Formes modulaires modulo 2 : L'ordre de nilpotence des opérateurs de Hecke (version développée) *

Jean-Louis NICOLAS †

November 4, 2024

Abstract. Let $\Delta = \sum_{m=0}^{\infty} q^{(2m+1)^2} \in \mathbf{F}_2[[q]]$ be the reduction mod 2 of the Δ series. A modular form f modulo 2 of level 1 is a polynomial in Δ. If p is an odd prime, then the Hecke operator T_p transforms f in a modular form $T_p(f)$ which is a polynomial in Δ whose degree is smaller than the degree of f, so that T_p is nilpotent.

The order of nilpotence of f is defined as the smallest integer $g = g(f)$ such that, for every family of g odd primes $p_1, p_2, \ldots, p_g$, the relation $T_{p_1} T_{p_2} \ldots T_{p_g}(f) = 0$ holds. We show how one can compute explicitly $g(f)$; if f is a polynomial of degree $d \geqslant 1$ in Δ, one finds that $g(f) < \frac{3}{2}\sqrt{d}$.

Keywords: modular forms modulo 2, Hecke operators, order of nilpotence

Mathematics Subject Classification 2000: 11F33, 11F25.

1 Introduction

Soit

$$\Delta(q) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

où τ est la fonction de Ramanujan. Soit k un entier $\geqslant 0$. On écrit

$$\Delta^k(q) = \sum_{n=k}^{\infty} \tau_k(n) q^n.$$

Les congruences connues sur $\tau(n) \pmod 2$ (cf. [17]) montrent que

$$\Delta(q) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} q^{(2m+1)^2} \pmod 2,$$

ce qui entraîne

$$(1.1) \qquad n \not\equiv k \pmod 8 \implies \tau_k(n) \equiv 0 \pmod 2.$$

*Ce texte a été rédigé en 2012 à l'époque de la publication de la Note [11] et mis sur un site web devenu inaccessible.

†Recherche partiellement financée par le CNRS, Institut Camille Jordan, UMR 5208.

Une forme modulaire de niveau 1 modulo 2 est un polynôme $f(\Delta)$ à coefficients dans $\mathbf{F}_2$ (cf. par exemple [10, 15]); nous l'identifierons à une série formelle en la variable q, à coefficients dans $\mathbf{F}_2$. Nous nous intéresserons principalement aux formes paraboliques (celles dont le terme constant est 0). À partir de maintenant (sauf mention expresse du contraire), toutes les séries considérées sont à coefficients mod 2, et nous nous permettrons d'écrire

$$\Delta = \Delta(q) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{(2m+1)^2} \quad \in \mathbf{F}_2[[q]]. \tag{1.2}$$

Notons qu'une forme modulaire de poids w pair et de niveau 1 à coefficients entiers est congrue modulo 2 à un polynôme en Δ de degré

$$\leqslant w/12. \tag{1.3}$$

Les résultats principaux exposés ci-dessous ont été présentés dans la Note [11] (cf. aussi [12]). Nous en donnons dans cet article une démonstration complète.

2 Préliminaires

2.1 Les $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_7$

Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace de $\mathbf{F}_2[\Delta]$ engendré par $\Delta, \Delta^3, \Delta^5, \ldots$. Compte tenu de (1.1), on a

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_7 \tag{2.1}$$

où, pour $i \in \{1, 3, 5, 7\}$, $\mathcal{F}_i$ a pour base $\{\Delta^i, \Delta^{i+8}, \Delta^{i+16}, \ldots\}$.

Puisque $\Delta^{2k}(q) = \Delta^k(q^2)$, toute forme parabolique modulo 2, $f = \sum_{k\in\mathcal{K}} \Delta^k$ (où $\mathcal{K}$ est un ensemble de nombres entiers > 0) peut s'écrire comme une somme finie

$$f = \sum_{s\geqslant 0} f_s^{2^s} \quad \text{avec} \quad f_s \in \mathcal{F}, \tag{2.2}$$

en posant

$$f_s = \sum_{k\in\mathcal{K},\, v_2(k)=s} \Delta^{k2^{-s}}.$$

Toute forme modulaire f modulo 2 non parabolique s'écrit

$$f = 1 + \sum_{s\geqslant 0} f_s^{2^s} \quad \text{avec} \quad f_s \in \mathcal{F}. \tag{2.3}$$

2.2 Opérateurs de Hecke

Soit $f(q) = \sum_{n\geqslant 0} c_n q^n$ une forme modulaire modulo 2 et soit p un nombre premier > 2. L'opérateur de Hecke T_p transforme f en la forme

$$T_p|f = \sum_{n\geqslant 0} \gamma_n q^n \quad \text{avec } \gamma(n) = \begin{cases} c(pn) & \text{si } p \text{ ne divise pas } n \\ c(pn) + c(n/p) & \text{si } p \text{ divise } n. \end{cases} \tag{2.4}$$

[Nous écrirons parfois $T_p(f)$ à la place de $T_p|f$. On trouve également dans la littérature la notation $f|T_p$; nous ne nous en servirons pas.]

Si f est de degré $\leqslant k$ (comme polynôme en Δ), alors f est la réduction mod 2 d'une forme modulaire de poids $12\,k$ et il en est de même de $T_p|f$; on peut écrire $T_p|\Delta^k$ sous la forme

$$T_p|\Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \mu_j \Delta^j, \quad \text{avec } \mu_j \in \mathbf{F}_2. \tag{2.5}$$

Supposons maintenant k impair. Les formules (1.1) et (2.4) entraînent que

$$j \not\equiv pk \pmod 8 \quad \Longrightarrow \quad \mu_j = 0. \tag{2.6}$$

En particulier, on a

$$T_p(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_j \quad \text{si} \quad j \equiv pi \pmod 8. \tag{2.7}$$

L'opérateur de Hecke T_p commute avec les opérations $f \mapsto f^{2^s}$ de sorte que, si l'on connaît l'action de T_p sur $\mathcal{F}$, par (2.2), on la connaît sur toutes les formes paraboliques.

2.3 Nilpotence des opérateurs de Hecke modulo 2

Une des propriétés essentielles de l'opérateur de Hecke T_p modulo 2 est qu'il est nilpotent; autrement dit, dans (2.5), le coefficient μ_k est nul. Lorsque $p \equiv 3, 5, 7 \pmod 8$, cela résulte de (2.6). Le cas $p \equiv 1 \pmod 8$ est plus délicat (cf. [5, 13, 15]). Nous en donnerons une autre preuve au §5.2.

De la nilpotence de T_p, de (2.5) et de (2.6), on déduit pour tout p premier $\geqslant 3$, et tout k impair positif,

$$T_p|\Delta^k = \sum_{\substack{j \equiv pk \pmod 8 \\ 1 \leqslant j \leqslant k-2}} \mu_j \Delta^j, \quad \text{avec } \mu_j \in \mathbf{F}_2. \tag{2.8}$$

2.4 Détermination de $T_p|\Delta, T_p|\Delta^3, T_p|\Delta^5$ et $T_p|\Delta^7$

Proposition 2.1 (i) *Pour tout nombre premier p, on a $T_p|\Delta = 0$.*

(ii) *Si $p \equiv 3 \pmod 8$, on a $T_p|\Delta^3 = \Delta$; sinon, on a $T_p|\Delta^3 = 0$.*

(iii) *Si $p \equiv 5 \pmod 8$, on a $T_p|\Delta^5 = \Delta$; sinon, on a $T_p|\Delta^5 = 0$.*

(iv) *On a:*

$$T_p|\Delta^7 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \equiv 1 \pmod 8 \quad \text{ou si} \quad p \equiv -1 \pmod{16} \\ \Delta^5 & \text{si} \quad p \equiv 3 \pmod 8 \\ \Delta^3 & \text{si} \quad p \equiv 5 \pmod 8 \\ \Delta & \text{si} \quad p \equiv 7 \pmod{16}. \end{cases}$$

[Les points (ii) et (iii) figurent en exercice dans [14, §6.7]. Le point (iv) était connu de J. Oesterlé.]

Démonstration:

(i) Cela se démontre par un calcul direct à partir de (1.2) et (2.4), ou bien en utilisant (2.8).

(ii) Par (2.8), on a $T_p|\Delta^3 = 0$ si $p \equiv 1, 5$ ou $7 \pmod 8$ tandis que, si $p \equiv 3 \pmod 8$, on a $T_p|\Delta^3 = \mu\Delta$, avec $\mu = 0$ ou $\mu = 1$. Écrivons $T_p|\Delta^3 = \sum_{n\geqslant 1} \gamma_n q^n$. Par (2.4), $\gamma_1 = \mu$ est le coefficient de q^p dans $\Delta^3 = \Delta\Delta^2$. Par (1.2), μ est donc congru mod 2 au nombre de solutions de l'équation diophantienne $x^2 + 2y^2 = p$ avec x et y positifs et impairs. Comme $p \equiv 3 \pmod 8$, ce nombre de solutions est égal à 1, ce qui donne $\mu = 1$.

(iii) La démonstration est analogue à celle de (ii). On a $T_p|\Delta^5 = 0$ si $p \equiv 1$ ou $3 \pmod 8$, $T_p|\Delta^5 = \lambda\Delta$ avec $\lambda = 0$ ou 1 si $p \equiv 5 \pmod 8$ et $T_p|\Delta^5 = \mu\Delta^3$ avec $\mu = 0$ ou 1 si $p \equiv 7 \pmod 8$. On montre que $\lambda = 1$ en considérant dans $T_p|\Delta^5 = T_p|(\Delta\Delta^4)$ le coefficient de q; on montre que $\mu = 0$ en considérant celui de q^3.

(iv) Démontrons d'abord que l'on a

$$\Delta^7(q) \equiv \sum_{n\equiv 7 \pmod 8} \frac{\sigma_1(n)}{8}\, q^n \pmod 2 \tag{2.9}$$

où $\sigma_1(n)$ désigne la somme des diviseurs de n.

Le nombre de façons d'écrire $n \equiv 7 \pmod 8$ comme somme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ avec $x, y, z, t \in \mathbf{Z}$ est égal à $8\sigma_1(n)$ (cf. [4, Th. 386]) ; dans une telle représentation, aucun des quatre nombres x, y, z, t n'est nul, car n n'est pas somme de trois carrés. Le nombre de solutions positives de $x^2+y^2+z^2+t^2 = n$ est donc $\frac{\sigma_1(n)}{2}$. Maintenant, l'un des quatre nombres x, y, z, t est congru à $2 \pmod 4$. Il y a donc $\frac{\sigma_1(n)}{8}$ solutions avec x pair et y, z, t impair; ce qui par (1.2), et par $\Delta^7 = \Delta^4\Delta\Delta\Delta$, démontre (2.9).

Soit $p \equiv 1 \pmod 8$. Par (2.8), on a $T_p(\Delta^7) = 0$.

Soit $p \equiv 3 \pmod 8$. Par (2.8), on a $T_p(\Delta^7) = 0$ ou Δ^5. Le coefficient de q^5 dans $T_p(\Delta^7)$ est, par la formule (2.9), congru modulo 2 à

$$\frac{\sigma_1(5p)}{8} = \frac{6(p+1)}{8} \equiv 1 \pmod 2.$$

Soit $p \equiv 5 \pmod 8$. On a $T_p(\Delta^7) = 0$ ou Δ^3. Le coefficient de q^3 dans $T_p(\Delta^7)$ est, par la formule (2.9), congru modulo 2 à

$$\frac{\sigma_1(3p)}{8} = \frac{4(p+1)}{8} \equiv 1 \pmod 2.$$

Soit $p \equiv 7 \pmod 8$. On a $T_p(\Delta^7) = 0$ ou Δ. Le coefficient de q dans $T_p(\Delta^7)$ est, par la formule (2.9), congru modulo 2 à

$$\frac{\sigma_1(p)}{8} = \frac{p+1}{8} \equiv \begin{cases} 1 \pmod 2. & \text{si } p \equiv 7 \pmod{16} \\ 0 \pmod 2. & \text{si } p \equiv 15 \pmod{16}. \end{cases} \qquad \square$$

2.5 L'ordre de nilpotence

Par définition, *l'ordre de nilpotence* d'une forme modulaire $f \in \mathbf{F}_2[\Delta]$ est le plus petit entier $g = g(f)$ tel que, pour toute suite de g nombres premiers impairs $p_1, p_2, \ldots, p_g$, on ait $T_{p_1}T_{p_2}\ldots T_{p_g}|f = 0$.

[Comme les T_p commutent entre eux, l'ordre dans lequel on écrit les T_{p_i} n'a pas d'importance. Noter aussi que l'on ne suppose pas que les p_i soient distincts.]

Lorsque $f = 0$, on convient que

$$g(f) = -\infty. \tag{2.10}$$

Nous désignerons par $g(k) = g(\Delta^k)$ l'ordre de nilpotence de Δ^k. Comme chaque T_p abaisse le degré en Δ d'au moins 2 unités, on a

$$g(k) \leqslant \frac{k+1}{2}\cdot$$

Soit p un nombre premier impair; il résulte de la définition de l'ordre de nilpotence d'une forme modulaire $f \in \mathcal{F}$ que l'on a

$$g(f) \geqslant g(T_p|f) + 1. \tag{2.11}$$

Si $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathbf{F}_2[\Delta]$, on a

$$g(f_1 + f_2 + \ldots + f_r) \leqslant \max(g(f_1), g(f_2), \dots, g(f_r)). \tag{2.12}$$

La proposition 2.1 permet de calculer les ordres de nilpotence des éléments de $\mathcal{F}$ de degré $\leqslant 7$; on a

$$g(0) = -\infty,\ g(\Delta) = 1,\ g(\Delta^3) = g(\Delta^3 + \Delta) = 2, \tag{2.13}$$

$$g(\Delta^5) = g(\Delta^5 + \Delta) = g(\Delta^5 + \Delta^3) = g(\Delta^5 + \Delta^3 + \Delta) = 2 \tag{2.14}$$

$$g(\Delta^7 + a_5\Delta^5 + a_3\Delta^3 + a_1\Delta) = 3 \quad \text{pour } a_1, a_3, a_5 \in \mathbf{F}_2.$$

3 Calcul des $T_p|\Delta^k$: une récurrence linéaire

Soit p un nombre premier > 2.

Théorme 3.1. *Il existe un unique polynôme symétrique $F_p(X, Y) \in \mathbf{F}_2[X, Y]$,*

$$F_p(X, Y) = Y^{p+1} + s_1(X)Y^p + \ldots + s_p(X)Y + s_{p+1}(X) \tag{3.1}$$

de degré $p + 1$ tel que

$$T_p(\Delta^k) = \sum_{r=1}^{p+1} s_r(\Delta)\ T_p(\Delta^{k-r}) \tag{3.2}$$

pour tout $k \geqslant p + 1$. De plus, pour $1 \leqslant r \leqslant p + 1$, $s_r(X)$ est une somme de monômes en X dont les degrés sont congrus à pr modulo 8 et sont $\leqslant r$.

On a

$$F_3(X, Y) = Y^4 + XY + X^4 \tag{3.3}$$

et

$$F_5(X, Y) = Y^6 + X^2Y^4 + X^4Y^2 + XY + X^6. \tag{3.4}$$

Démonstration : Considérons d'abord, en caractéristique 0, une forme modulaire complexe $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ de poids k et de niveau 1 et ζ une racine primitive p-ième de l'unité, auxquelles on associe $p + 1$ séries de la manière suivante:

- $f_0 = f_0(q) = p^k f(q^p) = p^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{pn}$,

et, pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

- $f_i = f_i(q) = f(\zeta^i q^{1/p}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{ni} q^{n/p}$

vue comme série en $q^{1/p}$. Pour $r \geqslant 0$, on définit la somme de Newton

$$N_r = \sum_{i=0}^{p} f_i^r.$$

Écrivons $f^r = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n)^r = \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$. Il vient

$$\begin{aligned} f_0^r &= p^{kr} f^r(q^p) = p^{kr} \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^{pn} \\ f_i^r &= f^r(\zeta^i q^{1/p}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{ni} q^{n/p} \end{aligned}$$

d'où,

$$N_r = p^{kr} \sum_{\substack{m=0 \\ p|m}}^{\infty} b_{m/p} q^m + p \sum_{m=0}^{\infty} b_{pm} q^m$$

et, par définition de l'opérateur de Hecke,

$$N_r = p \cdot T_p | f^r. \tag{3.5}$$

Ainsi, N_r est une forme modulaire de poids kr et de niveau 1. Pour $1 \leqslant r \leqslant p+1$, on définit la r-ième fonction symétrique

$$s_r = s_r(f) = \sum_{0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant p} f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_r}. \tag{3.6}$$

On sait que les sommes N_r sont reliées aux fonctions symétriques s_r par les formules dites de Newton:

$$N_r - s_1 N_{r-1} + \ldots + (-1)^{r-1} s_{r-1} N_1 + (-1)^r r s_r = 0 \quad (1 \leqslant r \leqslant p+1) \tag{3.7}$$

et

$$N_r - s_1 N_{r-1} + \ldots - s_p N_{r-p} + s_{p+1} N_{r-p-1} = 0 \quad (r \geqslant p+2). \tag{3.8}$$

Les formules (3.7) permettent de calculer les s_r en fonction des sommes N_r et montrent par récurrence que, pour $1 \leqslant r \leqslant p+1$, s_r est une forme modulaire de niveau 1 et de poids kr.

La formule (3.8) montre que $T_p | f^r = N_r / p$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre $p+1$ dont le polynôme caractéristique est

$$F_p(f, Y) = \prod_{i=0}^{p} (Y - f_i) = Y^{p+1} + \sum_{r=1}^{p+1} (-1)^r s_r(f) Y^r. \tag{3.9}$$

Supposons maintenant les coefficients a_n entiers, autrement dit, $f \in \mathbf{Z}[[q]]$. Pour $r \geqslant 0$, $T_p|f^r \in \mathbf{Z}[[q]]$, et par (3.5), on a $N_r \in \mathbf{Z}[[q]]$. Pour $1 \leqslant r \leqslant p+1$, en extrayant s_r de l'équation (3.7), on voit par récurrence que

$$r!\, s_r \in \mathbf{Z}[[q]]. \tag{3.10}$$

Ensuite, en développant (3.6), on obtient

$$s_r = \sum_{m=0}^{\infty} A_m q^{m/p} \quad \text{avec} \quad A_m \in \mathbf{Z}[\zeta] \tag{3.11}$$

et, plus précisément,

$$\begin{aligned} A_m \quad &= \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{r-1}\leqslant p} \quad \sum_{\substack{n_0,n_1,\ldots,n_{r-1}\geqslant 0\\ p^2 n_0+n_1+\ldots+n_{r-1}=m}} p^k\, a_{n_0} a_{n_1}\ldots a_{n_{r-1}} \zeta^{i_1 n_1+\ldots+i_{r-1}n_{r-1}} \\ &+ \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant p} \quad \sum_{\substack{n_1,n_2,\ldots,n_r\geqslant 0\\ n_1+n_2+\ldots+n_r=m}} a_{n_1} a_{n_2}\ldots a_{n_r} \zeta^{i_1 n_1+\ldots+i_r n_r}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

En comparant (3.10) et (3.11), on conclut

$$s_r = \sum_{m=0}^{\infty} A_{pm}\, q^m \in \mathbf{Z}[[q]]. \tag{3.13}$$

Supposons maintenant $f = \Delta$; on a $a_n = \tau(n)$ et, par (1.2), $a_n \equiv 0 \pmod 2$ lorsque $n \not\equiv 1 \pmod 8$. Pour calculer $A_m \mod 2$, on peut donc ajouter la condition $n_i \equiv 1 \pmod 8$ pour les indices n_i, $0 \leqslant i \leqslant r$, figurant dans la formule (3.12), ce qui entraîne

$$A_m \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{si} \quad m \not\equiv r \pmod 8. \tag{3.14}$$

Mais, sur $\mathbf{C}$, la forme modulaire s_r est de poids $12\,r$ et donc modulo 2 est, par (1.3), un polynôme en Δ de degré $\leqslant r$. (3.13) et (3.14) montrent que les degrés des monômes de ce polynôme sont $\equiv pr \pmod 8$. La formule de récurrence (3.2) s'obtient en réduisant modulo 2 les relations (3.8) et (3.5).

Comme $f_0 = p^{12}\Delta(q^p) \equiv \Delta(q^p) \pmod 2$, on a

$$F_p(\Delta(q), \Delta(q^p)) \equiv 0 \pmod 2. \tag{3.15}$$

Puisque s_r est un polynôme en Δ de degré $\leqslant r$, pour connaître la valeur de s_r en fonction de Δ, Il suffit de calculer les termes du développement en série de s_r à l'ordre q^{r+1}.

Exemple : $p = 3$. Par (3.9), on a

$$\begin{aligned} F_3(\Delta, Y) \quad &\equiv \quad (Y+q^3)\prod_{i=1}^{3}(Y+\zeta^i q^{1/3}+q^3) \\ &\equiv \quad (Y+q^3)((Y+q^3)^3+q) \equiv Y^4+qY+q^4 \pmod{q^5} \end{aligned}$$

d'où

$$F_3(\Delta, Y) \equiv Y^4 + \Delta Y + \Delta^4 \pmod 2,$$

ce qui démontre (3.3).
Vu (3.3), cela donne un procédé de calcul des $T_3|\Delta^k$; si t est une indéterminée, on a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_3(\Delta^k)t^k = \frac{\Delta t^3}{1+\Delta^3 t+\Delta^4 t^4}.$$

On peut aussi calculer les sommes de Newton $N_r = T_p|\Delta^r \bmod 2$ et résoudre les équations (3.7) et (3.8) pour déterminer les s_r modulo 2.

Exemple : $p=5$. On a $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_6 = N_8 = N_9 = N_{11} = 0$, $N_5 = \Delta$, $N_7 = \Delta^3$, $N_{10} = \Delta^2$ et les équations (3.7) et (3.8) commençant par $N_1, N_3, N_5, N_7, N_9, N_{11}$ donnent successivement $s_1 = N_1 = 0$, $s_3 = N_3 = 0$, $s_5 = N_5 = 0$, $s_2 = N_7/N_5 = \Delta^2$, $s_4 = s_2N_7/N_5 = \Delta^4$, $s_6 = s_4N_7/N_5 = \Delta^6$, d'où

$$F_5(\Delta, Y) \equiv Y^6 + \Delta^2Y^4 + \Delta^4Y^2 + \Delta Y + \Delta^6 \pmod 2,$$

ce qui prouve (3.4).

La méthode ci-dessus a été programmée avec succès en SAGE par M. Deléglise jusqu' à $p=257$. On trouvera la table des polynômes $F_p(X,Y)$ pour $p \leqslant 257$ et la méthode de calcul sur le site [18].
On peut calculer $T_5|\Delta^k$ à l'aide de la relation:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_5(\Delta^k)t^k = \frac{\Delta t^5}{1+\Delta^2t^2+\Delta^4t^4+\Delta^5t^5+\Delta^6t^6}.$$

Une autre façon de procéder est d'utiliser l'équation modulaire (cf. [2] ou [9]). Soit la série d'Eisenstein $Q = 1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n$, avec $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$. On définit l'invariant modulaire j par

$$j = j(q) = \frac{Q^3}{\Delta} = \frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \ldots$$

Comme $Q \equiv 1 \pmod 2$, on a

$$j \equiv 1/\Delta \pmod 2.$$

On sait que, pour chaque p, il existe un unique polynôme $\Phi_p(X,Y) \in \mathbf{Z}[X,Y]$, symétrique et irréductible, unitaire de degré $p+1$ en chaque variable, qui vérifie

$$\Phi_p(j(q), j(q^p)) = 0.$$

Supposons, comme ci-dessus, que $p \neq 2$. En remplaçant j par $1/\Delta$, on a donc, par (3.15)

$$F_p(\Delta, Y) \equiv Y^{p+1}\Delta^{p+1}\Phi_p(1/\Delta, 1/Y) \pmod 2.$$

Le calcul de Φ_p a fait l'objet de nombreux articles : Smith ([16]) a calculé Φ_3 (la valeur de Φ_3 est recopiée dans [2]), Berwick ([1]) a calculé Φ_5, Kaltofen et Yui ([7, 8]) ont calculé Φ_7 et Φ_{11} et Ito ([6]) a calculé Φ_p pour $p \leqslant 53$.

Variante. On peut présenter les constructions ci-dessus d'une autre manière. Posons $\Lambda = \mathbf{F}_2[\Delta]$ et $\Lambda_p = \Lambda[Y]/(F_p(\Delta,Y))$. Notons y l'image de Y dans Λ_p.

L'algèbre Λ_p est un Λ-module libre de rang $p+1$, de base $\{1, y, ..., y^p\}$, et la trace $\mathrm{Tr} \,:\, \Lambda_p \to \Lambda$ a la propriété que

$$\mathrm{Tr}\,(y^k) = T_p|\Delta^k \tag{3.16}$$

pour tout $k \geqslant 0$. Une autre façon d'écrire cette formule consiste à introduire la matrice A de la multiplication par y dans le Λ-module Λ_p; c'est une matrice à coefficients dans Λ (qui dépend de p, bien entendu), et, pour tout $k \geqslant 0$, on a : $\mathrm{Tr}\,(A^k) = T_p|\Delta^k$. □

4 Les opérateurs de Hecke T_3 et T_5

4.1 Les nombres $\mathbf{n_3(k)}$, $\mathbf{n_5(k)}$ et $\mathbf{h(k)}$

Soit k un nombre entier $\geqslant 0$ et son écriture dyadique $k = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i 2^i$ (avec $\beta_i = 0$ ou 1). On appelle *support* de k l'ensemble

$$\mathcal{S}(k) = \{2^i, i \geqslant 1 \text{ et } \beta_i \neq 0\}; \tag{4.1}$$

on a

$$k = \begin{cases} 1 + \sum_{x \in \mathcal{S}(k)} x & \text{si } k \text{ est impair} \\ \sum_{x \in \mathcal{S}(k)} x & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

On note que $\mathcal{S}(k)$ ne contient pas 1. On pose

$$n_3(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1} 2^i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{\infty} \beta_i 2^{\frac{i-1}{2}}, \quad n_5(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+2} 2^i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^{\infty} \beta_i 2^{\frac{i-2}{2}}.$$

Observons que l'on a, pour i pair, $n_3(2^i) = 0$ et, pour i impair $n_5(2^i) = 0$. On a ainsi

$$n_3(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i n_3(2^i), \qquad n_5(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i n_5(2^i). \tag{4.2}$$

On pose ensuite

$$h(k) = n_3(k) + n_5(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 2^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor}$$

et l'on a

$$h(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i h(2^i) \tag{4.3}$$

avec

$$h(2^i) = 2^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} = \begin{cases} n_3(2^i) = 2^{\frac{i-1}{2}} & \text{si } i \text{ est impair} \\ n_5(2^i) = 2^{\frac{i-2}{2}} & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Notons que l'on a pour $\ell \geqslant 0$

$$n_3(2\ell+1) = n_3(2\ell), \quad n_5(2\ell+1) = n_5(2\ell), \quad h(2\ell+1) = h(2\ell). \tag{4.5}$$

Nous appellerons $[n_3(k), n_5(k)]$ le *code* du nombre k et nous écrirons

$$k \simeq [n_3(k), n_5(k)].$$

L'application $k \mapsto [n_3(k), n_5(k)]$ est une bijection de l'ensemble des nombres impairs (resp. pairs) $\geqslant 0$ sur $\mathbf{N}^2$.

Pour k impair, les premières valeurs du code de k sont données dans la table ci-dessous.

(4.6)

k	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_3, n_5	$0,0$	$1,0$	$0,1$	$1,1$	$2,0$	$3,0$	$2,1$	$3,1$	$0,2$	$1,2$	$0,3$
h	0	1	1	2	2	3	3	4	2	3	3

Notons que la classe de k modulo 8 donne la parité de $n_3(k)$, $n_5(k)$ et $h(k)$:

(4.7)

k mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
$n_3(k)$ mod 2	0	0	1	1	0	0	1	1
$n_5(k)$ mod 2	0	0	0	0	1	1	1	1
$h(k)$ mod 2	0	0	1	1	1	1	0	0

.

Si k est impair, on a

$$2k \simeq [1 + 2n_5(k), n_3(k)], \qquad 4k \simeq [2n_3(k), 1 + 2n_5(k)] \tag{4.8}$$

tandis que, si k est pair, on a

$$2k \simeq [2n_5(k), n_3(k)], \qquad 4k \simeq [2n_3(k), 2n_5(k)]. \tag{4.9}$$

L'ordre de grandeur de $h(k)$ est $\sqrt{k}$, cf. §5.3.

4.2 Propriétés de la fonction $h(k)$

Lemme 4.1 *Soient b un entier, $b \geqslant 1$. Posons*

$$H(b) = \left(\sum_{i=1}^{b} h(2^i) \right) - 2h(2^b). \tag{4.10}$$

On a

$$H(b) = 2^{\lfloor b/2 \rfloor} - 2. \tag{4.11}$$

Démonstration : Posons $S(b) = \sum_{i=1}^{b} h(2^i)$. Lorsque b est pair, $b = 2a$, par (4.4) il vient

$$S(b) = S(2a) = 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + 2^{a-1} + 2^{a-1} = 2^{a+1} - 2$$

et

$$H(2a) = S(2a) - 2h(2^{2a}) = 2^{a+1} - 2 - 2 \cdot 2^{a-1} = 2^a - 2 = 2^{\lfloor b/2 \rfloor} - 2.$$

Lorsque b est impair, $b = 2a - 1$, il vient

$$S(b) = S(2a-1) = S(2a) - h(2^{2a}) = 2^{a+1} - 2 - 2^{a-1} = 3 \cdot 2^{a-1} - 2$$

et

$H(b) = S(b) - 2h(2^b) = 3 \cdot 2^{a-1} - 2 - 2 \cdot 2^{a-1} = 2^{a-1} - 2 = 2^{\lfloor b/2 \rfloor} - 2.$ $\square$

Soient k et ℓ deux nombres entiers $\geqslant 0$. Soient $\mathcal{S}(k)$ et $\mathcal{S}(\ell)$ leurs supports (cf. (4.1)). Si l'on a $\mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell) = \varnothing$, cela implique

$$h(k+\ell) = \begin{cases} h(k) + h(\ell) & \text{si } k \text{ et } \ell \text{ ne sont pas tous deux impairs} \\ h(k) + h(\ell) + 1 & \text{si } k \equiv \ell \equiv 1 \pmod 4. \end{cases} \tag{4.12}$$

Proposition 4.2 *(i) Si k et ℓ ne sont pas tous deux impairs, on a*

$$h(k+\ell) \leqslant h(k) + h(\ell). \tag{4.13}$$

Supposons qu'il y ait égalité dans (4.13)*, alors $\mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)$ est vide ou ne contient que des puissances d'exposant pair de 2; si de plus $2^a \in \mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)$, alors $2^{a+1} \notin \mathcal{S}(k) \cup \mathcal{S}(\ell)$; et, on a*

$$n_5(k+\ell) = n_5(k) + n_5(\ell) - \sum_{2^a \in \mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)} 2^{a/2}. \tag{4.14}$$

(ii) Si k et ℓ sont impairs, on a

$$h(k+\ell) \leqslant h(k) + h(\ell) + 1. \tag{4.15}$$

S'il y a égalité dans (4.15)*, alors $k \equiv \ell \equiv 1 \pmod 4$, $\mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)$ est vide ou ne contient que des puissances d'exposant pair de 2, $2^a \in \mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)$ entraîne $2^{a+1} \notin \mathcal{S}(k) \cup \mathcal{S}(\ell)$ et l'on a, comme en (i)*

$$n_5(k+\ell) = n_5(k) + n_5(\ell) - \sum_{2^a \in \mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)} 2^{a/2}. \tag{4.16}$$

Démonstration : (i) Posons les développements dyadiques : $k = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i 2^i$, $\ell = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i 2^i$, $k + \ell = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i 2^i$.

Si $\mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell) = \varnothing$, par (4.12), on a $h(k+\ell) = h(k) + h(\ell)$ et, similairement, $n_5(k+\ell) = n_5(k) + n_5(\ell)$ ce qui prouve (4.13) et (4.14).

Si $\mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell) \neq \varnothing$, on définit par récurrence les suites $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ (avec $r \geqslant 1$) : a_1 est le plus petit nombre tel que $\beta_{a_1} = \gamma_{a_1} = 1$ (donc $a_1 \geqslant 1$, car k et ℓ ne sont pas tous deux impairs) et b_1 est le plus petit nombre vérifiant $b_1 > a_1$ et $\beta_{b_1} = \gamma_{b_1} = 0$. Lorsque a_{j-1} et b_{j-1} ont été déterminés, on choisit pour a_j le plus petit nombre tel que $a_j > b_{j-1}$ et $\beta_{a_j} = \gamma_{a_j} = 1$ et pour b_j le plus petit nombre vérifiant $b_j > a_j$ et $\beta_{a_j} = \gamma_{a_j} = 0$. Le processus s'arrête lorsque l'on a $\beta_i + \gamma_i \leqslant 1$ pour $i > b_r$.

Notons que, si $i \notin \cup_{j=1}^{r} [a_j, bj]$, les chiffres β_i et γ_i s'additionnent sans retenue et l'on a

$$i \notin \bigcup_{j=1}^{r} [a_j, bj] \quad \Longrightarrow \quad \delta_i = \beta_i + \gamma_i. \tag{4.17}$$

Par la formule (4.3), on en déduit

$$\begin{aligned} h(k+\ell) - h(k) - h(\ell) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_i - \beta_i - \gamma_i) h(2^i) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{a_j \leqslant i \leqslant b_j} (\delta_i - \beta_i - \gamma_i) h(2^i). \end{aligned}$$

Pour j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant r$, on a $\beta_{a_j} = \gamma_{a_j} = 1$, $\delta_{a_j} = 0$ (donc $\delta_{a_j} - \beta_{a_j} - \gamma_{a_j} = -2$), $\beta_{b_j} = \gamma_{b_j} = 0$, $\delta_{b_j} = 1$ (donc $\delta_{b_j} - \beta_{b_j} - \gamma_{b_j} = 1$), et, pour $a_j < i < b_j$, ou bien $\beta_i + \gamma_i = 1$ et $\delta_i = 0$ ou bien $\beta_i + \gamma_i = 2$ et $\delta_i = 1$; mais dans les deux cas, $\delta_i - \beta_i - \gamma_i$ est égal à -1. En utilisant la notation (4.10) et en appliquant (4.11), il vient

$$\begin{aligned} h(k+\ell) - h(k) - h(\ell) &= \sum_{j=1}^{r} \left(-2h(2^{a_j}) + h(2^{b_j}) - \sum_{a_j < i < b_j} h(2^i) \right) \\ (4.18) = \sum_{j=1}^{r} (H(a_j) - H(b_j)) &= \sum_{j=1}^{r} \left(2^{\lfloor a_j/2 \rfloor} - 2^{\lfloor b_j/2 \rfloor} \right) \leqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre (4.13).

Supposons $h(k+\ell) = h(k) + h(\ell)$; il faut que, dans (4.18), pour tout j, on ait $2^{\lfloor a_j/2 \rfloor} = 2^{\lfloor b_j/2 \rfloor}$ ce qui impose a_j pair et $b_j = a_j + 1$; ainsi, les seuls éléments de $\mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)$ sont $2^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, 2^{a_r}$.

Par (4.2) et (4.17), on a

$$\begin{aligned} n_5(k+\ell) - n_5(k) - n_5(\ell) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\delta_i - \beta_i - \gamma_i) n_5(2^i) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=a_j}^{b_j} (\delta_i - \beta_i - \gamma_i) n_5(2^i) \\ &= \sum_{j=1}^{r} (\delta_{a_j} - \beta_{a_j} - \gamma_{a_j}) n_5(2^{a_j}) + (\delta_{a_j+1} - \beta_{a_j+1} - \gamma_{a_j+1}) n_5(2^{a_j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{r} -2n_5(2^{a_j}) = \sum_{j=1}^{r} -2 \cdot 2^{\frac{a_j-2}{2}} = -\sum_{j=1}^{r} 2^{a_j/2} \end{aligned}$$

ce qui démontre (4.14) et termine la preuve de (i).

(ii) Lorsque k et ℓ sont impairs, par (4.5), on a $h(k) = h(k-1)$, $h(\ell - 1) = h(\ell)$, et par (4.13), on obtient

$$\begin{aligned} (4.19) \quad h(k+\ell) &= h(k-1+\ell-1+2) \leqslant h(k-1+\ell-1) + h(2) \\ (4.20) \quad &\leqslant h(k-1) + h(\ell-1) + h(2) = h(k) + h(\ell) + 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve (4.15).

Supposons $h(k+\ell) = h(k) + h(\ell) + 1$; on doit avoir égalité dans (4.19); comme $\mathcal{S}(2) = \{2\}$, (i) implique $2 \notin \mathcal{S}(k+\ell-2)$, ce qui entraîne $k+\ell-2$ multiple de 4 et $k \equiv \ell \pmod 4$. Puisque $\mathcal{S}(2) \cap \mathcal{S}(k+\ell-2) = \varnothing$, il vient par (4.14)

$$(4.21) \qquad n_5(k+\ell) = n_5(k-1+\ell-1) + n_5(2) = n_5(k-1+\ell-1).$$

On doit aussi avoir égalité dans (4.20), soit $h(k-1+\ell-1) = h(k-1) + h(\ell-1)$. Comme $\mathcal{S}(k) = \mathcal{S}(k-1)$ et $\mathcal{S}(\ell) = \mathcal{S}(\ell-1)$, cela entraîne que $\mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)$ ne contient que des puissances d'exposant pair de 2 (en particulier, $2 \notin \mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)$

ce qui, puisque $k \equiv \ell \pmod 4$, implique $k \equiv \ell \equiv 1 \pmod 4$) et que, si $2^a \in \mathcal{S}(k) \cap \mathcal{S}(\ell)$, alors $2^{a+1} \notin \mathcal{S}(k) \cup \mathcal{S}(\ell)$. De plus, on a, par (4.21) et (4.14)

$$n_5(k+\ell) = n_5(k-1+\ell-1) = n_5(k-1) + n_5(\ell-1) - \sum_{2^a \in \mathcal{S}(k)\cap\mathcal{S}(\ell)} 2^{a/2}$$

et, comme $n_5(k-1) = n_5(k)$ et $n_5(\ell-1) = n_5(\ell)$, cela prouve (4.16). $\square$

Corollaire 4.3 *Soit k un nombre entier, $k \geqslant 0$. On a*

$$h(k+1) \begin{cases} = h(k) & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ \leqslant h(k)+1 & \textit{si } k \textit{ est impair} \end{cases} \tag{4.22}$$

$$h(k+2) \begin{cases} = h(k)+1 & \textit{si } k \equiv 0,1 \pmod 4 \\ \leqslant h(k) & \textit{si } k \equiv 2,3 \pmod 4. \end{cases} \tag{4.23}$$

$$h(k+3) \leqslant h(k)+1 \qquad \textit{si } k \geqslant 0. \tag{4.24}$$

$$h(k+4) \leqslant h(k)+1 \qquad \textit{si } k \geqslant 0. \tag{4.25}$$

Nous utiliserons la relation d'ordre suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels pairs (ou impairs):

Definition 4.4 *Si k et ℓ ont même parité, on dit que ℓ domine k et on écrit*

$$k \prec \ell \quad \textit{ou} \quad \ell \succ k \tag{4.26}$$

si l'on a $h(k) < h(\ell)$ ou bien $h(k) = h(\ell)$ et $n_5(k) < n_5(\ell)$. La relation

$$k \preccurlyeq \ell \quad \textit{définie par } k \prec \ell \textit{ ou } k = \ell, \tag{4.27}$$

est une relation d'ordre total sur l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs) $\geqslant 0$.

[Notons que $k \prec \ell$ n'implique pas forcément $a+k \prec a+\ell$: exemple $a = 4, k = 2, \ell = 4$.]

4.3 La fonction h pour les polynômes

Nous dirons qu'un polynôme $P \in \mathbf{F}_2[x]$ est pair (resp. impair) s'il est nul ou si tous ses exposants sont pairs (resp. s'il est non nul et si tous ses exposants sont impairs). Dans ce paragraphe, nous supposons que tous les polynômes de $\mathbf{F}_2[x]$ considérés sont soit pairs soit impairs. À l'aide de la relation de domination (4.26), nous écrirons un tel polynôme (non nul) sous la forme

$$P(x) = x^{d_1} + x^{d_2} + \ldots + x^{d_r} \quad \text{avec} \quad d_1 \succ d_2 \succ \ldots \succ d_r. \tag{4.28}$$

Nous dirons que d_1 est l'exposant dominant de P et que x^{d_1} en est le monôme dominant.

Definition 4.5 *Soit $P \in \mathbf{F}_2[x]$, avec $P \neq 0$, écrit sous la forme* (4.28). *À partir de $h(k)$ (cf.* (4.3)*) on définit $h(P)$ par*

$$h(P) = h(d_1) = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} h(d_i). \tag{4.29}$$

Si P est le polynôme nul, on pose $h(P) = -\infty$.

On a

$$h(P+Q) \leqslant \max(h(P), h(Q)) \tag{4.30}$$

Les formules (4.8) et (4.9) entraînent

$$h(P^4) = \begin{cases} 2h(P)+1 & \text{si } P \text{ est impair} \\ 2h(P) & \text{si } P \text{ est pair.} \end{cases} \tag{4.31}$$

De la proposition 4.2, on déduit:

Corollaire 4.6 *Soient deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ dans $\mathbf{F}_2[X]$; on a*

$$h(PQ) \leqslant h(P) + h(Q) + \varepsilon \tag{4.32}$$

où ε est défini par

$$\varepsilon = \varepsilon(P,Q) = \begin{cases} 0 & \textit{si l'un des polynômes } P \textit{ ou } Q \textit{ est pair} \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{4.33}$$

[Comme le montre l'exemple des polynômes $x^4 + x^2$ et x^4, le monôme dominant d'un produit n'est pas toujours égal au produit des monômes dominants de ses facteurs.]

Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbf{F}_2$; on suppose que chacun de ces polynômes est soit pair soit impair et l'on définit $\varepsilon = 0$ ou 1 par (4.33). On écrit

$$P(x) = x^{d_1} + x^{d_2} + \ldots + x^{d_r} \quad \text{et} \quad Q(x) = x^{e_1} + x^{e_2} + \ldots + x^{e_s} \tag{4.34}$$

avec $d_1 \succ d_2 \succ \ldots \succ d_r$ et $e_1 \succ e_2 \succ \ldots \succ e_s$. On désigne par w l'exposant dominant de PQ.

On définit w' comme l'unique entier $\geqslant 0$ tel que $w' \equiv d_1 + e_1 \pmod 2$ et

$$w' \simeq [n_3(d_1) + n_3(e_1) + \varepsilon, n_5(d_1) + n_5(e_1)]. \tag{4.35}$$

Soit i et j vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant s$. Observons que l'on a par (4.13) ou (4.15)

$$h(d_i + e_j) \leqslant h(d_i) + h(e_j) + \varepsilon \leqslant h(d_1) + h(e_1) + \varepsilon = h(w'). \tag{4.36}$$

Lemme 4.7 *(i) On a $w \preccurlyeq w'$, au sens de la relation d'ordre définie en* (4.27).

(ii) Si $\mathcal{S}(d_1) \cap \mathcal{S}(e_1) \neq \varnothing$, ou si $\varepsilon = 1$ et l'un des deux nombres d_1 ou e_1 est congru à 3 modulo 4, on a $w \prec w'$.

(iii) Si $\mathcal{S}(d_1) \cap \mathcal{S}(e_1) = \varnothing$, et si lorsque $\varepsilon = 1$ on a $d_1 \equiv e_1 \equiv 1 \pmod 4$, alors le monôme dominant de PQ est le produit des monômes dominants de P et de Q et l'on a $w = w' = d_1 + e_1$.

Démonstration : (i) Montrons d'abord que pour $(i,j) \neq (1,1)$, on a

$$d_i + e_j \prec w'. \tag{4.37}$$

Si l'on a $h(d_i) < h(d_1)$ alors (4.13) ou (4.15) entraîne

$$h(d_i + e_j) \leqslant h(d_i) + h(e_j) + \varepsilon < h(d_1) + h(e_1) + \varepsilon = h(w')$$

ce qui prouve (4.37); on raisonne de même si $h(e_j) < h(e_1)$.

On peut donc maintenant supposer $h(d_i) = h(d_1)$ et $h(e_j) = h(e_1)$. Mais alors, par (4.26), on a $n_5(d_i) < n_5(d_1)$ (si $i \neq 1$) ou $n_5(e_j) < n_5(e_1)$ (si $j \neq 1$). Ensuite, par (4.36), ou bien $h(d_i + e_j) < h(w')$ (ce qui entraîne (4.37)) ou bien $h(d_i + e_j) = h(w')$, ce qui, par (4.36), implique $h(d_i + e_j) = h(d_i) + h(e_j) + \varepsilon$ et, par (4.14) ou (4.16), on a

$$n_5(d_i + e_j) \leqslant n_5(d_i) + n_5(e_j) < n_5(d_1) + n_5(e_1) = n_5(w')$$

ce qui à nouveau entraîne (4.37).

Pour prouver (i), il reste à démontrer $d_1 + e_1 \preccurlyeq w'$. Par (4.36), on a $h(d_1 + e_1) \leqslant h(w')$ et, ou bien $h(d_1 + e_1) < h(w')$ (ce qui entraîne $d_1 + e_1 \prec w'$) ou bien $h(d_1 + e_1) = h(w') = h(d_1) + h(e_1) + \varepsilon$ et, par (4.14) ou (4.16), on a

$$n_5(d_1 + e_1) \leqslant n_5(d_1) + n_5(e_1) = n_5(w')$$

ce qui entraîne $d_1 + e_1 \preccurlyeq w'$ et termine la preuve de (i).

(ii) Compte tenu de (4.37), nous devons démontrer

$$d_1 + e_1 \prec w'. \tag{4.38}$$

Si $\mathcal{S}(d_1) \cap \mathcal{S}(e_1)$ contient une puissance d'exposant impair de 2 ou si $\varepsilon = 1$ et que l'un des deux nombres d_1, e_1 est congru à 3 (mod 4), par la proposition 4.2 on a $h(d_1 + e_1) < h(d_1) + h(e_1) + \varepsilon = h(w')$, ce qui implique (4.38).

Si $\mathcal{S}(d_1) \cap \mathcal{S}(e_1)$ contient une puissance de 4, on a soit $h(d_1 + e_1) < h(d_1) + h(e_1) + \varepsilon$ (ce qui, comme précédemment, implique (4.38)) soit $h(d_1 + e_1) = h(d_1) + h(e_1) + \varepsilon$ et alors, par (4.14) ou (4.16), on a

$$n_5(d_1 + e_1) < n_5(d_1) + n_5(e_1) = n_5(w')$$

ce qui entraîne également (4.38) et prouve (ii).

(iii) Puisque $\mathcal{S}(d_1) \cap \mathcal{S}(e_1) = \varnothing$, on a $d_1 + e_1 \simeq [n_3(d_1) + n_3(e_1) + \varepsilon, n_5(d_1) + n_5(e_1)]$; on constate que le code de $d_1 + e_1$ est égal à celui de w' et, comme ces deux nombres ont même parité, ils sont égaux. Par (4.37), $d_1 + e_1 = w'$ domine les autres exposants du produit PQ. $\square$

4.4 La suite des polynômes $P_k^{(3)} = T_3|\Delta^k$

Utilisons les notations et les résultats du § 3 avec $p = 3$ et posons

$$x = \Delta(q), \qquad y = \Delta(q^3).$$

Appelons K le corps $\mathbf{F}_2(x)$ et L le corps des séries de Laurent en q, à savoir $L = \mathbf{F}_2((q))$. Avec cette notation, on a (cf. (3.15) et (3.3))

$$y^4 + xy + x^4 = 0. \tag{4.39}$$

Le polynôme $y^4 + xy + x^4$ est irréductible sur K (cf. [18]) et (4.39) montre que y est solution dans L d'une équation quartique à coefficients dans le corps K. De façon plus précise, $K(y)$ est de degré 4 sur K. L'opérateur T_3 se calcule par la formule (cf. (3.16))

$$T_3(P(x)) = \operatorname{Tr}_{K(y)/K}\; P(y),$$

formule qui est valable pour tout polynôme P et même pour toute fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas en y, par exemple $P(x) = x^{-k}$.

Dans ce paragraphe, pour $k \in \mathbf{Z}$, nous notons

$$P_k(x) = P_k^{(3)}(x) = T_3(x^k) = \operatorname{Tr}_{K(y)/K}\; y^k. \tag{4.40}$$

On a ainsi, pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$P_k(x) = \operatorname{Tr} y^k = x \operatorname{Tr} y^{k-3} + x^4 \operatorname{Tr} y^{k-4} = xP_{k-3}(x) + x^4 P_{k-4}(x)$$

et

$$P_{2k}(x) = \operatorname{Tr} y^{2k} = (\operatorname{Tr} y^k)^2 = P_k^2(x) = P_k(x^2). \tag{4.41}$$

Pour $k \geqslant 0$, par (2.8), il vient

$$P_k(x) = 0 \quad \text{ou degré de } P_k(x) \leqslant k-2 \tag{4.42}$$

ainsi que

(4.43) les exposants du polynôme P_k sont congrus à $3k$ modulo 8.

On déduit de (4.29), de (4.43) et de (4.7) que, pour $k \geqslant 0$,

$$h(P_k) \equiv h(3k) \equiv \begin{cases} h(k)+1 \pmod 2 & \text{si } k \not\equiv 0 \pmod 4 \\ h(k) \pmod 2 & \text{si } k \equiv 0 \pmod 4. \end{cases} \tag{4.44}$$

Dans les deux tables ci-dessous, on trouvera les valeurs de $P_k(x)$ pour $k = 0$ et pour k impair, $-9 \leqslant k \leqslant 21$. Pour k pair, on obtient la valeur de $P_k(x)$ par (4.41).

(4.45)

k	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
P_k	0	0	x	0	x^5	x^3	x^9	x^7	$x^{13}+x^5$	0	$x^{17}+x^9$	x^7

(4.46)

k	1	3	5	7	9
P_{-k}	x^{-3}	x^{-9}	$x^{-15}+x^{-7}$	$x^{-21}+x^{-13}$	$x^{-27}+x^{-19}+x^{-11}$

Definition 4.8 *Posons $a_0 = 0$, $Q_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$*

$$a_n = 1 + 4 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3} \simeq [0, 2^{n-1} - 1], \;\; 2a_n \simeq [2^n - 1, 0] \tag{4.47}$$

et

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{(a_i+3)4^{n-i}}.$$

Les 8 premières valeurs de a_n sont

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	1	5	21	85	341	1365	5461

Les supports (cf. (4.1)) de a_n et de $2a_n$ sont donnés par

$$\mathcal{S}(a_n) = \mathcal{S}(a_n - 1) = \{4, 4^2, \ldots, 4^{n-1}\}, \quad \mathcal{S}(2a_n) = \{2, 8, \ldots, 2^{2n-1}\}. \tag{4.48}$$

Les premiers polynômes Q_n sont

$$Q_0 = 0, \quad Q_1(x) = x^4, \quad Q_2(x) = x^{16} + x^8, \quad Q_3(x) = x^{64} + x^{32} + x^{24},$$
$$Q_4(x) = x^{256} + x^{128} + x^{96} + x^{88}, \quad Q_5(x) = x^{1024} + x^{512} + x^{384} + x^{352} + x^{344}.$$

Lemme 4.9 *Soit $n \geqslant 1$. Les polynômes Q_n et Q_n^2 sont pairs; leurs exposants dominants sont respectivement 4^n et $2 \cdot 4^n$ et l'on a*

$$h(Q_n) = h(4^n) = 2^{n-1} \quad \textit{et} \quad h(Q_n^2) = h(2 \cdot 4^n) = 2^n. \tag{4.49}$$

Démonstration : Le i-ème exposant de Q_n, $(a_i + 3)4^{n-i}$, vaut $4^n \simeq [0, 2^{n-1}]$ pour $i = 1$, $2 \cdot 4^{n-1} \simeq [2^{n-1}, 0]$ pour $i = 2$ et

$$8 \cdot 4^{n-i} + 4^{n-i+2} + \ldots + 4^{n-2} + 4^{n-1} \simeq [2^{n-i+1}, 2^{n-1} - 2^{n-i+1}]$$

pour $3 \leqslant i \leqslant n$.

Le i-ème exposant de Q_n^2, $2(a_i + 3)4^{n-i}$, vaut $2 \cdot 4^n \simeq [2^n, 0]$ pour $i = 1$, $4^n \simeq [0, 2^{n-1}]$ pour $i = 2$ et

$$4^{n-i+2} + 2 \cdot 4^{n-i+2} + \ldots + 2 \cdot 4^{n-2} + 2 \cdot 4^{n-1} \simeq [2^n - 2^{n-i+2}, 2^{n-i+1}]$$

pour $3 \leqslant i \leqslant n$. □

Lemme 4.10 *Pour tout $n \geqslant 0$ et $k \in \mathbf{Z}$, on a*

$$P_{4^n+k}(x) = Q_n(x)P_k(x) + x^{a_n}P_{k+1}(x) \tag{4.50}$$

et

$$P_{2 \cdot 4^n+k}(x) = Q_n^2(x)P_k(x) + x^{2a_n}P_{k+2}(x). \tag{4.51}$$

Démonstration : À partir de l'équation (4.39) et des formules $a_{n+1} = 4a_n + 1$ et $Q_n(x) = Q_{n-1}^4(x) + x^{a_n+3}$, on démontre par récurrence sur n que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$y^{4^n} = x^{a_n}y + Q_n(x).$$

Il vient ensuite par (4.40)

$$P_{4^n+k} = \mathrm{Tr}\ y^{4^n+k} = \mathrm{Tr}\,(Q_n y^k + x^{a_n}y^{k+1}) = Q_nP_k + x^{a_n}P_{k+1},$$

ce qui démontre (4.50).

La preuve de (4.51) est similaire, à partir de $y^{2 \cdot 4^n} = x^{2 \cdot a_n}y + Q_n^2(x)$. □

On déduit du lemme 4.10 et des tables (4.45) et (4.46) les valeurs particulières de P_k.

Corollaire 4.11 *On a pour tout $n \geqslant 0$,*

$$P_{4^n} = P_{4^n+1} = P_{4^n+4} = 0, P_{4^n+2} = x^{a_n+1}, P_{4^n+3} = xQ_n, P_{4^n+5} = x^{a_n+2},$$

$$P_{2\cdot 4^n} = P_{2\cdot 4^n+2} = 0, P_{2\cdot 4^n+1} = x^{2a_n+1}, P_{2\cdot 4^n+3} = xQ_n^2, P_{2\cdot 4^n+4} = x^{2a_n+2},$$

$$P_{4^n-1} = x^{-3}Q_n, P_{4^n-2} = x^{-6}Q_n + x^{a_n-3}, P_{4^n-3} = x^{-9}Q_n + x^{a_n-6},$$

$$P_{2\cdot 4^n-1} = x^{-3}Q_n^2, P_{2\cdot 4^n-2} = x^{-6}Q_n^2, P_{2\cdot 4^n-3} = x^{-9}Q_n^2 + x^{2a_n-3}.$$

Nous avons maintenant à étudier $h(P_k)$.

Proposition 4.12 *Soit k un nombre entier, $k \geqslant 0$, et $P_k = P_k^{(3)}$ le polynôme introduit en* (4.40)*. On a*

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 1 \tag{4.52}$$

où la valeur de $h(P_k)$ est définie en (4.29)*.*

Démonstration : En utilisant les formules (4.50) et (4.51), nous allons démontrer (4.52) par récurrence sur k. À l'aide des tables (4.45) et (4.6) et de (4.41) et (4.5), on vérifie (4.52) pour $0 \leqslant k \leqslant 3$. Soit maintenant $k \geqslant 4$ et supposons $h(P_j) \leqslant h(j) - 1$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$. On définit $n \geqslant 1$ par

$$4^n \leqslant k < 4^{n+1}. \tag{4.53}$$

Distinguons deux cas.

1. **Premier cas :** $4^n \leqslant k < 2 \cdot 4^n$. Introduisons r par

   $$r = k - 4^n.$$

   Par (4.50), on a

   $$P_k = P_{4^n+r} = Q_n P_r + x^{a_n} P_{r+1}. \tag{4.54}$$

   On a $0 \leqslant r \leqslant k-4$ et l'hypothèse de récurrence s'applique à r et à $r+1$; on a ainsi $h(P_r) \leqslant h(r) - 1$ et $h(P_{r+1}) \leqslant h(r+1) - 1$. On a aussi $r < 2 \cdot 4^n - 4^n = 4^n$ et $\mathcal{S}(4^n) \cap \mathcal{S}(r) = \varnothing$, ce qui, par (4.12) et (4.4), implique

   $$h(k) = h(4^n + r) = h(4^n) + h(r) = 2^{n-1} + h(r).$$

   Par le lemme 4.9, le polynôme Q_n est pair et, par (4.49), on a $h(Q_n) = 2^{n-1}$. Par (4.32), avec $\varepsilon(Q_n, P_r) = 0$, il vient

   $$\begin{aligned} h(Q_n P_r)) &\leqslant h(Q_n) + h(P_r) = 2^{n-1} + h(P_r) \\ &\leqslant 2^{n-1} + h(r) - 1 = h(k) - 1. \end{aligned} \tag{4.55}$$

   Ensuite, par (4.47), on a $h(x^{a_n}) = h(a_n) = 2^{n-1} - 1$.

   • Si k est impair, r est aussi impair; par l'hypothèse de récurrence et par (4.22), on a $h(P_{r+1}) \leqslant h(r+1) - 1 \leqslant h(r)$. Par (4.43), P_{r+1} est un polynôme pair, donc $\varepsilon(x^{a_n}, P_{r+1}) = 0$. Ainsi, par (4.32) et (4.47), il vient

   $$h(x^{a_n} P_{r+1}) \leqslant h(a_n) + h(P_{r+1}) \leqslant 2^{n-1} - 1 + h(r) = h(k) - 1. \tag{4.56}$$

• Si k et r sont pairs, par (4.47) et (4.43), on a $\varepsilon(x^{a_n}, P_{r+1}) = 1$. En compensation, (4.22) donne $h(r+1) = h(r)$ et (4.32) entraîne

$$\begin{aligned} h(x^{a_n} P_{r+1}) &\leqslant h(a_n) + h(P_{r+1}) + 1 \leqslant h(a_n) + h(r+1) - 1 + 1 \\ &= 2^{n-1} - 1 + h(r) = h(k) - 1. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Quelle que soit la parité de k, par (4.56) ou (4.57), on a donc $h(x^{a_n} P_{r+1}) \leqslant h(k) - 1$, ce qui, avec (4.55), donne $h(P_k) \leqslant h(k) - 1$, en appliquant (4.30) à (4.54).

2. **Deuxième cas :** $2 \cdot 4^n \leqslant k < 4^{n+1}$. En posant

$$s = k - 2 \cdot 4^n, \tag{4.58}$$

par (4.51), on a

$$P_k = P_{2\cdot 4^n + s} = Q_n^2 P_s + x^{2a_n} P_{s+2}. \tag{4.59}$$

Puisque $n \geqslant 1$, on a $s \leqslant k - 8$ et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à P_s et P_{s+2}, ce qui, avec (4.23), donne

$$h(P_s) \leqslant h(s) - 1 \quad \text{et} \quad h(P_{s+2}) \leqslant h(s+2) - 1 \leqslant h(s).$$

On a aussi $s < 4^{n+1} - 2 \cdot 4^n = 2 \cdot 4^n$ et $\mathcal{S}(2 \cdot 4^n) \cap \mathcal{S}(s) = \varnothing$, ce qui, par (4.12) et (4.4), entraîne

$$h(k) = h(2 \cdot 4^n + s) = h(2 \cdot 4^n) + h(s) = 2^n + h(s).$$

Q_n^2 et x^{2a_n} sont des polynômes pairs, donc $\varepsilon(Q_n^2, P_s) = \varepsilon(x^{2a_n}, P_{s+2}) = 0$. Par (4.32) et (4.49), il vient ensuite

$$h(Q_n^2 P_s)) \leqslant h(Q_n^2) + h(P_s) = 2^n + h(P_s) \leqslant 2^n + h(s) - 1 = h(k) - 1. \tag{4.60}$$

Par (4.32) et (4.47), il vient similairement

$$h(x^{2a_n} P_{s+2}) \leqslant h(2a_n) + h(P_{s+2}) \leqslant 2^n - 1 + h(s) = h(k) - 1. \tag{4.61}$$

En appliquant (4.30) à (4.59), on obtient $h(P_k) \leqslant h(k) - 1$. □

Proposition 4.13 *Soit k un nombre entier, $k \geqslant 0$, et $P_k = P_k^{(3)}$ le polynôme introduit en* (4.40).

(i) Lorsque k est multiple de 4, on a

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 2. \tag{4.62}$$

(ii) Lorsque $k \equiv 2 \pmod 4$ et $n_5(k) = 0$, on a

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 3. \tag{4.63}$$

Démonstration : Pour prouver (i), on observe que (4.52) entraîne $h(P_k) \leqslant h(k) - 1$; mais, par (4.44), on a $h(P_k) \equiv h(k) \pmod 2$, ce qui implique (4.62).

La preuve de (ii) se fait par récurrence sur k de la même façon que la preuve de la proposition 4.12. Pour $k \leqslant 3$, il n'y a que $k = 2$ qui vérifie les hypothèses et (4.63) est vraie puisque $P_2 = 0$.

Supposons maintenant $k \geqslant 4$, $k \equiv 2 \pmod 4$ et $n_5(k) = 0$. On définit $n \geqslant 1$ par (4.53). La condition $n_5(k) = 0$ exclut le cas $4^n \leqslant k < 2 \cdot 4^n$. On a donc $2 \cdot 4^n \leqslant k < 4^{n+1}$ et l'on définit s par (4.58). On a $s \leqslant k-8$, $s = k - 2\cdot 4^n \equiv 2 \pmod 4$ et $n_5(s) = 0$. L'hypothèse de récurrence appliquée à P_s donne $h(P_s) \leqslant h(s) - 3$. Ensuite, comme dans (4.60), il vient

$$h(Q_n^2 P_s) \leqslant h(Q_n^2) + h(P_s) = 2^n + h(P_s) \leqslant 2^n + h(s) - 3 = h(k) - 3.$$

L'application de (i) à $s+2$ donne $h(P_{s+2}) \leqslant h(s+2) - 2$. Et, puisque $s \equiv 2 \pmod 4$, (4.23) entraîne $h(s+2) \leqslant h(s)$. On a ainsi $h(P_{s+2}) \leqslant h(s) - 2$. Ensuite, comme dans (4.61), on a

$$h(x^{2a_n} P_{s+2}) \leqslant h(2a_n) + h(P_{s+2}) \leqslant 2^n - 1 + h(s) - 2 = h(k) - 3$$

et l'on conclut en appliquant (4.30) à (4.59). □

Proposition 4.14 *Soit k un nombre entier, $k \geqslant 0$, et $P_k = P_k^{(3)}$ le polynôme introduit en* (4.40).

(i) Lorsque k est impair, et $n_3(k) \geqslant 1$, on a $P_k \neq 0$, $h(P_k) = h(k) - 1$ et l'exposant dominant (cf. § 4.3) de P_k a pour code $[n_3(k) - 1, n_5(k)]$.

(ii) Lorsque $k \equiv 2 \pmod 4$ et $n_5(k) \geqslant 1$, on a $P_k \neq 0$, $h(P_k) = h(k) - 1$ et l'exposant dominant de P_k a pour code $[n_3(k), n_5(k) - 1]$.

[Supposons k impair et $n_3(k) = 0$. Si $n_5(k) = 2^v$ avec $v \geqslant 0$, $\Delta^k = \Delta^{1+2^{2v+2}}$ est une série thêta associée à $\mathbf{Q}(i)$ (cf. [12, §9]) et l'on a $P_k = 0$. Si $n_5(k) \equiv 2^v \pmod{2^{v+1}}$ avec $v \geqslant 0$, et $n_5(k) \neq 2^v$, on constate numériquement, pour $k < 33000$, que $P_k \neq 0$ et que l'exposant dominant de P_k a pour code $[2^{v+1} - 1, n_5(k) - 2^{v+1}]$.
Supposons k multiple de 4, $k = 4k'$. Par (4.41), on a $P_k(x) = P_{k'}(x^4)$ et, lorsque $P_{k'} \neq 0$, si l'exposant dominant de $P_{k'}$ a pour code $[a, b]$, celui de P_k a pour code $[2a, 2b+1]$ si k' est impair et $[2a, 2b]$ si k' est pair (cf. (4.8) et (4.9)).
Supposons $k = 2k' \equiv 2 \pmod 4$. On a $P_k(x) = P_{k'}(x^2)$. Pour $k \leqslant 33000$, on constate numériquement que, lorsque P_k et $P_{k'}$ sont non nuls, l'exposant dominant de P_k est le double de l'exposant dominant de $P_{k'}$, ce qui, via (4.9), est prouvé dans la proposition 4.14 lorsque $n_5(k) \geqslant 1$.]

Démonstration : Nous allons démontrer simultanément (i) et (ii) par récurrence sur k en suivant la méthode de démonstration de la proposition 4.12.

D'abord, on vérifie que (i) est satisfaite pour $k = 3$ et qu'il n'y a pas d'autres valeurs de $k \leqslant 3$ satisfaisant les hypothèses de la proposition.

Supposons maintenant $k \geqslant 4$ et (i) et (ii) vraies jusqu'à $k - 1$. On définit $n \geqslant 1$ en fonction de k par (4.53) et l'on distingue deux cas.

1. **Premier cas :** $4^n \leqslant k < 2 \cdot 4^n$. On pose $r = k - 4^n \leqslant k - 4$; on a par (4.54)

   (4.64) $$P_k = P_{4^n + r} = Q_n P_r + x^{a_n} P_{r+1}$$

   et l'on peut appliquer à r et à $r+1$ l'hypothèse de récurrence. On a aussi $r < 2 \cdot 4^n - 4^n = 4^n$ et $\mathcal{S}(4^n) \cap \mathcal{S}(r) = \varnothing$. Par (4.12), cela implique $h(k) = 2^{n-1} + h(r)$. On a de même $n_3(k) = n_3(r)$ et $n_5(k) = 2^{n-1} + n_5(r) > 0$.

   Lorsque $P_r \neq 0$, soit m (resp. M) l'exposant dominant de P_r (resp. $Q_n P_r$). Noter que, par (4.43), m a même parité que k et r et que, par

(4.42), on a $m < r < 4^n$ ce qui implique $\mathcal{S}(4^n) \cap \mathcal{S}(m) = \varnothing$. Par le lemme 4.9, l'exposant dominant de Q_n est 4^n et, par le lemme 4.7 (iii), on a $M = 4^n + m$.

Lorsque $P_{r+1} \neq 0$, nous désignons par m' (resp. w) l'exposant dominant de P_{r+1} (resp. $x^{a_n} P_{r+1}$). Par (4.42), on a $m' < r < 4^n$. Par (4.43), m' a même parité que $r+1$ et $k+1$.

On considère trois sous-cas : (a) prouve (i) tandis que (b) et (c) prouvent (ii).

(a) k **et** r **impairs et** $n_3(k) \geqslant 1$**.** On a $n_3(r) = n_3(k) \geqslant 1$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $P_r \neq 0$, $m \simeq [n_3(r) - 1, n_5(r)]$ et

$$M = 4^n + m \simeq [n_3(r) - 1, 2^{n-1} + n_5(r)] = [n_3(k) - 1, n_5(k)]. \tag{4.65}$$

Nous allons montrer que

$$\text{“les exposants de } x^{a_n} P_{r+1} \text{ sont dominés par } M\text{”} \tag{4.66}$$

ce qui, par (4.64), prouvera que l'exposant dominant de P_k est M et ainsi, établira (i). Si $P_{r+1} = 0$, (4.66) est évidente; sinon, nous allons prouver

$$w \prec M = 4^n + m \tag{4.67}$$

qui entraîne (4.66).
• Si $r \equiv 3 \pmod 4$ ou si $r \equiv 1 \pmod 4$ et $n_5(r+1) = n_5(r) = 0$, par (4.62) ou (4.63) et par (4.22), il vient

$$h(P_{r+1}) \leqslant h(r+1) - 2 \leqslant h(r) - 1$$

ce qui, par (4.32) et (4.47) entraîne

$$\begin{aligned} h(x^{a_n} P_{r+1}) &\leqslant h(a_n) + h(P_{r+1}) = 2^{n-1} - 1 + h(P_{r+1}) \\ &\leqslant 2^{n-1} - 1 + h(r) - 1 = h(k) - 2 = h(4^n + m) - 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve (4.67).
• Si $r \equiv 1 \pmod 4$ et $n_5(r+1) \geqslant 1$, l'hypothèse de récurrence donne

$$m' \simeq [n_3(r+1), n_5(r+1) - 1] = [n_3(r) + 1, n_5(r) - 1].$$

Définissons w' par $w' \equiv a_n + m' \equiv 1 \pmod 2$ et

$$\begin{aligned} w' &\simeq [n_3(a_n) + n_3(m'), n_5(a_n) + n_5(m')] \\ &= [n_3(r) + 1, 2^{n-1} - 1 + n_5(r) - 1] = [n_3(k) + 1, n_5(k) - 2]. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 4.7 (i), on obtient $w \preccurlyeq w'$, puis, en comparant avec (4.65), on voit que $w \preccurlyeq w' \prec M$, ce qui prouve (4.67).

(b) $k \equiv r \equiv 2 \pmod 4$ **et** $n_5(r) \geqslant 1$**.** On a $n_5(r+1) = n_5(r) \geqslant 1$ et $n_3(r+1) = n_3(r) = n_3(k) \geqslant 1$, car $2 \in \mathcal{S}(r)$. Par l'hypothèse de récurrence, il vient $P_r \neq 0$, $m \simeq [n_3(r), n_5(r) - 1]$,

$$4^n + m \simeq [n_3(r), 2^{n-1} + n_5(r) - 1] = [n_3(k), n_5(k) - 1]$$

$P_{r+1} \neq 0$ (car $r+1$ est impair et $n_3(r+1) \geqslant 1$) et

$$m' \simeq [n_3(r+1)-1, n_5(r+1)] = [n_3(r)-1, n_5(r)].$$

Montrons que l'exposant dominant de P_k est M en prouvant comme en (a)

$$w \prec M = 4^n + m. \tag{4.68}$$

Pour cela, on applique le lemme 4.7 à $x^{a_n} P_{r+1}$. On a $\varepsilon = \varepsilon(x^{a_n}, P_{r+1}) = 1$. Soit w' le nombre tel que $w' \equiv a_n + m' \equiv 0 \pmod 2$ et

$$\begin{aligned} w' \quad \simeq \quad & [n_3(a_n) + n_3(m') + \varepsilon, n_5(a_n) + n_5(m')] \\ & = [n_3(r), 2^{n-1} - 1 + n_5(r)] = [n_3(k), n_5(k) - 1]. \end{aligned}$$

On a donc $w' = M$. Puisque $m' < 4^n$ et $n_5(m') = n_5(r) \geqslant 1$, par (4.48), on a $\mathcal{S}(m') \cap \mathcal{S}(a_n) \neq \varnothing$ et, par le lemme 4.7 (ii), il en résulte $w \prec w' = M$, ce qui, par (4.64), prouve (4.68) et établit (ii) lorsque $n_5(r) > 0$.

(c) **$k \equiv r \equiv 2 \pmod 4$ et $n_5(r) = 0$.** On a $n_5(k) = 2^{n-1} > 0$ et $n_3(r+1) = n_3(r) \geqslant 1$, car $2 \in \mathcal{S}(r)$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $P_{r+1} \neq 0$, $m' \simeq [n_3(r+1)-1, 0] = [n_3(r)-1, 0]$ ce qui, par (4.48), entraîne $\mathcal{S}(m') \cap \mathcal{S}(a_n) = \varnothing$. On applique alors le lemme 4.7 (iii) à $x^{a_n} P_{r+1}$ avec $\varepsilon = \varepsilon(x^{a_n}, P_{r+1}) = 1$; par (4.47), on a $a_n \equiv 1 \pmod 4$ tandis que, par (4.43), on a $m' \equiv 3(r+1) \equiv 1 \pmod 4$; et l'on a

$$w = a_n + m' \simeq [n_3(r) - 1 + \varepsilon, 2^{n-1} - 1] = [n_3(k), n_5(k) - 1].$$

Dans ce sous-cas, nous allons montrer que l'exposant dominant de P_k est w, ce qui établira (ii). Pour cela, par (4.64), il suffit de montrer que les exposants de $Q_n P_r$ sont dominés par w. Mais cela résulte de l'inégalité

$$h(Q_n P_r) \leqslant h(Q_n) + h(P_r) \leqslant 2^{n-1} + h(r) - 3 = h(k) - 3 < h(w)$$

obtenue par (4.32) et (4.63).

2. **Deuxième cas : $2 \cdot 4^n \leqslant k < 4^{n+1}$.** On pose $s = k - 2 \cdot 4^n$ et, par (4.51), on a

$$P_k = P_{2 \cdot 4^n + s} = Q_n^2 P_s + x^{2a_n} P_{s+2}. \tag{4.69}$$

On a $s \leqslant k-8$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à s et à $s+2$. On a $s < 2 \cdot 4^n$ et $\mathcal{S}(2 \cdot 4^n) \cap \mathcal{S}(s) = \varnothing$. Cela implique $n_3(k) = 2^n + n_3(s)$, $n_5(k) = n_5(s)$ et $h(k) = 2^n + h(s)$.

Lorsque $P_s \neq 0$, soit m (resp. M) l'exposant dominant de P_s (resp. $Q_n^2 P_s$); par (4.42), on a $m < s < 2 \cdot 4^n$ ce qui entraîne $\mathcal{S}(2 \cdot 4^n) \cap \mathcal{S}(m) = \varnothing$. Par le lemme 4.9, l'exposant dominant de Q_n^2 est $2 \cdot 4^n$ et le lemme 4.7 (iii) donne $M = 2 \cdot 4^n + m$.

Nous désignons par m' (resp. w) l'exposant dominant de P_{s+2} (resp. $x^{2a_n} P_{s+2}$) lorsque P_{s+2} est non nul. Par (4.42), on a $m' \leqslant s < 2 \cdot 4^n$. Notons que, par (4.43), m et m' ont même parité que k et s.

Distinguons trois sous-cas : (a) et (b) prouvent (i) tandis que (c) prouve (ii).

(a) k **et** s **impairs et** $n_3(s) \geqslant 1$**.** Par l'hypothèse de récurrence, on a $m \simeq [n_3(s)-1, n_5(s)]$ et

$$M = 2\cdot 4^n + m \simeq [2^n + n_3(s) - 1, n_5(s)] = [n_3(k)-1, n_5(k)].$$

Montrons que M est l'exposant dominant de P_k. Pour cela, nous allons prouver que les exposants de $x^{2a_n}P_{s+2}$ sont dominés par M.

• Si $s \equiv 3 \pmod 4$, par (4.52) et (4.23), il vient

$$h(P_{s+2}) \leqslant h(s+2) - 1 \leqslant h(s) - 1$$

tandis que, par (4.32), on a

$$h(x^{2a_n}P_{s+2}) \leqslant h(2a_n) + h(P_{s+2}) \leqslant 2^n - 1 + h(s) - 1 = h(k) - 2 < h(M).$$

• Si $s \equiv 1 \pmod 4$, on a $n_3(s+2) = n_3(s)+1 \geqslant 2$ et par l'hypothèse de récurrence, on a $P_{s+2} \neq 0$,

$$m' \simeq [n_3(s+2)-1, n_5(s+2)] = [n_3(s), n_5(s)],$$

et donc $m' = s < 2\cdot 4^n$. Comme $\mathcal{S}(2a_n) = \{2, 8, \ldots, 2^{2n-1}\}$ et que $n_3(s) > 0$, l'intersection $\mathcal{S}(2a_n) \cap \mathcal{S}(m')$ est non vide. On applique le lemme 4.7 (ii) au produit $x^{2a_n}P_{s+2}$ en définissant w' impair par $w' \simeq [2^n - 1 + n_3(s), n_5(s)]$. On obtient $w \prec w' = M$ (car w' et M ayant même code et même parité sont égaux) et les monômes de $x^{2a_n}P_{s+2}$ sont dominés par x^M.

(b) k **et** s **impairs et** $n_3(s) = 0$**.** On a $n_3(k) = 2^n > 0$, $k \equiv s \equiv 1 \pmod 4$, $n_3(s+2) = 1$ et $h(s) = n_5(s)$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $P_{s+2} \neq 0$,

$$m' \simeq [n_3(s+2)-1, n_5(s+2)] = [0, n_5(s)]$$

et, par (4.48), $\mathcal{S}(2a_n) \cap \mathcal{S}(m') = \varnothing$. Par le lemme 4.7 (iii), il vient

$$w = 2a_n + m' \simeq [2^n - 1, n_5(s)] = [n_3(k)-1, n_5(k)].$$

Dans ce sous-cas, l'exposant dominant de P_k est w. Pour le prouver, il reste à montrer que les exposants de $Q_n^2 P_s$ sont dominés par w. Si $P_s = 0$, c'est clair; sinon, soit m l'exposant dominant de P_s. Par (4.52), on a

$$h(m) = n_3(m) + n_5(m) = h(P_s) \leqslant h(s) - 1$$

ce qui entraîne $n_5(m) < h(s) = n_5(s)$ et l'on constate que

$$M = 2\cdot 4^n + m \simeq [2^n + n_3(m), n_5(m)] \prec w = 2a_n + m' \simeq [2^n - 1, h(s)]$$

puisque, ou bien, $h(M) < h(w)$ ou bien $h(M) = h(w)$ et $n_5(M) < n_5(w)$.

(c) $k \equiv s \equiv 2 \pmod 4$ **et** $n_5(k) = n_5(s) \geqslant 1$**.** Par l'hypothèse de récurrence, on a $P_s \neq 0$, $m \simeq [n_3(s), n_5(s)-1]$ et

$$M = 2\cdot 4^n + m \simeq [2^n + n_3(s), n_5(s) - 1] = [n_3(k), n_5(k) - 1].$$

Montrons que l'exposant dominant de P_k est M; pour cela, montrons que les exposants de $x^{2a_n}P_{s+2}$ sont dominés par M : par (4.62) et (4.23), on a $h(P_{s+2}) \leqslant h(s+2) - 2 \leqslant h(s) - 2$, puis, par (4.32),

$$\begin{aligned} h(x^{2a_n}P_{s+2}) &\leqslant h(x^{2a_n}) + h(P_{s+2}) = 2^n - 1 + h(P_{s+2}) \\ &\leqslant 2^n - 1 + h(s) - 2 = h(k) - 3 < h(k) - 1 = h(M). \qquad \square \end{aligned}$$

4.5 La suite des polynômes $P_k^{(5)} = T_5|\Delta^k$

Dans ce paragraphe, nous étudions la suite de polynômes $P_k^{(5)}$ en procédant de façon analogue, *mutadis mutandi*, à l'étude des polynômes $P_k^{(3)}$ au §4.4.

Posons $x = \Delta(q)$, $y = \Delta(q^5)$, $K = \mathbf{F}_2(x)$, $L = \mathbf{F}_2((q))$. Par (3.15) et (3.4), il vient

$$y^6 + x^2y^4 + x^4y^2 + xy + x^6 = 0. \tag{4.70}$$

Le membre de gauche de (4.70) est un polynôme irréductible sur K (cf. [18], le corps $K(y)$ est de degré 6 sur K et, par (3.16), on a pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$T_5(x^k) = \mathrm{Tr}_{K(y)/K}\ y^k.$$

Dans ce paragraphe, pour $k \in \mathbf{Z}$, nous notons

$$P_k(x) = P_k^{(5)}(x) = T_5(x^k) = \mathrm{Tr}_{K(y)/K}\ y^k. \tag{4.71}$$

Par (4.70), on a ainsi,

$$P_k(x) = x^2P_{k-2}(x) + x^4P_{k-4}(x) + xP_{k-5}(x) + x^6P_{k-6}(x),$$

$$P_{2k}(x) = P_k^2(x) = P_k(x^2). \tag{4.72}$$

Pour $k \geqslant 0$, par (2.8), il vient

(4.73) les exposants du polynôme P_k sont congrus à $5k$ modulo 8.

Lorsque $P_k \neq 0$, il résulte de (4.73) que le degré de P_k est congru à k mod 4; comme par (2.8) ce degré est $\leqslant k-2$, il vient

$$P_k(x) = 0 \quad \text{ou degré de } P_k(x) \leqslant k-4. \tag{4.74}$$

On déduit de (4.29), de (4.73) et de (4.7) que

$$h(P_k) \equiv h(5k) \equiv h(k) + k \pmod 2. \tag{4.75}$$

Dans les deux tables ci-dessous, on trouvera les valeurs de P_k pour $k = 0$ et pour k impair, $-7 \leqslant k \leqslant 21$. Compte tenu de (4.72), nous ne donnons les valeurs de P_k que pour k impair.

(4.76)

$k =$	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$P_k =$	0	0	0	x	x^3	0	0	x^9	$x^{11}+x^3$	x^5	x^7	$x^{17}+x^9$

(4.77)

$k =$	1	3	5	7
$P_{-k} =$	x^{-5}	$x^{-15}+x^{-7}$	$x^{-25}+x^{-17}$	$x^{-35}+x^{-27}+x^{-19}$

Definition 4.15 *Pour $n \geqslant 0$, les polynômes U_n, V_n, W_n et Y_n sont respectivement définis par*

$$U_0 = 0,\ U_1 = 1 \text{ et, pour } n \geqslant 2, \quad U_n(x) = x^4U_{n-1}^4(x) + x^{12}U_{n-2}^{16}(x),$$

$$V_0 = 1,\ V_1 = 0 \text{ et, pour } n \geqslant 2, \quad V_n(x) = x^3U_{n-1}^4(x),$$

$$W_0 = 0,\ W_1 = 0 \text{ et, pour } n \geqslant 2, \quad W_n(x) = (x^8 + x^{16})U_{n-1}^4(x) + W_{n-1}^4(x)$$

et

$$Y_0 = 0,\ Y_1 = x^8 \text{ et, pour } n \geqslant 2, \quad Y_n(x) = x^8U_n^2(x) + W_n^2(x).$$

Pour $2 \leqslant n \leqslant 5$, les valeurs des polynômes U_n, V_n, W_n et Y_n sont

$$U_2 = x^4, \quad U_3 = x^{20} + x^{12}, \quad U_4 = x^{84} + x^{76} + x^{52},$$
$$U_5 = x^{340} + x^{332} + x^{308} + x^{212} + x^{204},$$

$$V_2 = x^3, \quad V_3 = x^{19}, \quad V_4 = x^{83} + x^{51}, \quad V_5 = x^{339} + x^{307} + x^{211},$$

$$W_2 = x^{16} + x^8, \quad W_3 = x^{64} + x^{24}, \quad W_4 = x^{256} + x^{88} + x^{64} + x^{56}$$
$$W_5 = x^{1024} + x^{344} + x^{320} + x^{312} + x^{256} + x^{216}$$

et

$$Y_2 = x^{32}, \quad Y_3 = x^{128} + x^{32}, \quad Y_4 = x^{512} + x^{160} + x^{128}$$
$$Y_5 = x^{2048} + x^{672} + x^{640} + x^{512} + x^{416}.$$

Lemme 4.16 *Soit $n \geqslant 2$.*

(i) Le polynôme U_n est pair et a pour degré $a_n - 1$ (cf. (4.47)). Son exposant dominant est $a_n - 1$ et l'on a

$$h(xU_n) = h(U_n) = 2^{n-1} - 1, \tag{4.78}$$

$$h(xU_n^2) = h(U_n^2) = 2^n - 2 \quad \textit{et} \quad h(x^3U_n^2) = 2^n - 1. \tag{4.79}$$

(ii) Le polynôme V_n est impair et a pour degré $a_n - 2$. Son exposant dominant est $a_n - 2$ et l'on a

$$h(V_n) = 2^{n-1} - 1 \quad \textit{et} \quad h(V_n^2) = 2^n - 2. \tag{4.80}$$

(iii) Le polynôme W_n est pair et a pour degré 4^n. Son exposant dominant est 4^n et l'on a

$$h(W_n) = 2^{n-1}. \tag{4.81}$$

(iv) Le polynôme Y_n est pair et a pour degré $2 \cdot 4^n$. Son exposant dominant est 2^{2n+1} et l'on a

$$h(Y_n) = 2^n. \tag{4.82}$$

Démonstration : On prouve d'abord par récurrence sur $n \geqslant 2$ que le degré de U_n est $a_n - 1 \simeq [0, 2^{n-1} - 1]$, ce qui implique

$$h(U_n) \geqslant 2^{n-1} - 1. \tag{4.83}$$

Ensuite, on démontre par récurrence sur $n \geqslant 2$ que $h(U_n) = 2^{n-1} - 1$. On le vérifie pour $n = 2$ et $n = 3$. Puis, on suppose $n \geqslant 4$ et $h(U_\nu) = 2^{\nu-1} - 1$ pour $\nu < n$.

Par (4.32) et (4.31), il vient

$$h(x^4U_{n-1}^4) \leqslant h(x^4) + h(U_{n-1}^4) = 1 + 2h(U_{n-1}) = 2^{n-1} - 1$$

et, de même, $h(x^{12}U_{n-2}^{16}) \leqslant 2^{n-1} - 1$. Par (4.30), on en déduit

$$h(U_n) \leqslant \max(h(x^4U_{n-1}^4), h(x^{12}U_{n-2}^{16})) \leqslant 2^{n-1} - 1$$

qui, avec (4.83), démontre (4.78).

Par (4.32), on a $h(U_n^2) \leqslant 2h(U_n) = 2^n - 2$; comme le degré de U_n^2 est $2a_n - 2$, on a $h(U_n^2) \geqslant h(2a_n - 2) = 2^n - 2$ et l'on conclut que $h(U_n^2) = 2^n - 2$.

La preuve de $h(x^3U_n^2) = 2^n - 1$ est similaire, ansi que celles de (ii), (iii) et (iv). □

Lemme 4.17 *Pour tout $n \geqslant 0$ et $k \in \mathbf{Z}$, on a*

$$P_{4^n+k} = W_nP_k + V_nP_{k+1} + U_nP_{k+4} \tag{4.84}$$

et

$$P_{2\cdot 4^n+k} = Y_nP_k + x^3U_n^2P_{k+1} + V_n^2P_{k+2} + xU_n^2P_{k+3}. \tag{4.85}$$

Démonstration : En multipliant (4.70) par $y^2 + x^2$, on obtient

$$y^8 + xy^3 + x^3y + x^8 = 0$$

et, en élevant au carré dans $K(y)$,

$$y^{16} + x^4y^4 + x^3y + x^8 + x^{16} = 0.$$

Puis, par récurrence sur $n \geqslant 0$, on démontre

$$y^{4^n} = U_n\, y^4 + V_n\, y + W_n$$

et

$$y^{2\cdot 4^n} = xU_n^2\, y^3 + V_n^2\, y^2 + x^3U_n^2\, y + Y_n.$$

Par (4.71), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} P_{4^n+k} &= \mathrm{Tr}\ y^{4^n+k} = \mathrm{Tr}\ (U_ny^{k+4} + V_ny^{k+1} + W_ny^k) \\ &= U_nP_{k+4} + V_nP_{k+1} + W_nP_k \end{aligned}$$

ce qui prouve (4.84).

La preuve de (4.85) est similaire. □

À l'aide des tables (4.76) et (4.77), on déduit du lemme 4.17:

Corollaire 4.18 *Pour $n \geqslant 0$, on a*

$$P_{4^n} = P_{4^n+2} = 0,\ \ P_{4^n+1} = xU_n,\ \ P_{4^n+3} = x^3U_n,\ \ P_{4^n+4} = xV_n,$$

$$P_{4^n-1} = x^{-5}W_n,\ \ P_{4^n-2} = x^{-10}W_n + x^{-5}V_n,$$

$$P_{2\cdot 4^n} = P_{2\cdot 4^n+1} = P_{2\cdot 4^n+4} = 0,\ \ P_{2\cdot 4^n+2} = x^2U_n^2,\ \ P_{2\cdot 4^n+3} = xV_n^2$$

et

$$P_{2\cdot 4^n-1} = x^{-5}Y_n,\ \ P_{2\cdot 4^n-2} = x^{-10}Y_n + x^{-2}U_n^2$$

Nous avons maintenant à déterminer $h(P_k)$.

Proposition 4.19 *Soit k un nombre entier $\geqslant 0$, $P_k = P_k^{(5)}$ le polynôme défini en 4.71. La valeur de $h(P_k)$ est définie en (4.29).*

(i) Lorsque k est impair et $n_5(k) \geqslant 1$, on a $P_k \neq 0$, $h(P_k) = h(k) - 1$ et l'exposant dominant (cf. § 4.3) de P_k a pour code $[n_3(k), n_5(k) - 1]$.

(ii) Lorsque k est impair et $n_5(k) = 0$, on a

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 3. \tag{4.86}$$

(iii) Lorsque k est pair, on a

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 2. \tag{4.87}$$

(iv) Pour tout k, on a

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 1. \tag{4.88}$$

[Supposons k impair et $n_5(k) = 0$. Si $n_3(k) = 2^v$ avec $v \geqslant 0$, $\Delta^k = \Delta^{1+2^{2v+1}}$ est une série thêta associée à $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$ (cf. [12, §8]) et l'on a $P_k = 0$. Si $n_3(k) = 2^v - 1$ avec $v \geqslant 0$, on a $k = (1 + 2^{2v+1})/3$; la forme Δ^k qui, par le corollaire 4.11, est égale à $T_3|\Delta^{1+2^{2v+1}}$ est aussi une série thêta associée à $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$ et l'on a $P_k = 0$. Si $n_3(k) \equiv 2^v$ ou $2^v - 1 \pmod{2^{v+1}}$ avec $v \geqslant 1$ et $n_3(k) > 2^v$, on constate numériquement que, pour $k < 33000$, $P_k \neq 0$ et que l'exposant dominant de P_k a pour code $[n_3(k) - 2^{v+1}, 2^v - 1]$. Supposons k pair, $k = 2k'$. Par (4.72), on a $P_k(x) = P_{k'}(x^2)$. On constate numériquement pour $k \leqslant 33000$) que, ou bien $P_k = P_{k'} = 0$ ou bien l'exposant dominant de P_k est le double de l'exposant dominant de $P_{k'}$.]

Démonstration : Le point (iv) résulte de (i), (ii) et (iii). Nous allons démontrer simultanément (i), (ii) et (iii) par récurrence sur k, en suivant le même plan que pour la démonstration des propositions 4.12 et 4.14.

Lorsque $k \leqslant 15$, à l'aide des tables (4.76) et (4.6) et de (4.72), on constate que (i), (ii) et (iii) sont vérifiées. Rappelons que, si $P_k = 0$, $h(P_k) = -\infty$.

Soit maintenant $k \geqslant 16$ et supposons (i), (ii) et (iii) vraies jusqu'à $k - 1$. On définit $n \geqslant 2$ par (4.53) et l'on distingue deux cas.

1. **Premier cas : $4^n \leqslant k < 2 \cdot 4^n$.** On pose $r = k - 4^n \leqslant k - 16$; on a par (4.84) :

   $$P_k = P_{4^n+r} = W_n P_r + V_n P_{r+1} + U_n P_{r+4} \tag{4.89}$$

   et l'on peut appliquer à r, $r+1$ et $r+4$ l'hypothèse de récurrence. Notons que l'on a $r \leqslant k - 4^n < 4^n$, $n_3(k) = n_3(r)$, $n_5(k) = 2^{n-1} + n_5(r) > 0$ et $h(k) = 2^{n-1} + h(r)$.

   Considérons trois sous-cas : (a) et (b) prouvent (i) tandis que (c) prouve (iii); puisque $n_5(k) > 0$, (ii) ne se présente pas.

   (a) **k et r impairs et $n_5(r) \geqslant 1$.** Nous allons montrer que le monôme dominant de $W_n P_r$ est aussi le monôme dominant de P_k.
   Par le lemme 4.16 (iii), l'exposant dominant de W_n est 4^n tandis que, par l'hypothèse de récurrence, P_r est non nul et l'exposant dominant m de P_r a pour code $[n_3(r), n_5(r) - 1]$. Par (4.74), on a $m < r < 4^n$, ce qui entraîne $\mathcal{S}(4^n) \cap \mathcal{S}(m) = \varnothing$; par le lemme 4.7 (iii), l'exposant dominant de $W_n P_r$ est

   $$M = 4^n + m \simeq [n_3(r), 2^{n-1} + n_5(r) - 1] = [n_3(k), n_5(k) - 1]$$

et $h(M) = h(k) - 1$.

Les exposants de $V_n P_{r+1}$ sont dominés par M. On a en effet par (4.32) (en notant que P_{r+1} est pair), (4.80), l'hypothèse de récurrence et (4.22)

$$\begin{aligned} h(V_n P_{r+1}) &\leqslant h(V_n) + h(P_{r+1}) \leqslant 2^{n-1} - 1 + h(r+1) - 2 \\ &\leqslant 2^{n-1} - 3 + h(r) + 1 = h(k) - 2, \end{aligned} \tag{4.90}$$

ce qui implique $h(V_n P_{r+1}) < h(M)$.

Lorsque $P_{r+4} \neq 0$, il reste à considérer le polynôme $U_n P_{r+4}$. Par le lemme 4.16 (i) et (4.78), l'exposant dominant de U_n est $a_n - 1$ et $h(U_n) = h(a_n - 1) = 2^{n-1} - 1$.

• *Supposons* $n_5(r+4) = 0$; en appliquant successivement (4.32) (en notant que U_n est pair), (4.78), l'hypothèse de récurrence et (4.25), on a

$$\begin{aligned} h(U_n P_{r+4}) &\leqslant h(U_n) + h(P_{r+4}) \leqslant 2^{n-1} - 1 + h(r+4) - 3 \\ &\leqslant 2^{n-1} - 4 + h(r) + 1 = h(k) - 3 < h(M), \end{aligned}$$

ce qui montre que les exposants de $U_n P_{r+4}$ sont dominés par M.

• *Supposons* $n_5(r+4) > 0$; par l'hypothèse de récurrence, l'exposant dominant m' de P_{r+4} a pour code

$$m' \simeq [n_3(r+4), n_5(r+4) - 1]. \tag{4.91}$$

Désignons par w l'exposant dominant de $U_n P_{r+4}$ et appliquons le lemme 4.7 au produit $U_n P_{r+4}$. Le nombre impair w' a pour code

$$w' \simeq [n_3(r+4), 2^{n-1} + n_5(r+4) - 2].$$

Si $h(r+4) \leqslant h(r)$, on a $h(w') < h(M)$ donc $w' \prec M$ et le lemme 4.7 (i) donne $w \preccurlyeq w' \prec M$.

Si $h(r+4) > h(r)$, (4.25) entraîne $h(r+4) = h(r) + 1$ et $h(w') = h(M)$. Distinguons deux possibilités.

Si $4 \in \mathcal{S}(r)$, par (4.14), on a $n_5(r+4) \leqslant n_5(r) + n_5(4) - 2 = n_5(r) - 1$, ce qui implique $w' \prec M$ et le lemme 4.7 (i) donne $w \preccurlyeq w' \prec M$.

Si $4 \notin \mathcal{S}(r)$, on a $n_5(r+4) = n_5(r) + 1 \geqslant 2$, $n_3(r+4) = n_3(r)$ et $w' = M$. Par (4.74), on a $m' \leqslant r < 4^n$; par (4.91), on a $n_5(m') = n_5(r+4) - 1 = n_5(r) \geqslant 1$ et, par (4.48), on voit que $\mathcal{S}(a_n - 1) \cap \mathcal{S}(m') \neq \varnothing$. Le lemme 4.7 (ii) donne $w \prec w' = M$.

Ainsi, dans tous les cas, les exposants de $U_n P_{r+4}$ sont dominés par M qui est ainsi, par (4.89), l'exposant dominant de P_k.

(b) **k et r impairs et $n_5(r) = 0$.** On a $n_5(k) = 2^{n-1} > 0$. Nous allons montrer que le monôme dominant de P_k est celui de $U_n P_{r+4}$. On a $4 \notin \mathcal{S}(r)$, $n_3(r+4) = n_3(r), n_5(r+4) = n_5(r) + 1 = 1$; par le lemme 4.16 (i), l'exposant dominant de U_n est $a_n - 1$ et, par l'hypothèse de récurrence, on a $P_{r+4} \neq 0$ et l'exposant dominant m' de P_{r+4} a pour code $[n_3(r), 0]$. Par (4.74), on a $m' \leqslant r < 4^n$, ce qui, par (4.48), implique $\mathcal{S}(m') \cap \mathcal{S}(a_n - 1) = \varnothing$. Le lemme 4.7 (iii) montre que l'exposant dominant de $U_n P_{r+4}$ est

$$M' = a_n - 1 + m' \simeq [n_3(r), 2^{n-1} - 1] = [n_3(k), n_5(k) - 1]$$

et $h(M') = h(k) - 1$.

La majoration (4.90) est encore valable; elle montre que $h(V_n P_{r+1}) < h(M')$ et qu'ainsi les exposants du produit $V_n P_{r+1}$ sont dominés par M'.

Les exposants de $W_n P_r$ sont aussi dominés par M' : comme $n_5(r) = 0$, l'hypothèse de récurrence implique $h(P_r) \leqslant h(r) - 3$ et, par (4.32) et (4.81), il vient

$$h(W_n P_r) \leqslant h(W_n) + h(P_r) \leqslant 2^{n-1} + h(r) - 3 = h(k) - 3 < h(M').$$

On conclut, par (4.89) et (4.30), que l'exposant dominant de P_k est M', ce qui, avec le sous-cas (a), prouve le point (i).

(c) k **et** r **pairs.** Nous allons prouver (iii) à partir de la relation (4.89). En utilisant (4.32), (4.81) et l'hypothèse de récurrence, il vient

$$h(W_n P_r) \leqslant h(W_n) + h(P_r) \leqslant 2^{n-1} + h(r) - 2 = h(k) - 2. \tag{4.92}$$

En notant que V_n et P_{r+1} sont impairs, on a la majoration

$$\begin{aligned} h(V_n P_{r+1}) &\leqslant h(V_n) + h(P_{r+1}) + 1 \leqslant 2^{n-1} + h(r+1) - 1 \\ &= 2^{n-1} + h(r) - 1 = h(k) - 1. \end{aligned} \tag{4.93}$$

De même, par (4.32), (4.78), l'hypothèse de récurrence et (4.25), on a

$$\begin{aligned} h(U_n P_{r+4}) &\leqslant h(U_n) + h(P_{r+4}) \leqslant 2^{n-1} - 1 + h(r+4) - 2 \\ &\leqslant 2^{n-1} + h(r) - 2 = h(k) - 2. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Finalement, par (4.89) et (4.30), de (4.92), (4.93) et (4.94), on déduit

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 1.$$

Mais, par (4.75), $h(P_k) - h(k)$ est congru à k modulo 2, donc est pair, ce qui entraîne $h(P_k) \leqslant h(k) - 2$, c'est-à-dire (4.87).

2. **Deuxième cas :** $2 \cdot 4^n \leqslant k < 4^{n+1}$**.** On pose $s = k - 2 \cdot 4^n$ et, par (4.85), on a

$$P_k = P_{2\cdot 4^n + s} = Y_n P_s + x^3 U_n^2 P_{s+1} + V_n^2 P_{s+2} + x U_n^2 P_{s+3}. \tag{4.95}$$

Puisque $s \leqslant k - 32$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $s, s+1, s+2$ et $s+3$. On a aussi $s = k - 2 \cdot 4^n < 2 \cdot 4^n$, $n_3(k) = 2^n + n_3(s)$, $n_5(k) = n_5(s)$ et $h(k) = 2^n + h(s)$.

Distinguons trois sous-cas correspondants aux points (i), (ii) et (iii).

(a) k **et** s **impairs et** $n_5(k) = n_5(s) \geqslant 1$**.** Nous allons montrer que le monôme dominant de $Y_n P_s$ est aussi celui de P_k.

Par le lemme 4.16 (iv), l'exposant dominant de Y_n est 2^{2n+1}. Par l'hypoyhèse de récurrence, l'exposant dominant m de P_s a pour code $[n_3(s), n_5(s) - 1]$. Par (4.74), on a $m < s < 2^{2n+1}$, ce qui implique $\mathcal{S}(m) \cap \mathcal{S}(2^{2n+1}) = \varnothing$ et, par le lemme 4.7 (iii), l'exposant dominant de $Y_n P_s$ est

$$M = 2 \cdot 4^n + m \simeq [2^n + n_3(s), n_5(s) - 1] = [n_3(k), n_5(k) - 1]. \tag{4.96}$$

Nous allons montrer maintenant que les exposants de $x^3 U_n^2 P_{s+1}$, $V_n^2 P_{s+2}$ et $x U_n^2 P_{s+3}$ sont tous dominés par M. Les majorations ci-dessous s'effectuent en utilisant (4.32) ainsi que le lemme 4.16, l'hypothèse de récurrence et les inégalités (4.22), (4.23) et (4.24). On obtient successivement

$$\begin{aligned} h(x^3 U_n^2 P_{s+1}) &\leqslant h(x^3 U_n^2) + h(P_{s+1}) \leqslant 2^n - 1 + h(s+1) - 2 \\ &\leqslant 2^n + h(s) - 2 = h(k) - 2, \end{aligned} \tag{4.97}$$

$$\begin{aligned} h(V_n^2 P_{s+2}) &\leqslant h(V_n^2) + h(P_{s+2}) \leqslant 2^n - 2 + h(s+2) - 1 \\ &\leqslant 2^n - 2 + h(s) = h(k) - 2 \end{aligned} \tag{4.98}$$

et

$$\begin{aligned} h(x U_n^2 P_{s+3}) &\leqslant h(x U_n^2) + h(P_{s+3}) \leqslant 2^n - 2 + h(s+3) - 2 \\ &\leqslant 2^n + h(s) - 3 = h(k) - 3. \end{aligned} \tag{4.99}$$

Comme, par (4.96), on a $h(M) = h(k) - 1$, les formules (4.95), (4.97), (4.98) et (4.99) montrent que l'exposant dominant de P_k est M ce qui prouve (i).

(b) k **et** s **impairs et** $n_5(k) = n_5(s) = 0$**.** L'hypothèse de récurrence donne $h(P_s) \leqslant h(s) - 3$, impliquant

$$h(Y_n P_s) \leqslant h(Y_n) + h(P_s) = 2^n + h(P_s) \leqslant 2^n + h(s) - 3 = h(k) - 3.$$

Par ailleurs, les inégalités (4.97), (4.98) et (4.99) restent valables et, avec (4.95) et (4.30), entraînent

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 2.$$

Mais, par (4.75), $h(P_k) - h(k)$ est congru modulo 2 à k, donc est impair; on obtient ainsi $h(P_k) \leqslant h(k) - 3$, ce qui prouve (ii).

(c) k **et** s **pairs.** Nous allons prouver (iii) à partir des relations (4.95), (4.32), du lemme 4.16, de l'hypothèse de récurrence et des formules (4.22)–(4.24) qui, comme s est pair, donnent $h(s+1) = h(s)$, $h(s+2) \leqslant h(s) + 1$ et $h(s+3) \leqslant h(s) + 1$. On obtient successivement

$$h(Y_n P_s) \leqslant h(Y_n) + h(P_s) = 2^n + h(P_s) \leqslant 2^n + h(s) - 2 = h(k) - 2,$$

$$\begin{aligned} h(x^3 U_n^2 P_{s+1}) &\leqslant h(x^3 U_n^2) + h(P_{s+1}) + 1 = 2^n + h(P_{s+1}) \\ &\leqslant 2^n + h(s+1) - 1 = 2^n + h(s) - 1 = h(k) - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(V_n^2 P_{s+2}) &\leqslant h(V_n^2) + h(P_{s+2}) = 2^n - 2 + h(P_{s+2}) \\ &\leqslant 2^n - 4 + h(s+2) \leqslant 2^n - 3 + h(s) = h(k) - 3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(xU_n^2 P_{s+3}) &\leqslant h(xU_n^2) + h(P_{s+3}) + 1 = 2^n - 1 + h(P_{s+3}) \\ &\leqslant 2^n - 2 + h(s+3) \leqslant 2^n + h(s) - 1 = h(k) - 1. \end{aligned}$$

Par les formules (4.95) et (4.30), il vient donc

$$h(P_k) \leqslant h(k) - 1$$

mais, par l'argument de parité (4.75), $h(P_k) - h(k)$ est pair; cela implique $h(P_k) \leqslant h(k) - 2$, ce qui prouve (iii). $\square$

5 Détermination de l'ordre de nilpotence

5.1 Calcul de l'ordre de nilpotence

Rappelons que $\mathcal{F}$ est le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de $\mathbf{F}_2[\Delta]$ engendré par les puissances d'exposant impair de Δ (cf. §2.1). En utilisant la relation de domination (4.26), nous écrirons une forme modulaire $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0$ sous la forme

(5.1) $$f = \Delta^{m_1} + \Delta^{m_2} \ldots + \Delta^{m_r} \quad \text{avec} \quad m_1 \succ m_2 \succ \ldots \succ m_r.$$

On dit que m_1 est l'exposant dominant de f et l'on définit $h(f)$ par (4.29), c'est-à-dire

(5.2) $$h(f) = h(m_1) = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} h(m_i).$$

Théorme 5.1 *(i) Pour $p = 3$ ou 5, on a*

$$h(T_p|f) \leqslant h(f) - 1.$$

(ii) Si $n_3(m_1) \geqslant 1$, on a $T_3|f \neq 0$ et l'exposant dominant de $T_3|f$ a pour code $[n_3(m_1) - 1, n_5(m_1)]$.

(iii) Si $n_5(m_1) \geqslant 1$, on a $T_5|f \neq 0$ et l'exposant dominant de $T_5|f$ a pour code $[n_3(m_1), n_5(m_1) - 1]$.

(iv) On a

(5.3) $$T_3^{n_3(m_1)} T_5^{n_5(m_1)} | f = \Delta.$$

(v) La valeur de l'ordre de nilpotence $g(f)$ (cf. § 2.5) est donnée par

(5.4) $$g(f) = h(f) + 1.$$

Démonstration : (i) En utilisant la notation $P_k^{(p)} = T_p|\Delta^k$ (cf. (4.40) et (4.71)), on a

$$T_p|f = T_p \left| \left(\sum_{i=1}^{r} \Delta^{m_i} \right) \right. = \sum_{i=1}^{r} T_p|\Delta^{m_i} = \sum_{i=1}^{r} P_{m_i}^{(p)}(\Delta)$$

ce qui, par (4.30), entraîne

$$h(T_p|f) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant r} h(P^{(p)}_{m_i}).$$

Par (4.52) (si $p=3$) et par (4.88) (si $p=5$) on a

$$h(P^{(p)}_{m_i}) \leqslant h(m_i)-1 \quad (1\leqslant i\leqslant r)$$

et (i) en découle, puisque, par (5.2), $h(m_i)\leqslant h(f)$.

(ii) Désignons par ν_i (lorsque $T_3|\Delta^{m_i}\neq 0$) l'exposant dominant de $T_3|\Delta^{m_i} = P^{(3)}_{m_i}$. Par la proposition 4.14 (i), on a $\nu_1 \simeq [n_3(m_1)-1, n_5(m_1)]$, et il suffit de démontrer que, pour $i\geqslant 2$,

$$\nu_i \ \prec\ \nu_1. \tag{5.5}$$

Si $h(m_i)<h(m_1)$, par (4.52), il vient

$$h(\nu_i)\leqslant h(m_i)-1<h(m_1)-1=h(\nu_1),$$

ce qui prouve (5.5).
Si $h(m_i) = h(m_1)$, comme m_i est dominé par m_1, on a $n_5(m_i) < n_5(m_1)$ (si $n_5(m_1)=0$, ce cas ne se présente pas), $n_3(m_i) > n_3(m_1) \geqslant 1$ et, par la proposition 4.14 (i), $\nu_i \simeq [n_3(m_i)-1, n_5(m_i)]$; (5.5) en résulte.

(iii) La preuve est identique à celle de (ii), en appliquant (4.88) et la proposition 4.19 (i) au lieu de respectivement (4.52) et la proposition 4.14 (i).

(iv) Posons $\varphi = T_3^{n_3(m_1)}T_5^{n_5(m_1)}|f$. En appliquant $n_3(m_1)$ fois (ii) et $n_5(m_1)$ fois (iii), on voit que $\varphi\neq 0$ et que son exposant dominant m a pour code $[0,0]$; comme m est impair, on a $m=1$ d'où $\varphi=\Delta$, ce qui démontre (5.3). Notons que (5.3) implique

$$g(f)\geqslant n_3(m_1)+n_5(m_1)+1 = h(m_1)+1 = h(f)+1. \tag{5.6}$$

(v) Soit $d=\max(m_1,m_2,\ldots,m_r)$ le degré de f; on va démontrer (5.4) par récurrence sur le nombre impair d.

Si $d=1,3$ ou 5, (5.4) résulte de (2.13), (2.14) et de la table (4.6).

Soit $d\geqslant 7$ et supposons (5.4) vraie pour toute forme de degré $\leqslant d-2$. Pour $d\geqslant 7$, on a $h(d)\geqslant 2$ et la définition de l'exposant dominant entraîne $h(f)=h(m_1)\geqslant h(d)\geqslant 2$. Par (5.6), on a $g(f)\geqslant h(f)+1\geqslant 3$; donc il existe des nombres premiers impairs $p_1,p_2,\ldots,p_s$ avec $s=g(f)-1\geqslant 2$ et

$$T_{p_1}T_{p_2}\ldots T_{p_s}|f\neq 0. \tag{5.7}$$

Posons $\varphi=T_{p_s}|f$ et calculons $g(\varphi)$. De (5.7), on déduit

$$T_{p_1}T_{p_2}\ldots T_{p_{s-1}}|\varphi = T_{p_1}T_{p_2}\ldots T_{p_s}|f\neq 0,$$

ce qui implique $g(\varphi)\geqslant s$. Mais (2.11) entraîne $g(\varphi)=g(T_p|f)\leqslant g(f)-1=s$. On en déduit

$$g(\varphi)=s=g(f)-1\geqslant 2. \tag{5.8}$$

Observons que (5.7) et $s \geqslant 2$ entraînent $\varphi \neq 0$. Par (2.8), le degré de φ est $\leqslant d-2$; on peut donc appliquer à φ l'hypothèse de récurrence, ce qui donne $g(\varphi) = h(\varphi)+1$. En désignant par j l'exposant dominant de φ, avec (5.8), il vient

$$g(\varphi) = h(\varphi)+1 = h(j)+1 = s \geqslant 2. \tag{5.9}$$

Soit $[u, v]$ le code de j, avec $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ et $u+v = s-1$. En appliquant (iv) à φ et en posant $q_1 = q_2 = \ldots = q_u = 3$ et $q_{u+1} = q_{u+2} = \ldots = q_{u+v} = 5$, il vient

$$T_{q_1}T_{q_2}\ldots T_{q_{s-1}}|\varphi = T_{q_1}T_{q_2}\ldots T_{q_{s-1}}T_{p_s}|f = \Delta.$$

Posons $\psi = T_{q_{s-1}}|f$; on a

$$T_{q_1}T_{q_2}\ldots T_{q_{s-2}}T_{p_s}|\psi = T_{q_1}T_{q_2}\ldots T_{q_{s-1}}T_{p_s}|f = \Delta.$$

Cette formule montre que $g(\psi) \geqslant s$. Mais (2.11) entraîne $g(\psi) = g(T_{q_{s-1}}|f) \leqslant g(f)-1 = s$ et $g(\psi) = s$.

Par (2.8), le degré de ψ est $\leqslant d-2$; et l'hypothèse de récurrence donne $g(\psi) = h(\psi)+1$. On a ainsi

$$g(\psi) = s = g(f)-1 = h(\psi)+1. \tag{5.10}$$

Par (i), on a $h(T_{q_{s-1}}|f) \leqslant h(f)-1$, d'où, par (5.10)

$$s-1 = g(f)-2 = h(\psi) = h(T_{q_{s-1}}|f) \leqslant h(f)-1$$

ce qui implique $g(f) \leqslant h(f)+1$; vu (5.6), cela entraîne (5.4). □

Corollaire 5.2 *Soit $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0$. Si $T_3|f = T_5|f = 0$, alors $f = \Delta$.*

Démonstration : En effet, d'après (iv), on a $n_3(m_1) = n_5(m_1) = 0$, d'où $m_1 = 1$ et $f = \Delta$. □

Corollaire 5.3 *Soit $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0$, et p un nombre premier vérifiant $p \equiv \pm 1 \pmod 8$. Alors, on a*

$$g(T_p|f) \leqslant g(f)-2. \tag{5.11}$$

Démonstration : Considérons d'abord le cas où $f = \Delta^k$ (avec k impair, $k \geqslant 1$). (5.4) implique $g(\Delta^k) = h(\Delta^k)+1 = h(k)+1 \geqslant 1$.

Si $T_p|\Delta^k = 0$, par (2.10) on a $g(T_p|\Delta^k) = -\infty$ et (5.11) est vérifiée.

Si $T_p|\Delta^k \neq 0$, on écrit $T_p|\Delta^k = \Delta^{m_1} + \Delta^{m_2} + \ldots + \Delta^{m_r}$ et, par (2.8), pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on a $m_i \equiv pk \equiv \pm k \pmod 8$. Par la table (4.7), il s'ensuit que $h(m_i) \equiv h(k) \pmod 2$. Ainsi, par (5.2), on a

$$h(T_p|\Delta^k) \equiv h(k) \pmod 2. \tag{5.12}$$

Ensuite, en appliquant (5.4) à $T_p|\Delta^k$ et à Δ^k, on obtient

$$g(T_p|\Delta^k) = h(T_p|\Delta^k)+1 \quad \text{et} \quad g(\Delta^k) = h(\Delta^k)+1 = h(k)+1. \tag{5.13}$$

On déduit de (5.12) et (5.13)

$$g(T_p|\Delta^k) \equiv g(\Delta^k) \pmod 2. \tag{5.14}$$

Mais, par (2.11), on a $g(T_p|\Delta^k) \leqslant g(\Delta^k) - 1$, ce qui avec (5.14), prouve

$$g(T_p|\Delta^k) \leqslant g(\Delta^k) - 2 \tag{5.15}$$

c'est-à-dire (5.11) lorsque f est un monôme en Δ. Notons que (5.13) et (5.15) entraînent

$$h(T_p|\Delta^k) \leqslant h(\Delta^k) - 2 = h(k) - 2. \tag{5.16}$$

Soit maintenant $f = \Delta^{k_1} + \Delta^{k_2} = \ldots + \Delta^{k_s}$ avec $s \geqslant 2$ et $k_1 > k_2 > \ldots > k_s$. Il vient $T_p|f = T_p|\Delta^{k_1} + T_p|\Delta^{k_2} + \ldots + T_p|\Delta^{k_s}$ et de (4.30) et (5.16), il résulte

$$\begin{aligned} h(T_p|f) &\leqslant \max(h(T_p|\Delta^{k_1}), h(T_p|\Delta^{k_2}), \ldots, h(T_p|\Delta^{k_s})) \\ &\leqslant \max(h(k_1) - 2, h(k_2) - 2, \ldots, h(k_s) - 2) = h(f) - 2, \end{aligned}$$

ce qui, avec les relations $g(T_p|f) = h(T_p|f) + 1$ et $g(f) = h(f) + 1$ fournies par (5.4), termine la démonstration de (5.11). $\square$

5.2 Une autre preuve de la nilpotence de T_p

Soit p un nombre premier congru à $3, 5$ ou 7 modulo 2. Nous avons vu au §2.3 que la nilpotence de T_p résultait de (2.5) et de (2.6).

Soit maintenant $p \equiv 1 \bmod 8$. Par (2.5), $T_p|\Delta$ est égal à 0 ou à Δ. Mais $T_p(\Delta) = \Delta$ entrainerait que dans le développement en q de Δ le coefficient de q^p soit égal à 1, ce qui, par (1.2), n'est pas vrai. On a donc

$$T_p|\Delta = 0. \tag{5.17}$$

Supposons qu'il existe k impair tel que $T_p|\Delta^k$ soit un polynôme de degré k en Δ et soit k_0 le plus petit tel k. Notons que (5.17) implique $k_0 \geq 3$. On peut écrire

$$T_p|\Delta^{k_0} = \Delta^{k_0} + \sum_{j \leqslant k_0 - 2} \varepsilon_{k_0,j}\ \Delta^j, \quad \varepsilon_{k_0,j} \in \mathbf{F}_2 \tag{5.18}$$

et, pour k impair $< k_0$,

$$T_p|\Delta^k = \sum_{j \leqslant k-2} \varepsilon_{k,j}\ \Delta^j, \quad \varepsilon_{k,j} \in \mathbf{F}_2. \tag{5.19}$$

Soit $\mathcal{F}^{(k_0)}$ le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de base $\Delta, \Delta^3, \ldots, \Delta^{(k_0)}$; la matrice de la restriction de l'opérateur T_p à $\mathcal{F}^{(k_0)}$ dans cette base est triangulaire, ses valeurs propres sont 0 et 1 et il existe une forme $\varphi \in \mathcal{F}^{(k_0)}$ de degré k_0 vérifiant

$$T_p|\varphi = \varphi. \tag{5.20}$$

Remarquons que $\varphi \neq \Delta$ puisque le degré k_0 de φ est $\geqslant 3$. Par le corollaire 5.2, il existe $\ell \in \{3, 5\}$ tel que

$$T_\ell|\varphi \neq 0. \tag{5.21}$$

Ensuite, on fixe $r > k_0$ et l'on considère l'action de l'opérateur

$$T_\ell (T_p)^r = (T_p)^r T_\ell$$

sur Δ^{k_0}. Par (5.20) et (5.21), il vient

$$T_\ell (T_p)^r | \varphi = T_\ell | \varphi \neq 0. \tag{5.22}$$

D'autre part, puisque T_3 et T_5 sont nilpotents, on a

$$\text{degré } T_\ell | \varphi \leqslant k_0 - 2$$

ce qui implique, par (5.19)

$$(T_p)^r \, T_\ell | \varphi = 0,$$

en contradiction avec (5.22), ce qui achève la preuve de la nilpotence de l'opérateur de Hecke T_p modulo 2.

5.3 Estimation de $g(k) = g(\Delta^k)$

Proposition 5.4 *Soit k impair $\geqslant 1$. On a*

$$\frac{\sqrt{k}}{2} < 1 + \frac{\sqrt{k-1}}{2} \leqslant g(k) \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{k+1} - 1 < \frac{3}{2}\sqrt{k}. \tag{5.23}$$

On a $g(k) = 1 + \frac{\sqrt{k-1}}{2}$ si et seulement si k est de la forme

$$k = 1 \quad \textit{ou} \quad k = 4^a + 1 \simeq [0, 2^{a-1}] \quad \textit{avec } a \geqslant 1.$$

On a $g(k) = \frac{3}{2}\sqrt{k+1} - 1$ si et seulement si k est de la forme

$$k = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{2a-1} = 4^a - 1 \simeq [2^a - 1, 2^{a-1} - 1]. \tag{5.24}$$

Démonstration : Soit r le plus petit nombre tel que $k \leqslant 4^r - 1$. On pose

$$k = 1 + \sum_{i=1}^{2r-1} \beta_i 2^i, \quad \text{avec } \beta_i \in \{0,1\} \quad \text{et} \quad \max(\beta_{2r-1}, \beta_{2r-2}) = 1.$$

Soit $i \geqslant 1$; on pose (cf (4.4))

$$U_i = h(2^i) = \begin{cases} n_5(2^i) = 2^{\frac{i-2}{2}} & \text{si } i \text{ est pair} \\ n_3(2^i) = 2^{\frac{i-1}{2}} & \text{si } i \text{ est impair,} \end{cases}$$

$V_0 = 0$ et

$$V_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i} U_j = \begin{cases} 2^{\frac{i+2}{2}} - 2 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 3 \cdot 2^{\frac{i-1}{2}} - 2 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par (4.3), on a ainsi

$$h(k) = \sum_{i=1}^{2r-1} \beta_i U_i \leqslant V_{2r-1},$$

et, par le théorème 5.1,

$$g(k) = g(\Delta^k) = h(k) + 1.$$

Minoration de $g(k)$. En observant que $\beta_i^2 = \beta_i$, il vient

$$(5.25)\quad (g(k)-1)^2 = h(k)^2 = \left(\sum_{i=1}^{2r-1} \beta_i U_i\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2r-1} \beta_i^2 U_i^2$$

$$(5.26)\quad \geqslant \sum_{i=1}^{2r-1} \beta_i 2^{i-2} = \frac{k-1}{4}\cdot$$

L'inégalité large (5.25) est une égalité si et seulement si au plus un chiffre binaire β_i de $k-1$ est non nul. Il n'y a égalité dans (5.26) que si ce chifre β_i a un indice i pair.

Majoration de $g(k)$. On a

$$\begin{aligned}
(1+g(k))^2 &= (2+h(k))^2 = \left(2 + \sum_{i=1}^{2r-1} \beta_i U_i\right)^2 \\
&= 4 + \sum_{i=1}^{2r-1} \beta_i U_i \left(4 + U_i + 2 \sum_{1\leqslant j\leqslant i-1} \beta_j U_j\right) \\
&\leqslant S \stackrel{def}{=\!=} 4 + \sum_{i=1}^{2r-1} \beta_i U_i \left(4 + U_i + 2V_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité $\beta_i \sum_{1\leqslant j\leqslant i-1} \beta_j U_j \leqslant \beta_i V_{i-1}$. Notons que cette inégalité n'est une égalité que si $\beta_i = 0$ ou $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_i = 1$. Cela entraîne, puisque l'un des deux chiffres β_{2r-1} ou β_{2r-2} est non nul

$$(5.27)\qquad (1+g(k))^2 = S \iff \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{2r-2} = 1.$$

Calculons maintenant S, en séparant les indices pairs et impairs.

$$\begin{aligned}
S &= 4 + \beta_1 U_1(4+U_1) + \sum_{\ell=1}^{r-1} \Big(\beta_{2\ell} U_{2\ell} \left(4 + U_{2\ell} + 2V_{2\ell-1}\right) \\
&\qquad + \beta_{2\ell+1} U_{2\ell+1} \left(4 + U_{2\ell+1} + 2V_{2\ell-1} + 2\beta_{2\ell} U_{2\ell}\right)\Big) \\
&= 4 + 5\beta_1 + \sum_{\ell=1}^{r-1} 2^{2\ell} \left(\frac{7}{4}\beta_{2\ell} + 4\beta_{2\ell+1} + \beta_{2\ell}\beta_{2\ell+1}\right).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\frac{9}{4}(k+1) - S &= \frac{9}{4}(2+2\beta_1) - (4+5\beta_1) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{r-1} 2^{2\ell} \left(\frac{9}{4}(\beta_{2\ell} + 2\beta_{2\ell+1}) - \frac{7}{4}\beta_{2\ell} - 4\beta_{2\ell+1} - \beta_{2\ell}\beta_{2\ell+1}\right) \\
(5.28)\qquad &= \frac{1}{2}(1-\beta_1) + \sum_{\ell=1}^{r-1} 2^{2\ell-1} (\beta_{2\ell} - \beta_{2\ell+1})^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Par (5.27) et (5.28), pour que l'on ait $(1+g(k))^2 = \frac{9}{4}(k+1)$ il faut et il suffit que l'on ait $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{2r-1} = 1$, c'est-à-dire $k = 4^r - 1$. □

Corollaire 5.5 *Soit $f \in \mathbf{F}_2[\Delta]$ une forme modulaire modulo 2 de degré $d \geqslant 1$ en Δ. On a*

$$g(f) < \frac{3}{2}\sqrt{d}.$$

Démonstration : Considérons d'abord le cas $f \in \mathcal{F}$, que l'on écrit sous la forme (5.1). Par (2.12) et (5.23), on a

$$g(f) \leqslant \max(g(m_1), \ldots, g(m_r)) < \frac{3}{2}\max(\sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_r}) = \frac{3}{2}\sqrt{d}.$$

Supposons maintenant f parabolique. Par (2.2), $f = \sum_{s=0}^{S} f_s^{2^s}$ avec $f_s \in \mathcal{F}$. Mais, pour p impair, on a $T_p|f_s^{2^s} = (T_p|f_s)^{2^s}$, d'où l'on déduit $g(f_s^{2^s}) = g(f_s)$ et, par (2.12), en notant d_s le degré de f_s (si $f_s = 0, d_s = -\infty$), on a

$$\begin{aligned} g(f) \leqslant\ & \max\left((g\left(f_0^{2^0}\right), g\left(f_1^{2^1}\right), \ldots, g\left(f_S^{2^S}\right)\right) = \max(g(f_0), g(f_1), \ldots, g(f_S)) \\ <\ & \frac{3}{2}\max(d_0, d_1, \ldots, d_S) \leqslant \frac{3}{2}d. \end{aligned}$$

Enfin, si f est non parabolique, par (2.3), $\varphi = f - 1$ est parabolique de degré $d \geqslant 1$. Par (2.4), $T_p|1 = 0$ pour tout p premier impair et $g(1) = 1$. On a donc, par (2.12), $g(f) = g(1+\varphi) \leqslant \max(g(1), g(\varphi)) < \frac{3}{2}\sqrt{d}$. □

Proposition 5.6 *Soit k impair $\geqslant 1$. On a*

$$0 \leqslant n_3(k) \leqslant \sqrt{\frac{3k-1}{2}} - 1 < \sqrt{\frac{3k}{2}}. \tag{5.29}$$

On a $n_3(k) = \sqrt{\frac{3k-1}{2}} - 1$ si et seulement si k est de la forme

$$k = 1 + 2 + 8 + 32 + \ldots + 2 \cdot 4^{a-1} = 1 + 2\frac{4^a - 1}{3} \simeq [2^a - 1, 0]. \tag{5.30}$$

Démonstration : On a $n_3(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1} 2^i$ (cf. §4.1) et

$$\begin{aligned} (n_3(k)+1)^2 &= 1 + 2\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}2^i + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}^2 2^{2i} \\ &\quad + 2\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}2^i \left(\sum_{0 \leqslant j < i} \beta_{2j+1}2^j\right) \\ &\leqslant 1 + 2\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}2^i + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}2^{2i} + 2\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}2^i(2^i - 1) \\ &= 3\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}2^{2i} + 1 = \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1}2^{2i+1} + 1 \leqslant 1 + \frac{3}{2}(k-1). \end{aligned}$$

Pour que l'on ait dans le calcul ci-dessus $(n_3(k)+1)^2 = 1 + \frac{3}{2}(k-1)$, il faut et il suffit que l'on ait $\beta_i = 1$ pour tout i impair et $\beta_i = 0$ pour tout i pair $\geqslant 2$. □

Proposition 5.7 *Soit k impair $\geqslant 1$. On a*

$$0 \leqslant n_5(k) \leqslant \sqrt{\frac{3k+1}{4}} - 1 < \sqrt{\frac{3k}{4}}. \tag{5.31}$$

On a $n_5(k) = \sqrt{\frac{3k+1}{4}} - 1$ si et seulement si k est de la forme

$$k = 1 + 4 + 16 + 64 + \ldots + 4^{a-1} = \frac{4^a - 1}{3} \simeq [0, 2^{a-1} - 1]. \tag{5.32}$$

Démonstration : La démonstration est similaire à celle de la proposition 5.6. □

Références

[1] W. E. H. Berwick. An invariant modular equation of the fifth order. *Quart J. Math.*, 47, 1916, 94–103.

[2] D. A. Cox. Primes of the form $x^2 + ny^2$. John Wiley & Sons, 1989.

[3] M. Gerbelli-Gautier The order of nilpotence of Hecke operators mod 2 : a new proof. Res. Number Theory 2, 2016, Paper n° 7, 13 pp.

[4] G.H. Hardy and E.M. Wright. An introduction to the theory of numbers, 4th edition, Oxford at the Clarendon Press, 1964.

[5] K. Hatada. Eigenvalues of Hecke Operators on $SL(2, \mathbf{Z})$, *Math. Annalen*, 239, 1979, 75–96.

[6] H. Ito. Computation of the Modular Equation, *Proc. Japan Acad.* , 71, Ser. A, 1995, 48–50.

[7] E. Kaltofen and N. Yui. Explicit construction of the Hilbert Class Fields of Imaginary Quadratic Fields with Class Numbers 7 and 11, EUROSAM 84 (Cambridge, 1984), *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 174, Springer, Berlin, 1984, 310–320.

[8] E. Kaltofen and N. Yui. On the modular equation of order 11, in Third MACSYMA User's conference, Proceedings, *General electric*, 1984, 472–485.

[9] S. Lang Elliptic functions. 2nd edition, Springer-Verlag, 1986.

[10] J.-L. Nicolas. Parité des valeurs de la fonction de partition $p(n)$ et anatomie des entiers, Centre de Recherches Mathématiques, *CRM Proceedings and Lecture Notes*, 46, 2008, 97–113.

[11] J-L. Nicolas et J-P. Serre. *Formes modulaires modulo 2 : l'ordre de nilpotence des opérateurs de Hecke*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 350 (2012), 343–348. `http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.03.019`. http://arxiv.org/abs/1204.1036

[12] J-L. NICOLAS et J-P. SERRE. *Formes modulaires modulo* 2 : *structure de l'algèbre de Hecke*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 350 (2012), 449–454. http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.03.013. http://arxiv.org/abs/1204.1039

[13] K. ONO. The Web of Modularity : Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and q-series, *Amer. Math. Soc.*, CBMS n° 102, 2004.

[14] J.-P. SERRE. Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques, *L'Enseignement Math.* 22, 1976, 227–260 ou *Séminaire Delange–Pisot–Poitou (Théorie des nombres)*, 16ème année, 1974/75, n°20, 28 p.

[15] J.-P. SERRE. Valeurs propres des opérateurs de Hecke modulo ℓ, *Astérisque* 24-25, 1975, 109–117.

[16] H. J. S. SMITH. Note on the modular equation for the transformation of the third order, *Proc. London Math. Soc.*, 10, 1878, 87–91.

[17] H. P. F. SWINNERTON-DYER. On ℓ-representations and congruences for coefficients of modular forms, *Springer Lect. Notes* 350, 1973, 1–55.

[18] http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/nicolas/polHecke.html

Jean-Louis NICOLAS,
Université de Lyon, CNRS, Université Lyon 1,
Institut Camille Jordan, Mathématiques,
43 Bd. du 11 Novembre 1918,
F-69622 Villeurbanne Cedex, France.

nicolas@math.univ-lyon1.fr
http://math.univ-lyon1.fr/~nicolas/

jpserre691@gmail.com