal{P} une partie de K et soit L_i le nombre d'éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M qui sont dans \mathcal{P} . Alors il y a au moins $n - \sum_{i=1}^m L_i$ colonnes de M dont tous les éléments sont dans $K - \mathcal{P}$.

Démonstration. Soit C_j le nombre d'éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui sont dans \mathcal{P} . On a

$$\sum_{j=1}^n C_j = \sum_{i=1}^m L_i \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j \neq 0}} 1 = n - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j = 0}} 1 \geq n - \sum_{j=1}^n C_j \\ = n - \sum_{i=1}^m L_i.$$

PROPOSITION 5. Supposons que pour n assez grand, il existe $k > 0$ et $j < n$ tel que

- i) $k \leq \omega(n)$,
- ii) $\omega(n) \leq j$,
- iii) $\omega(n-r) \geq j$ pour $r = 1, 2, \dots, j-1$,
- iv) $\omega(n+s) \leq k$ pour $s = 1, 2, \dots, [2 \log n]$.

Alors n est un point d'étranglement pour la fonction $n \mapsto n - \omega(n)$.

Démonstration. Soit $m < n$.

Ou bien on a $m \leq n - j$ et d'après ii), $m - \omega(m) < n - j \leq n - \omega(n)$, ou bien on a $n = m + r$ avec $1 \leq r \leq j - 1$ et iii) et ii) donnent

$$m - \omega(m) \leq m - j \leq m - \omega(n) < n - \omega(n).$$

Soit maintenant $m > n$.

Ou bien on a $m > n + 2 \log n$ et en remarquant que pour tout entier m , on a $\omega(m) \leq \frac{\log m}{\log 2} \leq \frac{3}{2} \log m$, on obtient, pour n assez grand :

$$m - \omega(m) \geq m - \frac{3}{2} \log m > n + 2 \log n - \frac{3}{2} \log(n + 2 \log n) \\ > n > n - \omega(n),$$

par la croissance de la fonction $x \mapsto x - \frac{3}{2} \log x$.

Ou bien on a $m \leq n + [2 \log n]$ et iv) donne alors

$$\omega(m) \leq k \leq \omega(n)$$

ce qui entraîne

$$m - \omega(m) > n - \omega(n).$$

Démonstration du théorème 4. La méthode suivante est celle de [Erd 2]. Pour assurer les hypothèses i) et iii) de la proposition 5, on va demander à n d'être solution du système de congruences

$$\left\{ \begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{B_0} \\ n \equiv 1 \pmod{B_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ n \equiv j-1 \pmod{B_{j-1}} \end{array} \right.$$

où B_0 est un produit de k nombres premiers et B_1, \dots, B_{j-1} des produits de j nombres premiers. On pose

$$A = \prod_{i=0}^{j-1} B_i.$$

D'après le théorème chinois, les solutions de ce système de congruences sont de la forme

$$n = n_0 + yA \quad \text{avec} \quad 0 \leq n_0 < A \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{N}.$$

On se donne x assez grand. On choisit

$$k = [3 \log \log x], \quad j = [6 \log \log x].$$

On prend les facteurs premiers de B_0, \dots, B_{j-1} distincts et compris entre $3 \log x$ et $4 \log x$, ce qui est possible d'après le théorème des nombres premiers. On a donc:

$$\log A \leq 6(\log \log x)^2 \log(4 \log x) = O(\log \log x)^3.$$

Maintenant, pour $1 \leq s \leq 2 \log x$, grâce au choix des facteurs premiers de A on a, pour la solution n_0 des congruences

$$(n_0 + s, A) = 1$$

et

$$(n_0, A) = B_0.$$

Considérons le tableau $(a_{s,y})$, $0 \leq s \leq 2 \log x$, $0 \leq y \leq \frac{x}{A} - 1$ défini par

$$\begin{aligned} a_{s,y} &= \omega(n_0 + s + yA) & \text{si} & \quad s \neq 0, \\ &= \omega\left(\frac{n_0 + yA}{B_0}\right) & \text{si} & \quad s = 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4, la $s^{\text{ième}}$ ligne de ce tableau contient au plus

$$O\left(\frac{x}{A(\log x)^{3 \log 2 - 1}}\right)$$

termes supérieures à $3 \log \log x$. D'après le lemme 2, il y a $\frac{x}{A}(1+o(1))$

colonnes y pour lesquelles

$$\begin{aligned} \omega(n_0 + s + yA) &\leq 3 \log \log x & \text{pour} & \quad s = 1, \dots, 2[\log x], \\ \omega(n_0 + yA) &\leq 6 \log \log x & \text{pour} & \quad s = 0. \end{aligned}$$

Pour une de ces valeurs de y , $n = n_0 + yA$ vérifie les 4 hypothèses de la proposition 5 et est donc un point d'étranglement de la fonction $n \mapsto n - \omega(n)$.

On peut raisonnablement conjecturer que pour ε assez petit, la fonction $n \mapsto n - d(n)^\varepsilon$ a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraisemblable que ce soit encore vrai pour $\varepsilon = 1$. D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que pour $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$, $n - (\omega(n) \log n)^{\omega(n)}$ est négatif, et donc cette fonction n'a qu'un nombre fini de points d'étranglement. On ne peut pas démontrer que $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ n'a pas de points d'étranglement: La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante: Quel est le plus petit t_k tel que $\omega(n + t_k) \geq k$. On a évidemment $t_k \leq 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de $n - \omega(n)^{\omega(n)}$.

Il n'est pas difficile de montrer que si n est un point d'étranglement pour la fonction $n - \omega(n)^{\omega(n)}$, alors $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$. Il semble vraisemblable que pour $n > n_0$, il existe $m > n$ avec $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$ et même, $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - e^{(\log n)^{1-\varepsilon}}$, ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout $n > n_0$, existe-t-il un $m > n$ tel que $m - d(m) < n - 2$. On a besoin de $n - 2$, parce que $\min_{m=n+1, n+2} m - d(m) \leq n - 2$, mais on ne sait rien à ce sujet.

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme: La démonstration suivante a été proposée par D. Bernardi et W. Narkiewicz.

Soit f additive ayant une suite infinie $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ de points d'étranglement et $a < b$. On peut trouver, pour n_k assez grand, dans l'intervalle $\left(\frac{n_k}{b}, \frac{n_k}{a}\right)$ un nombre c , premier à ab ; on aura alors

$$ca < n_k < cb,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et $f(a) < f(b)$.

RÉFÉRENCES

- [And] ANDERSON, I. On primitive sequences. *J. London Math. Soc.* 42 (1967), 137-148.
 [Com] COMTET, L. *Analyse combinatoire*. Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1970.
 [Del 1] DELANGE, H. Sur des formules dues à A. Selberg. *Bull. Sci. Math.* 83 (1959), 101-111.

- [Del 2] DELANGE, H. Sur des formules de A. Selberg. *Acta Arithmetica* 19 (1971), 105-146.
- [Dieu] DIEUDONNÉ, J. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968. collection Méthodes.
- [Erd 1] ERDÖS, P. On the integers having exactly k prime factors. *Ann. of Math.* (2) 49 (1948), 53-66.
- [Erd 2] — On arithmetical properties of Lambert series. *Journal Indian Math. Soc.* 12 (1948), 63-66.
- [Erd 3] — On the distribution function of additive functions. *Ann. of Math.* (2) 47 (1946), 1-20.
- [Hal 1] HALBERSTAM, H. and H. E. RICHERT. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.
- [Hal 2] HALBERSTAM, H. and K. F. ROTH. *Sequences*. Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
- [Har] HARDY, G. H. and S. RAMANUJAN. The normal number of prime factors of a number n . *Quart. J. of Math.* 48 (1917), 76-92 et *Collected papers of Ramanujan*, 262-275.
- [Kac] ERDÖS, P. and M. KAC. On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 25 (1939), 206-207.
The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions. *Amer. J. Math.* 62 (1940), 738-742.
- [Kol] KOLESNIK, G. and E. G. STRAUS. On the distribution of integers with a given number of prime factors (*à paraître*).
- [Land] LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Chelsea Publishing Company, 1953.
- [Lan] LANGEVIN, M. Sur la fonction plus grand facteur premier. *Séminaire Delange, Pisot, Poitou, Paris*. 16^e année 1974-1975, 29 p.
- [Mon] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. On the large sieve. *Mathematika* 20 (1973), 119-134.
- [Nel] NELSON, C., D. E. PENNEY and C. POMERANCE. 714 and 715. *J. Recreational Mathematics*, vol. 7, No. 2, Spring 1974.
- [Nic] NICOLAS, J. L. Répartition des nombres largement composés. *Séminaire Delange, Pisot, Poitou*. 19^e année, 1977-1978, n° 41 et *Acta Arithmetica* 34 (1979), 379-390.
- [Pis] PISOT, C. and I. J. SCHOENBERG. Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation. *Illinois J. of Math.* vol. 8, No. 1 (1964), 40-56.
- [Pra] PRACHAR, K. *Primzahlverteilung*. Springer Verlag 1957, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 91.
- [Ramac] RAMACHANDRA, K. A note on numbers with a large prime factor II. *J. Indian Math. Soc.* 34 (1970), 39-48.
- [Ram] HARDY, G. H. and S. RAMANUJAN. Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. *Proc. of the London Math. Soc.* 2, 16 (1917), 112-132. *Collected Papers of S. Ramanujan*, 245-261.
- [Rid] RIDOUT, D. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika* 4 (1957), 125-131.
- [Roth] ROTH, K. F. and G. SZEKERES. Some asymptotic formulae in the theory of partitions. *Quart. J. Math. Oxford* (2) 5 (1954), 241-259.
- [Sat] SATHE, L. G. On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors I, II, III, IV. *J. Indian Math. Soc.* 17 (1953), 63-141 et 18 (1954), 27-81.
- [Sch] SCHMIDT, W. M. Approximation to algebraic numbers. *Enseignement Mathématique* 17 (1971), 187-253 et *Monographies de l'Enseignement Mathématique* n° 19, 1972.

- [Sel 1] SELBERG, A. Note on a paper by L. G. Sathe. *J. Indian Math. Soc.* 18 (1954), 83-87.
- [Sel 2] — On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes. *Arch. Math. Naturvid.* 47 (1943), fasc. 6, 87-105.
- [Tij] TIJDEMAN, R. On the equation of Catalan. *Acta Arith.* 29 (1976), 197-209.
- [Tur] TURAN, P. On a theorem of Hardy and Ramanujan. *J. London Math. Soc.* 9 (1934), 274-276.
- [Wri] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford, at the Clarendon Press, IVth edition, 1960.

(Reçu le 15 novembre 1979)

Paul Erdős

Akademia Matematikai Intezete
Realtanoda u. 13-15
H-1053 Budapest, Hongrie

Jean-Louis Nicolas

Département de Mathématique
U.E.R. des Sciences de Limoges
123, avenue Albert-Thomas
F-87060 Limoges cédex, France