ACTA ARITHMETICA
L (1988)

# Evaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique

par

J. P. Massias, J. L. Nicolas et G. Robin (Limoges)

**1. Introduction.** Soit $S_n$ le groupe des permutations d'un ensemble á $n$ éléments. On définit:

$$g(n) = \max_{\sigma \in S_n}(\text{ordre de } \sigma).$$

E. Landau en 1909 (cf. [6]) a étudié cette fonction et a montré notamment:

$$\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}.$$

Plus tard S. M. Shah en 1939 (cf. [18]) a précisé le comportement de la manière suivante:

$$\log g(n) = \sqrt{n \log n}\left(1 + \frac{\log\log n}{2\log n} + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right).$$

J. L. Nicolas en 1969 (cf. [11]) a donné un algorithme de calcul de $g(n)$. Dans cet article, il mentionne deux tables créées avec son algorithme: $g(n)$ et sa décomposition en facteurs premiers pour $n \leqslant 8100$, $g(n)$ avec 8 chiffres significatifs pour $n \leqslant 32000$.

M. Szalay en 1980 (cf. [20]), quant à lui, donne un développement plus précis de $\log g(n)$ et de $\omega(g(n))$ nombre de facteurs premiers de $g(n)$:

$$\log g(n) = \left(n\left(\log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2 + o(1)}{\log n}\right)\right)^{1/2},$$

$$\omega(g(n)) = 2\left(\frac{n}{\log n}\left(1 - \frac{\log\log n}{\log n} + \frac{\eta(n)}{\log n}\right)\right)^{1/2}$$

avec, pour $n$ assez grand:

(1) $$1{,}75 < \eta(n) < 3{,}05.$$

J. P. Massias (cf. [7], [8]) a donné la majoration explicite, pour tout $n \geqslant 1$:

(2) $$\log g(n) \leqslant 1{,}05313\ldots\sqrt{n\log n}$$

avec égalité pour $n = 1319766$.

D'autres résultats concernant $g(n)$ ont été démontrés dans [9], [10], [12], et dans [13], il est établi:

$$\lim g(n+1)/g(n) = 1.$$

La fonction $g(n)$ intervient dans quelques domaines de l'informatique (cf. [21], et [22]).

A. Schinzel utilise la fonction $g(n)$, et le résultat de E. Landau dans son article sur l'irréductibilité des polynômes lacunaires (cf. [17]). J. P. Massias a donné dans sa thèse (cf. [8]), une version effective de certains résultats de A. Schinzel en utilisant (2), et l'article de H. Siebert (cf. [19]) sur le crible.

Le but du travail présenté est de donner le meilleur développement asymptotique possible de $\log g(n)$ et de $\omega(g(n))$ compte tenu des connaissances actuelles sur le terme reste dans le théorème des nombres premiers.

**2. Notations.** Dans tout l'article nous utilisons sans les redéfinir les notations suivantes:

$\theta(x) = \sum_{p\leqslant x} \log p$, $p$ désignant comme dans ce qui suit un nombre premier,

$$\psi(x) = \sum_{p^m\leqslant x} \log p,$$

$$\pi_r(x) = \sum_{p\leqslant x} p^r, \qquad r\in \boldsymbol{R},$$

$$\Pi_r(x) = \sum_{p^m\leqslant x} p^{rm}/m, \quad r\in \boldsymbol{R},$$

$$\pi(x) = \pi_0(x),$$

$$\Pi(x) = \Pi_0(x),$$

$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ pour $\operatorname{Re} s > 1$, et son prolongement analytique,

$$\theta = \sup\{\operatorname{Re}\varrho;\ \zeta(\varrho) = 0\}.$$

La transformée de Mellin de $f$ sera notée:

$$\mathfrak{M}(f)(s) = \int_2^\infty \frac{f(u)}{u^{s+1}}du \qquad \text{pour} \qquad \operatorname{Re} s > \sigma_0,$$

$\sigma_0$ étant l'abscisse de convergence.



Le logarithme intégral sera défini comme dans ([6], § 5). Si $w = u+iv$

$$\operatorname{Li}(e^w) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty+iv}^{w} \frac{e^s}{s}ds + i\pi & \text{si} \quad v > 0,\\ \displaystyle\int_{-\infty+iv}^{w} \frac{e^s}{s}ds - i\pi & \text{si} \quad v < 0,\\ \displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{w}\frac{e^s}{s}ds & \text{si} \quad v = 0,\ u > 0.\end{cases}$$

Pour $x$ réel $> 1$, et $\varrho\in \boldsymbol{C}$, $\operatorname{Re}\varrho > 0$ on a:

$$\operatorname{Li}(x^\varrho) = \operatorname{Li}(e^{\varrho\log x}),$$

$$\operatorname{Li}(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}.$$

On pose aussi:

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1, \qquad d(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Notation $\Omega$: Si $f$ est une fonction réelle et $g$ une fonction réelle positive,

$$f(x) = \begin{cases} \Omega_+(g(x)) & \text{signifie} \quad \limsup_{x\to+\infty} f(x)/g(x) > 0,\\ \Omega_-(g(x)) & \text{signifie} \quad \liminf_{x\to+\infty} f(x)/g(x) < 0,\\ \Omega_\pm(g(x)) & \text{signifie} \quad f(x) = \Omega_+(g(x)) \text{ et } f(x) = \Omega_-(g(x)).\end{cases}$$

On désignera par $R(x)$ une majoration du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers de telle sorte que l'on ait

$$\pi(x) - \operatorname{Li}(x) = O(R(x)) \qquad (x\to +\infty),$$

$$\Pi(x) - \operatorname{Li}(x) = O(R(x)),$$

$$\psi(x) - x = O(R(x)\log x).$$

Sans hypothèse, on sait que l'on peut prendre (cf. [4], ch. 4)

$$R(x) = x\exp(-a(\log x)^{1/2})$$

avec $a > 0$, et on peut remplacer l'exposant $1/2$ par un nombre un peu plus grand (cf. [4], ch. 11).

Avec l'hypothèse $\theta < 1$, on choisira (cf. [4], ch. 5)

$$R(x) = x^\theta \log x.$$

On sait que (cf. [4], ch. 6):

$$\pi(x) - \operatorname{Li}(x) = \Omega_\pm\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x\right).$$

On aura donc

$$R(x) = \Omega_{\pm}\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\log\log\log x\right).$$

On définit $S(x)$ par:

si $\theta = 1$,

$$S(x) = R(x),$$

si $\theta < 1$,

$$S(x) = x^{\theta}/\log x.$$

**3. Résultats.** Nous démontrons les résultats suivants:

THÉORÈME 1. *On a pour* $n \to \infty$

(i) $$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\left(\log n S(\sqrt{n\log n})\right).$$

*Soit*

$$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\left(\sqrt{n}e^{-a\sqrt{\log n}}\right) \quad \textit{avec } a > 0 \textit{ pour } \theta = 1$$

*et*

$$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\left((n\log n)^{\theta/2}\right) \quad \textit{pour } \theta < 1.$$

*Si* $\theta > 1/2$ *on a pour tout* $\xi < \theta$:

(ii) $$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + \Omega_{\pm}\left((n\log n)^{\xi/2}\right)$$

*et s'il existe un zéro de partie réelle* $\theta$:

(iii) $$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + \Omega_{\pm}\left((n\log n)^{\theta/2}\right).$$

*Enfin si l'hypothèse de Riemann est vraie*

(iv) $$\log g(n) < \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} \quad \textit{pour } n \textit{ assez grand},$$

(v) $$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} - \frac{2-\sqrt{2}}{3}(n\log n)^{1/4} + \Omega_{\pm}\left((n\log n)^{1/4}\right).$$

THÉORÈME 2. *On a pour* $n \to \infty$

(i) $$\omega(g(n)) = \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) + O\left(S(\sqrt{n\log n})\right).$$

*Soit*

$$\omega(g(n)) = \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) + O\left(\sqrt{n}e^{-a\sqrt{\log n}}\right) \quad \textit{avec } a > 0 \textit{ pour } \theta = 1$$

*et*

$$\omega(g(n)) = \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) + O\left((n\log n)^{\theta/2}/\log n\right) \quad \textit{pour } \theta < 1.$$



*Si* $1/2 < \theta \leqslant 1$ *on a pour tout* $\xi < \theta$

(ii) $$\omega(g(n)) = \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) + \Omega_{\pm}\left((n\log n)^{\xi/2}\right)$$

*et s'il existe un zéro de partie réelle* $\theta$:

(iii) $$\omega(g(n)) = \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) + \Omega_{\pm}\left((n\log n)^{\theta/2}/\log n\right).$$

*Enfin si l'hypothèse de Riemann est vraie*

(iv) $$\omega(g(n)) < \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) \quad \textit{pour } n \textit{ assez grand}.$$

COROLLAIRE. *On a pour* $n \to +\infty$, *et* $k \in N$:

$$\log g(n) = \sqrt{n\log n}\left(1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{A_i(\log\log n)}{(\log n)^i} + O\left(\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{k+1}\right)\right),$$

$$\omega(g(n)) = 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}\left(1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{B_i(\log\log n)}{(\log n)^i} + O\left(\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{k+1}\right)\right)$$

*où* $A_i$ *et* $B_i$ *sont des polynômes de degré* $i$. *On a en particulier*:

$$A_1(x) = \tfrac{1}{2}(x-1), \quad A_2(x) = -\tfrac{1}{8}(x^2-6x+9),$$

$$A_3(x) = \tfrac{1}{16}(x^3-11x^2+39x-53),$$

$$B_1(x) = -\tfrac{1}{2}(x-3), \quad B_2(x) = \tfrac{1}{8}(3x^2-22x+55),$$

$$B_3(x) = -\tfrac{1}{16}(5x^3-61x^2+319x-711).$$

La démonstration du corollaire résulte du théorème 1 (i) et du théorème 2(i), ainsi que du développement asymptotique de $\mathrm{Li}^{-1}(x)$ obtenu par Cipolla (cf. [2]). Les calculs de Cipolla ont été étendus à l'aide du système de calcul formel MACSYMA et les polynômes $A_i$ et $B_i$ ont été déterminés pour $i \leqslant 14$.

Le polynôme $B_1$ permet de préciser le résultat de Szalay (1) en donnant

$$\lim_{n\to\infty}\eta(n) = 3.$$

La démonstration du théorème 1 est donnée au paragraphe 6, et celle du théorème 2 au paragraphe 8. Les méthodes utilisées sont d'abord des techniques usuelles en théorie analytique des nombres, essentiellement la formule explicite de la théorie des nombres premiers, et le théorème d'oscillation de Landau. Les résultats de cette nature font l'objet de 3 lemmes dans le paragraphe 5.

L'approche de la fonction $g(n)$ fait intervenir l'ensemble $G$, contenu dans $g(N)$ et qui joue un rôle analogue à l'ensemble des nombres hautement composés supérieurs introduits par S. Ramanujan dans l'étude des grandes valeurs de la fonction $d(n)$. Les propriétés de l'ensemble $G$ sont rappelées au paragraphe 4.

L'objet du paragraphe 7 est de montrer que le nombre de facteurs premiers de $g(n)$, est assez proche du nombre de facteurs premiers de l'élément de $G$ voisin de $g(n)$. La technique des "bénéfices" utilisée pour cela a déjà été employée pour étudier les grandes valeurs de fonctions arithmétiques. C'est en fait une technique d'optimisation en nombres entiers (cf. [16]).

**4. Rappel des propriétés de $g(n)$.** J. L. Nicolas en 1968 (cf. [9], [10]) a étudié en détail les propriétés de $g(n)$. J. P. Massias (cf. [7]) a continué cette étude. Nous rappelons ici les résultats qui nous sont nécessaires et dont on trouvera la démonstration dans [10].

Definition 1. Soit $l$ l'application de $N^*$ dans $N$ définie par:

$$l(1) = 0$$

et si la décomposition de $x$ en facteurs premiers est $x = \prod_i p_i^{\alpha_i}$

$$l(x) = \sum_i p_i^{\alpha_i}.$$

Avec cette définition, on a:

$$g(n) = \max_{l(k) \leqslant n} k.$$

Propriété caractéristique. On a l'équivalence:
(i) $M \in g(N)$,
(ii) $M' > M \Rightarrow l(M') > l(M)$.

Définition de l'ensemble $G$. On dit que $N \in G$ s'il existe $\varrho > 0$ tel que

$$(*) \qquad \forall M \in N^* \quad l(M) - \varrho \log M \geqslant l(N) - \varrho \log N.$$

Il est immédiat que $G \subset g(N)$. Les éléments de $G$ jouent pour la fonction $l$ le rôle des nombres hautement composés supérieurs de Ramanujan pour la fonction $d$.

A chaque nombre $\varrho > 2/\log 2$ on fait correspondre $N_\varrho \in G$ défini de la façon suivante:

$$(3) \qquad N_\varrho = \prod_{p \leqslant x_1} p^{\alpha_p}$$

avec $x_1/\log x_1 = \varrho$, $x_1 > 4$,
$\alpha_p = 1$ si

$$\frac{p}{\log p} \leqslant \varrho < \frac{p^2 - p}{\log p},$$



$\alpha_p = \alpha \geqslant 2$ si

$$\frac{p^\alpha - p^{\alpha-1}}{\log p} \leqslant \varrho < \frac{p^{\alpha+1} - p^\alpha}{\log p}.$$

$N_\varrho \in G$ puisque $N = N_\varrho$ vérifie $(*)$ pour la valeur $\varrho$ du paramètre.
On introduit également les nombres réels $x_i$, $i \geqslant 2$ par

$$\frac{x_i^i - x_i^{i-1}}{\log x_i} = \varrho$$

ce qui permet d'écrire:

$$(4) \qquad N_\varrho = \prod_{i=1}^{\infty} \Big(\prod_{p \leqslant x_i} p\Big).$$

Comme les fonctions $t \to (t^i - t^{i-1})/\log t$ sont croissantes sur $]1, +\infty[$ pour $i \geqslant 2$, il est facile de voir que pour $i \geqslant 2$, $x_i \leqslant x_{i-1}$ et $x_i^i \leqslant x_1$; par suite

$$(5) \qquad \forall p \leqslant x_1, \quad p^{\alpha_p} \leqslant x_1,$$

$$(6) \qquad \theta(x_1) \leqslant \log N_\varrho \leqslant \psi(x_1).$$

On rappelle également que, lorsque $x_1 \to +\infty$,

$$(7) \qquad x_2 = \sqrt{x_1/2}\,(1 + O(1/\log x_1)),$$

$$(8) \qquad x_3 \sim \sqrt[3]{x_1/3}.$$

Enfin, en faisant $t = \sqrt{x_1/2}$, on remarque que l'inégalité

$$\frac{t^2 - t}{\log t} \geqslant \frac{x_1}{\log x_1}$$

est équivalente à

$$\frac{\sqrt{2}}{\log 2} \leqslant \frac{\sqrt{x_1}}{\log x_1}.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour $x_1 \geqslant 80$, et on en déduit que pour $x_1 \geqslant 80$, on a:

$$(9) \qquad x_2 \leqslant \sqrt{x_1/2}.$$

Si $N$ et $N'$ sont deux éléments consécutifs supérieurs à 12 dans $G$, ordonné par ordre croissant, si $p_1$ est le plus grand facteur premier de $N$ et si $P_1$ est le nombre premier suivant $p_1$, on a:

$$(10) \qquad N' \leqslant P_1 N.$$

Soit $\varrho \in \boldsymbol{R}$ tel que $N$ vérifie (*) alors $N = N_\varrho$ ou $N = N_\varrho/p$ et comme $p \sim P_1 \sim \log N \sim x_1$,

$$\log N' = \log N + O(\log\log N).$$

Si $N \leqslant g(n) < N'$ on en déduit:

(11) $$\log g(n) = \log N + O(\log x_1),$$

(12) $$x_1 \sim \log g(n) \sim \sqrt{n \log n}.$$

D'après (6) on peut écrire

$$\log g(n) = \theta(x_1) + O(x_1/\log x_1)$$

et d'après le résultat de Shah

(13) $$x_1 = \sqrt{n \log n}\,(1 + O(\log\log n/\log n)).$$

On a aussi

(14) $$l(N) \leqslant n \leqslant l(N) + P_1.$$

**5. Quelques lemmes analytiques.**

Lemme A. *Pour* $0 \leqslant r \leqslant 1$ *on a pour* $x \to \infty$

(i) $$\Pi_r(x) = \mathrm{Li}(x^{r+1}) + O(x^r R(x)),$$

(ii) $$\Pi_r(x) = \mathrm{Li}(\psi^{r+1}(x)) + O(x^r R(x))$$

*et si* $\theta < 1$ *on a*:

(iii) $$\Pi_r(x) = \mathrm{Li}(\psi^{r+1}(x)) + O(x^{r+\theta}/\log x) \quad \textit{pour } 0 < r \leqslant 1,$$

(iv) $$\Pi(x) = \mathrm{Li}(\psi(x)) + O(x^\theta/\log^2 x).$$

Preuve. On peut écrire:

$$\Pi_r(x) = \int_{2^-}^{x} t^r\, d\Pi(t) = \int_{2^-}^{x} t^r\, d\,\mathrm{Li}(t) + \int_{2^-}^{x} t^r\, d(\Pi(t) - \mathrm{Li}(t))$$

$$= \mathrm{Li}(x^{r+1}) + x^r(\Pi(x) - \mathrm{Li}(x)) - \int_2^x r t^{r-1}(\Pi(t) - \mathrm{Li}(t))\, dt$$

$$+ 2^r\,\mathrm{Li}(2) - \mathrm{Li}(2^{r+1})$$

$$= \mathrm{Li}(x^{r+1}) + O(x^r R(x))$$

ce qui démontre (i).

Comme

$$\mathrm{Li}(\psi(x)^{r+1}) = \mathrm{Li}(x^{r+1}) + O\left(\frac{|\psi(x) - x|\, x^r}{\log x}\right)$$

il vient:



$$\Pi_r(x) = \mathrm{Li}(\psi(x)^{r+1}) + O(x^r R(x))$$

ce qui démontre (ii).

Dans le cas où $\theta < 1$ nous allons utiliser les formules explicites (cf. [6], § 87 et 88) pour $\psi(x)$ et $\Pi_r(x)$:

(15) $$\psi(x) = x - \sum_\varrho x^\varrho/\varrho + O(\log x),$$

(16) $$\Pi_r(x) = \mathrm{Li}(x^{r+1}) - \sum_\varrho (\mathrm{Li}(x^{\varrho+r}) \pm i\pi) + O(x^r).$$

Les sommes portent sur les zéros de partie réelle positive de la fonction $\zeta$, avec la convention habituelle d'associer $\varrho$ et $1-\varrho$. En particulier, en posant $\gamma = \mathrm{Im}\,\varrho$,

$$\mathrm{Li}(x^{\varrho+r}) + \mathrm{Li}(x^{1-\varrho+r}) = \int_{-\infty+i\gamma\log x}^{(\varrho+r)\log x} (e^s/s)\, ds + \int_{-\infty-i\gamma\log x}^{(1-\varrho+r)\log x} (e^s/s)\, ds.$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient:

$$\int_{-\infty+i\gamma\log x}^{(\varrho+r)\log x} (e^s/s)\, ds = \frac{x^{\varrho+r}}{(\varrho+r)\log x} + \frac{x^{\varrho+r}}{(\varrho+r)^2 \log^2 x} + J(x)$$

avec

$$J(x) = \int_{-\infty+i\gamma\log x}^{(\varrho+r)\log x} \frac{2e^s}{s^3}\, ds,$$

et

$$|J(x)| \leqslant \frac{2}{|\gamma|^3 \log^3 x} |x^{r+\varrho}|$$

et comme la série $\sum_\varrho 1/|\gamma|^3$ est absolument convergente, (16) devient:

(17) $$\Pi_r(x) = \mathrm{Li}(x^{r+1}) - \sum_\varrho \frac{x^{\varrho+r}}{(\varrho+r)\log x} - \sum_\varrho \frac{x^{\varrho+r}}{(\varrho+r)^2 \log^2 x} + O\left(\frac{x^{r+\theta}}{\log^3 x}\right).$$

La formule de Taylor appliquée à la fonction $u \to \mathrm{Li}(u^{r+1})$ permet d'écrire:

(18) $$\mathrm{Li}(\psi(x)^{r+1}) = \mathrm{Li}(x^{r+1}) + (\psi(x) - x)\frac{x^r}{\log x} + O\left((\psi(x) - x)^2 \frac{x^{r-1}}{\log x}\right)$$

et avec (15),

$$\mathrm{Li}(\psi(x)^{r+1}) = \mathrm{Li}(x^{r+1}) - \frac{x^r}{\log x}\left(\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}\right) + O(x^{r-1}\log x\, R^2(x))$$

et d'après la formule (17)

$$(19)\quad \Pi_r(x) = \mathrm{Li}\big(\psi(x)^{r+1}\big)+\sum_{\varrho}\frac{r}{\varrho(\varrho+r)}\frac{x^{\varrho+r}}{\log x}-\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho+r}}{(\varrho+r)^2\log^2 x}+O\left(\frac{x^{r+\theta}}{\log^3 x}\right).$$

On observe ensuite que

$$|\varrho+r| \geqslant |\varrho|$$

ce qui entraîne:

$$(20)\qquad \sum_{\varrho}\frac{1}{|\varrho(\varrho+r)|} \leqslant \sum_{\varrho}\frac{1}{|\varrho|^2} = O(1).$$

La formule (19) donne alors (iii) et (iv).

Lemme B. *Pour $0 \leqslant r \leqslant 1$ on a pour $x \to \infty$:*

(i) $$\pi_r(x) = \mathrm{Li}(x^{r+1})+O\big(x^r R(x)\big),$$

(ii) $$\pi_r(x) = \mathrm{Li}\big(\theta^{r+1}(x)\big)+O\big(x^r R(x)\big).$$

*Si $\theta < 1$ on a plus précisément:*

(iii) $$\pi_r(x) = \mathrm{Li}\big(\theta^{r+1}(x)\big)+O\big(x^{r+\theta}/\log x\big) \quad \textit{pour } 0 < r \leqslant 1,$$

(iv) $$\pi(x) = \mathrm{Li}\big(\theta(x)\big)+O\big(x^{\theta}/\log^2 x\big).$$

*Si $\theta = 1/2$ on a pour $0 < r \leqslant 1$ $\exists x_r$ tel que pour $x > x_r$,*

(v) $$\pi_r(x) > \mathrm{Li}\big(\theta^{r+1}(x)\big)$$

*et pour $r = 0$, $\exists x_0$ tel que pour $x > x_0$*

(vi) $$\pi(x) < \mathrm{Li}\big(\theta(x)\big).$$

Preuve. La démonstration de (i) pour $0 \leqslant r \leqslant 1$ se fait comme pour $\Pi_r(x)$. Ecrivons ensuite:

$$\Pi_r(x) = \pi_r(x)+\tfrac{1}{2}\pi_{2r}(x^{1/2})+\tfrac{1}{3}\pi_{3r}(x^{1/3})+\ldots$$

et d'après (i)

$$\Pi_r(x) = \pi_r(x)+\tfrac{1}{2}\pi_{2r}(x^{1/2})+O(x^{r+1/3}),$$

$$(21)\quad \Pi_r(x) = \pi_r(x)+\frac{1}{2r+1}\frac{x^{r+1/2}}{\log x}+\frac{x^{r+1/2}}{2(r+1/2)^2\log^2 x}+O\left(\frac{x^{r+1/2}}{\log^3 x}\right).$$

Comme on a aussi

$$\psi(x) = \theta(x)+\theta(x^{1/2})+O(x^{1/3}\log x),$$

la formule des accroissements finis donne:

$$\mathrm{Li}\big(\psi(x)^{r+1}\big) = \mathrm{Li}\big(\theta(x)^{r+1}\big)+\big(\psi(x)-\theta(x)\big)\xi^r/\log\xi$$



avec

$$\xi = x+O(x/\log^2 x)$$

et donc

$$\xi^r/\log\xi = x^r/\log x\big(1+O(1/\log^2 x)\big)$$

d'où il vient:

$$(22)\qquad \mathrm{Li}\big(\psi(x)^{r+1}\big) = \mathrm{Li}\big(\theta(x)^{r+1}\big)+\frac{x^{r+1/2}}{\log x}+O\left(\frac{x^{r+1/2}}{\log^3 x}\right).$$

En additionnant les formules (21) et (22), on obtient:

$$(23)\qquad \pi_r(x) = \mathrm{Li}\big(\theta(x)^{r+1}\big)+\Pi_r(x)-\mathrm{Li}\big(\psi(x)^{r+1}\big) +\frac{2r}{2r+1}\frac{x^{r+1/2}}{\log x}-\frac{x^{r+1/2}}{2(r+1/2)^2\log^2 x}+O\left(\frac{x^{r+1/2}}{\log^3 x}\right)$$

ce qui, avec (ii) du lemme A et $R(x) \geqslant x^{1/2}\log x$, démontre (ii).

En combinant (19) et (23), on obtient

$$(24)\qquad \pi_r(x) = \mathrm{Li}\big(\theta(x)^{r+1}\big)+\sum_{\varrho}\frac{r}{\varrho(\varrho+r)}\frac{x^{\varrho+r}}{\log x}+\frac{2r}{2r+1}\frac{x^{r+1/2}}{\log x} -\sum_{\varrho}\frac{x^{\varrho+r}}{(\varrho+r)^2\log^2 x}-\frac{x^{r+1/2}}{2(r+1/2)^2\log^2 x}+O(x^{\theta+r}/\log^3 x)$$

ce qui, puisque les séries $\sum_{\varrho} 1/\varrho(\varrho+r)$ et $\sum_{\varrho} 1/(\varrho+r)^2$ sont absolument convergentes, démontre (iii) et (iv).

Enfin, pour $r$ fixé $> 0$, on a, lorsque $\theta = 1/2$,

$$\left|\sum_{\varrho}\frac{1}{\varrho(\varrho+r)}x^{\varrho+r}\right| \leqslant 0{,}05x^{r+1/2} < \frac{2}{2r+1}x^{r+1/2}$$

et cela démontre (v). Lorsque $r = 0$, l'examen du terme suivant de (24) démontre (vi), puisque $\sum_{\varrho} 1/|\varrho|^2 < 2$.

Lemme C. *Pour $\xi < \theta$ et $0 \leqslant r \leqslant 1$ on a:*

(i) $$\Pi_r(x) = \mathrm{Li}(x^{r+1})+\frac{x^r}{\log x}\big(\psi(x)-x\big)+\Omega_{\pm}(x^{\xi+r})$$

*et s'il existe un zéro de la fonction $\zeta$, de partie réelle $\theta$ alors*

(ii) $$\Pi(x) = \mathrm{Li}(x)+\frac{\psi(x)-x}{\log x}+\Omega_{\pm}(x^{\theta}/\log^2 x)$$

*et pour* $0 < r \leqslant 1$

(iii) $$\Pi_r(x) = \mathrm{Li}(x^{r+1}) + \frac{x^r}{\log x}(\psi(x) - x) + \Omega_\pm(x^{\theta+r}/\log x).$$

Preuve. Nous utilisons pour la démonstration le théorème de Landau sous la forme suivante déduite du résultat de ([4], ch. 6).

Soit $f$ une fonction réelle de variable réelle $x$ telle que sa transformée de Mellin $\mathfrak{M}(f)$ soit holomorphe au voisinage de l'abscisse de convergence $\sigma_0$.

(i) $\forall \xi < \sigma_0$, on a: $f(x) = \Omega_\pm(x^\xi)$.

(ii) Si $\mathfrak{M}(f)$ admet un pôle d'ordre $k$ en $s = \sigma_0 \pm i\beta$, $\beta > 0$ alors
$$f(x) = \Omega_\pm(x^{\sigma_0}(\log x)^{k-1}).$$

(iii) Si $\mathfrak{M}(f)$ admet une singularité logarithmique en $s = \sigma_0 \pm i\beta$ ($\mathfrak{M}(f)(s) \sim \log(s - \sigma_0 \mp i\beta)$) alors
$$f(x) = \Omega_\pm(x^{\sigma_0}/\log x).$$

Calculons la transformée de Mellin de la fonction suivante pour $\mathrm{Re}\, s > r+1$.
$$K(x) = \log x \cdot \mathrm{Li}(x^{r+1}) - \log x \cdot \Pi_r(x) + x^r \psi(x) - x^{r+1}.$$

Dans ce qui suit $h(s)$ désigne une fonction entière non nécessairement toujours la même.

- Comme
$$s\int_2^\infty \frac{\mathrm{Li}(x^{r+1})}{x^{s+1}}\,dx = \frac{\mathrm{Li}(2^{r+1})}{2^s} + \int_2^\infty \frac{x^r\,dx}{x^s \log x} = -\log(s-r-1) + h(s)$$

il vient:
$$\mathfrak{M}(\mathrm{Li}(x^{r+1})\log x)(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\log(s-r-1)}{s} - \frac{h(s)}{s}\right) = \frac{1}{s(s-r-1)} - \frac{\log(s-r-1)}{s^2} + \frac{h(s)}{s^2}.$$

- On peut écrire aussi:
$$\mathfrak{M}(\Pi_r(x))(s) = \int_1^\infty \frac{\Pi_r(u)\,du}{u^{s+1}} = \int_1^\infty \left(\int_1^u \frac{t^r\,d\psi(t)}{\log t}\right)\frac{du}{u^{s+1}} = \frac{1}{s}\int_1^\infty \frac{t^r\,d\psi(t)}{t^s \log t}$$

donc
$$\frac{\partial}{\partial s}\big(s\mathfrak{M}(\Pi_r(x))\big)(s) = -\int_1^\infty \frac{d\psi(t)}{t^{s-r}} = (r-s)\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t^{s-r+1}}\,dt = \frac{\zeta'(s-r)}{\zeta(s-r)}$$

puisque
$$\mathfrak{M}(\psi(x))(s) = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$



d'où
$$\mathfrak{M}(\Pi_r(x))(s) = \frac{\log \zeta(s-r)}{s} + \frac{c}{s} \quad \text{avec} \quad c \in C$$

et
$$\mathfrak{M}(\log x \cdot \Pi_r(x))(s) = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s-r)}{\zeta(s-r)} + \frac{\log \zeta(s-r)}{s^2} + \frac{c}{s^2}.$$

- Enfin on a:
$$\mathfrak{M}(x^r \psi(x))(s) = -\frac{1}{s-r}\frac{\zeta'(s-r)}{\zeta(s-r)}$$

et
$$\mathfrak{M}(x^{r+1})(s) = \frac{1}{s-r-1} + h(s).$$

Finalement:
$$\mathfrak{M}(K(x))(s) = -\frac{\log\big((s-r-1)\zeta(s-r)\big)}{s^2} + \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-r-1} + \frac{\zeta'(s-r)}{\zeta(s-r)}\right) - \left(\frac{1}{s-r}\frac{\zeta'(s-r)}{\zeta(s-r)} + \frac{1}{s-r-1}\right) + k(s),$$

$k(s)$ étant une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > 0$.

La transformée de Mellin de $K(x)$ est donc holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > \theta + r$ ce qui démontre (i).

Pour $r = 0$ on a:
$$\mathfrak{M}(K(x))(s) = -\frac{\log\big((s-1)\zeta(s)\big)}{s^2} - \frac{1}{s} + k(s).$$

Par suite s'il existe un zéro de $\zeta$ de partie réelle $\theta$ ($\theta < 1$), $\mathfrak{M}(K(x))$ a une singularité logarithmique ce qui entraîne (ii). Au contraire pour $0 < r \leqslant 1$, la singularité dominante est un pôle donc $K(x) = \Omega_\pm(x^{\theta+r})$ ce qui démontre (iii).

**6. Démonstration du théorème 1.** Soit $n \in N$, $n \geqslant 12$ et $N$ le nombre de $G$ immédiatement inférieur à $g(n)$; soit $\varrho$ un paramètre de $N$ avec $N = N_\varrho$ et $x_1 > 4$ tel que $x_1/\log x_1 = \varrho$. On peut écrire grâce à (3) et (4)
$$l(N) = \pi_1(x_1) + \pi_2(x_2) - \pi_1(x_2) + O\Big(\sum_{p \leqslant x_3} p^{\alpha_p}\Big).$$

Compte tenu des propriétés des $x_i$ ((5), (7), (8)) et du lemme $B(i)$ on obtient:
$$l(N) = \pi_1(x_1) + \mathrm{Li}(x_2^3) + O(x_1^{3/2}/\log^2 x_1),$$

(25) $$l(N) = \pi_1(x_1) + \frac{\sqrt{2}}{6}(x_1^{3/2}/\log x_1) + O(x_1^{3/2}/\log^2 x_1).$$

On a aussi:

$$\log N = \theta(x_1)+\theta(x_2)+O(x_3),$$

$$(\log N)^2 = \theta^2(x_1)+2x_1^{3/2}/\sqrt{2}+O(x_1^{3/2}/\log x_1),$$

$$\mathrm{Li}\big((\log N)^2\big) = \mathrm{Li}\big(\theta^2(x_1)\big)+\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^{3/2}/\log x_1)+O(x_1^{3/2}/\log^2 x_1).$$

D'après (11) et (14) nous avons:

$$\begin{aligned} n &= l(N)+O(x_1),\\ \log g(n) &= \log N+O(\log x_1).\end{aligned} \tag{26}$$

Il s'ensuit que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}\big((\log g(n))^2\big)-n &= \mathrm{Li}\big((\log g(n))^2\big)-\mathrm{Li}\big((\log N)^2\big)\\ &\qquad +\mathrm{Li}\big((\log N)^2\big)-l(N)+l(N)-n\\ &= \mathrm{Li}\big(\theta^2(x_1)\big)-\pi_1(x_1)+\frac{\sqrt{2}}{3}(x_1^{3/2}/\log x_1)\\ &\qquad +O(x_1^{3/2}/\log^2 x_1).\end{aligned} \tag{27}$$

D'après les égalités (ii) et (iii) du lemme B il vient:

$$\mathrm{Li}\big((\log g(n))^2\big) = n+O\big(x_1 S(x_1)\big)$$

et comme, par (12), $x_1 \sim (n\log n)^{1/2}$, on en déduit (i).

Les relations (23) et (27) permettent d'écrire:

$$\mathrm{Li}\big(\log^2 g(n)\big)-n = -\big(\Pi_1(x_1)-\mathrm{Li}\big(\psi^2(x_1)\big)\big)+O(x_1^{3/2}/\log x_1) \tag{28}$$

et par (18),

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}\big(\log^2 g(n)\big)-n &= -\Pi_1(x_1)+\mathrm{Li}(x_1^2)+\frac{x_1}{\log x_1}\big(\psi(x_1)-x_1\big)\\ &\qquad +O\big(R^2(x_1)\log x_1\big)+O(x_1^{3/2}/\log x_1).\end{aligned}$$

On utilise alors le lemme C. Lorsque $1/2 < \theta < 1$, les termes $R^2(x_1)\log x_1$ et $x_1^{3/2}/\log x_1$ sont négligeables devant $\Omega_\pm(x_1^{\xi+1})$ et $\Omega_\pm(x_1^{\theta+1}/\log x_1)$ et cela démontre (ii) et (iii).

Si $\theta = 1$, la convexité de la fonction $t \to \mathrm{Li}(t^2)$ donne:

$$\mathrm{Li}\big(\psi^2(x_1)\big) \geqslant \mathrm{Li}(x_1^2)+\frac{x_1}{\log x_1}\big(\psi(x_1)-x_1\big)$$

et le lemme C fournit avec (28) le résultat en $\Omega_+$ de (ii).

La démonstration de $\mathrm{Li}\big(\psi^2(x_1)\big)-\Pi_1(x_1) = \Omega_-(x_1^{\xi+1})$ qui achève la



démonstration de (ii) n'est pas immédiate. Elle peut se faire comme celle de $\mathrm{Li}\big(\psi(x)\big)-\Pi(x) = \Omega_\pm(x^\xi)$ (cf. [15]), à partir de l'étude de la fonction:

$$x \mapsto \mathrm{Li}(x^2)-\Pi_1(x)+\frac{x}{\log x}\big(\psi(x)-x\big)+x^{\xi+1}.$$

Etudions maintenant le cas $\theta = 1/2$:

D'après les égalités (24) et (27) nous avons lorsque $\theta = 1/2$

$$\mathrm{Li}\big(\log^2 g(n)\big)-n = \frac{\sqrt{2}-2}{3}\left(\frac{x_1^{3/2}}{\log x_1}\right)-\sum_\varrho \frac{x_1^{\varrho+1}}{\varrho(\varrho+1)}\frac{1}{\log x_1}+O\left(\frac{x_1^{3/2}}{\log^2 x_1}\right). \tag{29}$$

Comme $\sum_\varrho 1/|\varrho(\varrho+1)| < 0{,}05$ il vient $\mathrm{Li}\big(\log^2 g(n)\big) < n$ pour $n$ assez grand ce qui prouve (iv).

A l'aide de la relation (13), la relation (29) devient:

$$\mathrm{Li}\big(\log^2 g(n)\big) = n+\beta\frac{n^{3/4}}{(\log n)^{1/4}}+O\left(\frac{n^{3/4}\log\log n}{(\log n)^{5/4}}\right)$$

avec

$$\beta = 2\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}-\sum_\varrho \frac{x_1^{i\gamma}}{\varrho(\varrho+1)}\right).$$

En utilisant la formule de Taylor, il vient:

$$\begin{aligned}\log^2 g(n) &= \mathrm{Li}^{-1}(n)+\beta n^{3/4}(\log n)^{3/4}+O\left(\frac{n^{3/4}\log\log n}{(\log n)^{1/4}}\right)\\ &= \mathrm{Li}^{-1}(n)\left(1+\frac{\beta}{(n\log n)^{1/4}}+O\left(\frac{1}{(n\log n)^{1/4}}\cdot\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right)\end{aligned}$$

soit:

$$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\left(1+\frac{\beta}{2(n\log n)^{1/4}}+O\left(\frac{\log\log n}{(n\log n)^{1/4}\log n}\right)\right).$$

Comme

$$\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} = (n\log n)^{1/2}\left(1+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right)$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned}\log g(n) &= \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}+\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}-\sum_\varrho \frac{x_1^{i\gamma}}{\varrho(\varrho+1)}\right)(n\log n)^{1/4}\\ &\qquad +O\left((n\log n)^{1/4}\frac{\log\log n}{\log n}\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\log g(n) - \sqrt{\operatorname{Li}^{-1}(n)} - \frac{\sqrt{2}-2}{3}(n\log n)^{1/4}$$
$$= -\Big(\sum_{\varrho}\frac{x_1^{i\gamma}}{\varrho(\varrho+1)}\Big)(n\log n)^{1/4} + O\Big((n\log n)^{1/4}\frac{\log\log n}{\log n}\Big).$$

D'après (20)

$$\Big|\sum_{\varrho}\frac{x_1^{i\gamma}}{\varrho(\varrho+1)}\Big| < \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

ce qui entraîne (iv). Le théorème de Landau montre que

$$\sum_{\varrho}\frac{x_1^{i\gamma}}{\varrho(\varrho+1)} = \Omega_{\pm}(1)$$

ce qui entraîne (v).

## 7. Lemmes preparatoires au théorème 2.

LEMME D. *Soit $n \geqslant 12$, $N \in G$ immédiatement inférieur à $g(n)$, $\varrho$ un paramètre de $N$ avec $N = N_\varrho$, et $x_1 > 4$ défini par $x_1/\log x_1 = \varrho$. Pour $M \in N^*$, on définit le bénéfice de $M$ par rapport à $\varrho$ par:*

$$\text{bén}_\varrho(M) = l(M) - l(N) - \varrho\log(M/N).$$

*(D'après la définition de $G$, on a toujours $\text{bén}_\varrho M \geqslant 0$.) Alors on a:*

$$\text{bén}_\varrho\, g(n) = O(x_1/\log x_1).$$

Démonstration. On considère la famille de nombres $M_h$ définis par:

$$M_0 = N, \qquad M_h = N\frac{P_1P_2\dots P_h}{q_1q_2\dots q_{2h}}$$

où $P_1 < P_2 < \dots < P_h$ sont les nombres premiers qui suivent $x_1$ et $q_1 > q_2 > \dots > q_{2h}$ sont les nombres premiers qui précèdent $x_2$, on a:

$$\frac{P_i}{q_{2i-1}q_{2i}} \geqslant \frac{x_1}{x_2^2} \geqslant 2 \qquad (\text{pour } x_1 \geqslant 80)$$

et donc $M_h \geqslant 2^h N$. D'après les propriétés de $G$, on a $g(n) \leqslant NP_1$ et, pour $n$ assez grand, il existe donc $h_0$

$$h_0 \leqslant 2 + \frac{\log x_1}{\log 2} \qquad \text{tel que } M_{h_0} \leqslant g(n) < M_{h_0+1}.$$

D'après le théorème de Hoheisel (cf. [1], ch. 5), il existe $\tau < 1$ tel que

$$\pi(x+x^\tau) - \pi(x) \sim x^\tau/\log x.$$



Cela entraîne pour les nombres $M_h$, $0 \leqslant h \leqslant h_0$,

$$P_{h+1} = x_1 + O(x_1^\tau),$$
$$q_{2h+2} = x_2 + O(x_2^\tau),$$
$$\frac{M_{h+1}}{M_h} = \frac{P_{h+1}}{q_{2h+1}q_{2h+2}} \sim 2.$$

Il vient ensuite:

$$\text{bén}_\varrho M_h = \sum_{i=1}^{h}(P_i - \varrho\log P_i) + \sum_{i=1}^{2h}(q_i - q_i^2 + \varrho\log q_i).$$

On observe alors que:

$$P_i - \varrho\log P_i = P_i - \varrho\log P_i - (x_1 - \varrho\log x_1) \leqslant P_i - x_1$$

et:

$$q_i - q_i^2 + \varrho\log q_i = q_i - q_i^2 + \varrho\log q_i - (x_2 - x_2^2 + \varrho\log x_2) \leqslant x_2^2 - q_i^2.$$

On en déduit, pour $0 \leqslant h \leqslant h_0+1$:

$$\text{bén}_\varrho M_h = O(hx_1^\tau) + O(hx_2^{\frac{1}{2}+\tau}) = O\big((\log x_1)\, x_1^{(1+\tau)/2}\big).$$

Maintenant, de l'inégalité:

$$M_{h_0} \leqslant g(n) < M_{h_0+1}$$

et de la propriété caractéristique de $g(N)$, on déduit:

$$l(g(n)) < l(M_{h_0+1})$$

et ensuite:

$$\begin{aligned}\text{bén}_\varrho\, g(n) &= l(g(n)) - l(N) - \varrho\log g(n)/N\\ &\leqslant l(M_{h_0+1}) - l(N) - \varrho\log M_{h_0}/N\\ &= \text{bén}_\varrho M_{h_0+1} + \varrho\log(M_{h_0+1}/M_{h_0}) = O(x_1/\log x_1).\end{aligned}$$

LEMME E. *Soit $n \geqslant 12$, $N \in G$ immédiatement inférieur à $g(n)$, $\varrho$ un paramètre de $N$ avec $N = N_\varrho$ et $x_1 > 4$ défini par $x_1/\log x_1 = \varrho$. Alors lorsque $n \to +\infty$, on a:*

$$\omega(g(n)) = \omega(N) + O(\sqrt{x_1}/\log x_1).$$

Démonstration. Soit $(r_i)_{1\leqslant i\leqslant u}$ l'ensemble des nombres premiers divisant $g(n)$ mais ne divisant pas $N$, et $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant v}$ l'ensemble des nombres premiers divisant $N$, mais pas $g(n)$. Soit

$$N = \prod_p p^{\alpha_p} \qquad \text{et} \qquad g(n) = \prod_p p^{\beta_p}.$$

D'après la définition de $G$, on a pour tout $p$,

$$l(p^{\beta_p})-l(p^{\alpha_p})-\varrho\log p^{\beta_p-\alpha_p}\geqslant 0.$$

Lorsque $p=r_i$, on a $\beta=\beta_p>0$ et $\alpha_p=0$ et

$$l(p^{\beta})-\varrho\log p^{\beta}=p^{\beta}-\varrho\beta\log p\geqslant\beta(p-\varrho\log p)\geqslant p-\varrho\log p.$$

Lorsque $p=s_i$, on a $\beta_p=0$, et $\alpha=\alpha_p>0$ et

$$-l(p^{\alpha})-\varrho\log p^{-\alpha}=\alpha\varrho\log p-p^{\alpha}\geqslant\varrho\log p-p.$$

Cette dernière inégalité est évidente si $\alpha=1$. Lorsque $\alpha\geqslant 2$, elle résulte de:

$$\varrho\geqslant\frac{p^{\alpha}-p^{\alpha-1}}{\log p}.$$

Il vient ensuite:

$$\begin{aligned}\text{bén}_{\varrho}\,g(n)&=l(g(n))-l(N)-\varrho\log g(n)/N\\&\geqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant u}(r_i-\varrho\log r_i)+\sum_{1\leqslant i\leqslant v}(\varrho\log s_i-s_i)\end{aligned}$$

avec $r_i-\varrho\log r_i\geqslant 0$ et $\varrho\log s_i-s_i\geqslant 0$.

Supposons $2\leqslant s_i\leqslant x_1-\sqrt{x_1}$. D'après les variations de la fonction $t\mapsto\varrho\log t-t$, on observe que:

$$\varrho\log s_i-s_i\geqslant\min\big((\varrho\log(x_1-\sqrt{x_1})-(x_1-\sqrt{x_1})),\ \varrho\log 2-2\big)\geqslant\sqrt{x_1}\,(1+o(1))$$

et d'après le lemme précédent, le nombre $v'$ de tels $s_i$ vérifie:

$$v'\leqslant\frac{\sqrt{x_1}}{\log x_1}(1+o(1)).$$

Quant au nombre $v''$ de $s_i$ compris entre $x_1-\sqrt{x_1}$ et $x_1$, d'après l'inégalité de Brun–Titchmarsh (cf. [5], ch. III), il vérifie:

$$v''=O(\sqrt{x_1}/\log x_1)$$

et donc

$$v=v'+v''=O(\sqrt{x_1}/\log x_1).$$

Par un argument similaire, on montre que $u=O(\sqrt{x_1}/\log x_1)$ et en observant que

$$\omega(g(n))=\omega(N)+u-v$$

on achève la démonstration.

Lemme F. *Soit* $\beta(t)=\mathrm{Li}(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(t)})$ *et* $A(x)=\beta(\Pi_1(x))-\Pi(x)$. *On a:*



(i) $$A(x)=O(S(x)),$$

(ii) $$A(x)=\Omega_{\pm}(x^{\xi})\quad\textit{pour}\ \xi<\theta.$$

*Si de plus il existe un zéro de* $\zeta$ *de partie réelle* $\theta$

(iii) $$A(x)=\Omega_{\pm}(S(x)).$$

Preuve. Posons:

$$B(x)=-\frac{1}{x}\int_2^x(\Pi(t)-\mathrm{Li}(t))\,dt-\delta/x$$

avec

$$\delta=\mathrm{Li}(4)-2\,\mathrm{Li}(2)\quad\text{et}\quad C(x)=\frac{1}{x}(\Pi_1(x)-\mathrm{Li}(x^2)).$$

D'après la démonstration du lemme A on a:

(30) $$C(x)=B(x)+\Pi(x)-\mathrm{Li}(x).$$

On a:

$$\beta'(t)=1/\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(t)}$$

et

$$\beta''(t)=-\frac{1}{2}\frac{\log(\mathrm{Li}^{-1}(t))}{(\mathrm{Li}^{-1}(t))^{3/2}}\sim-\frac{1}{2}\frac{1}{t^{3/2}\sqrt{\log t}}.$$

On a donc:

$$\beta''(\Pi_1(x))\sim\beta''(\mathrm{Li}(x^2))=O((\log x)/x^3).$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 appliquée à la fonction $\beta$ entre les points $\Pi_1(x)$ et $\mathrm{Li}(x^2)$ donne:

$$\beta(\Pi_1(x))=\mathrm{Li}(x)+C(x)+O(C^2(x)\log x/x)$$

et

$$\beta(\Pi_1(x))\leqslant\mathrm{Li}(x)+C(x)$$

en observant que $\beta''(t)<0$ pour $t$ assez grand.

Avec (30), cela donne:

(31) $$A(x)=B(x)+O(C^2(x)\log x/x),$$

(32) $$A(x)\leqslant B(x).$$

La formule (31) et le lemme A donne $A(x)=O(R(x))$, ce qui démontre (i) lorsque $\theta=1$.

Montrons que $B(x)=O(S(x))$ lorsque $\theta<1$.

On estime $C(x)$ et $\Pi(x)-\mathrm{Li}(x)$ d'après (17), en prenant $r=1$ puis $r=0$ et l'on a avec (30):

$$B(x) = \left(\sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho(\varrho+1)} \Big/ \log x + O(x^{\theta}/\log^2 x)\right)$$

soit $B(x) = O(x^{\theta}/\log x) = O(S(x))$.

Lorsque $\theta < 1$, le lemme A (i) avec $r=1$ montre que

(33) $$C(x) = O(x^{\theta}\log x)$$

et avec la formule (31), on achève la démonstration de (i).

La fonction $B(x)$ est $\Omega_{\pm}(x^{\xi})$ (et $\Omega_{\pm}(S(x))$ s'il existe un zéro de $\zeta$ de partie réelle $\theta$). En effet pour $\mathrm{Re}\, s > 2$ on a, par intégration par parties:

$$\mathfrak{M}(xB(x))(s) = -\frac{1}{s}\mathfrak{M}(\Pi(x)-\mathrm{Li}(x))(s-1) - \delta\frac{2^{-s}}{s}$$

$$= -\frac{1}{s(s-1)}\log\big(\zeta(s-1)(s-2)\big) + h(s)$$

où $h(s)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Le théorème de Landau rappelé au lemme C permet de conclure.

Lorsque $\theta < 1$, les formules (31) et (33) démontrent (ii) et (iii).

Lorsque $\theta = 1$, $B(x) = \Omega_{-}(x^{\xi})$ et la formule (32) démontrent $A(x) = \Omega_{\pm}(x^{\xi})$. Une démonstration particulière est nécessaire pour démontrer $A(x) = \Omega_{+}(x^{\xi})$. Elle se fait comme dans [14] et [15] en étudiant les maxima successifs de la fonction $xB(x) - x^{\xi+1}$.

**8. Démonstration du théorème 2.** Il résulte du lemme B (vi), que pour $x$ assez grand,

$$\pi(x) < \mathrm{Li}(\theta(x))$$

sous l'hypothèse de Riemann.

Soit $N_k = \prod_{i=1}^{k} p_i$ le produit des $k$ premiers nombres premiers; en faisant $x = p_k$, il vient

$$\omega(N_k) < \mathrm{Li}(\log N_k).$$

Soit maintenant $M$ vérifiant $N_k \leqslant M < N_{k+1}$; on a:

$$\omega(M) \leqslant \omega(N_k) < \mathrm{Li}(\log N_k) \leqslant \mathrm{Li}(\log M).$$

En appliquant cette inégalité à $M = g(n)$, et le théorème 1 (iv), nous obtenons

$$\omega(g(n)) < \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

ce qui démontre (iv) du théorème 2.



En utilisant les notations du § 6, on peut écrire d'après (25) et (26)

$$n = \pi_1(x_1) + O(x_1^{3/2}/\log x_1).$$

D'autre part

$$\omega(N) = \pi(x_1)$$

et d'après le lemme E

$$\omega(g(n)) = \pi(x_1) + O(x_1^{1/2}/\log x_1).$$

Par suite

$$n = \Pi_1(x_1) + O(x_1^{3/2}/\log x_1)$$

et

$$\omega(g(n)) = \Pi(x_1) + O(x_1^{1/2}/\log x_1)$$

et l'on peut écrire:

$$\begin{aligned}\omega(g(n)) - \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) &= \omega(g(n)) - \beta(n)\\ &= \Pi(x_1) - \beta(\Pi_1(x_1)) + O(x_1^{1/2}/\log x_1)\\ &= -A(x_1) + O(x_1^{1/2}/\log x_1).\end{aligned}$$

Les trois premières égalités du théorème 2 sont donc conséquence du lemme F et de l'égalité (12).

Remarque. Dans le cas $\theta = 1/2$, on peut démontrer, en affinant le calcul ci-dessus:

$$\omega(g(n)) = \mathrm{Li}\left(\sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)}\right) - \frac{\sqrt{2}+4}{3}\frac{(n\log n)^{1/4}}{\log n} + \Omega_{\pm}\left(\frac{(n\log n)^{1/4}}{\log n}\right).$$

Il est en effet possible de remplacer dans le lemme E, $O(x_1^{1/2}/\log x_1)$ par $o(x_1^{1/2}/\log x_1)$.

**References**


[1] K. Chandrasekharan, *Arithmetical functions*, Springer Verlag, 1970.
[2] M. Cipolla, *La determinazione assintotica dell'$n^{imo}$ numero primo*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, Ser. 3, 8 (1902), p. 132–166.
[3] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press, New York and London 1974.
[4] W. J. Ellison, M. Mendès-France, *Les nombres premiers*, Hermann, Paris 1975. Actualités scientifiques et industrielles n° 1366.
[5] H. Halberstam et H. E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press, 1974.
[6] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bände 1 und 2, Leipzig und Berlin 1909 (2te Auflage, New York 1953).

[7] J.-P. Massias, *Majoration explicite de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 6 (1984), p. 269–280.
[8] — *Ordre maximum d'un élément du groupe symétrique et applications*, Thèse de 3ème cycle soutenue le 30 Mai 1984 à l'Université de Limoges.
[9] J.-L. Nicolas, *Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers*, Bull. Soc. Math. France 97 (1969), p. 129–191.
[10] — *Sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe $S_n$ des permutations*, Acta Arith. 14 (1968), p. 315–332.
[11] — *Calcul de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique $S_n$*, R.I.R.O. 3e année, n° R-2/1969, p. 43–50.
[12] — *Ordre maximum d'un élément du groupe des permutations et nombres très hautement abondants*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 266 (1968), p. 513–515.
[13] — *Ordre maximal d'un élément d'un groupe de permutations*, ibid. 270 (1970), p. 1473–1476.
[14] — *Petites valeurs de la fonction d'Euler*, J. Number Theory 17 (1983), p. 375–388.
[15] G. Robin, *Sur la différence* $\mathrm{Li}(\theta(x))-\pi(x)$, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 6 (1984), p. 257–268.
[16] — *Méthodes d'optimisation pour un problème de théorie des nombres*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, 17 (1983), p. 239–247.
[17] A. Schinzel, *Reducibility of lacunary polynomials, III*, Acta Arith. 34 (1978), p. 227–266.
[18] S. M. Shah, *An inequality for the arithmetical function $g(x)$*, J. Indian Math. Soc. 3 (1939), p. 316–318.
[19] H. Siebert, *Montgomery's weighted sieve for dimension two*, Monatsh. Math. 82 (1976), p. 327–336.
[20] M. Szalay, *On the maximal order in $S_n$ and $S_n^*$*, Acta Arith. 37 (1980), p. 321–331.
[21] L. G. Valiant et M. S. Paterson, *Deterministic one counter automata*, J. Comput. System Sci. 10 (1975), p. 340–350.
[22] P. M. B. Vitanyi, *On the size of DOL Languages. L Systems* (Third Open House, Comput. Sci. Dept., Aarhus Univ., Aarhus, 1974), pp. 78–92, 327–338. Lectures Notes in Computer Science, Vol. 15, Springer, Berlin 1974.

U.E.R. DES SCIENCES DE LIMOGES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
123 RUE ALBERT THOMAS
87060 Limoges Cédex (France)

*Reçu le 11.11.1985* (1553)

---

ACTA ARITHMETICA
L (1988)

# On the degree of an irreducible factor of the Bernoulli polynomials

by

NORIAKI KIMURA (Chiba, Japan)

**Introduction.** In the present note we intend to consider the degree of an irreducible factor of certain polynomials, in particular, the Bernoulli polynomials, which are defined by

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x)\frac{t^m}{m!}.$$

When $m$ is odd $\geqslant 3$, it is well known that $B_m(x)$ has the three linear factors $x$, $x-\frac{1}{2}$ and $x-1$. Conversely Inkeri [2] has shown that if $B_m(x)$, $m \geqslant 3$ has rational roots, then $m$ is odd and $B_m(x)$ does not have other linear factors with rational coefficients. Moreover Carlitz [1] has shown that $B_{2m+1}(x)/x(x-1)(x-\frac{1}{2})$, where $2m+1 = k(p-1)+1$, $1 \leqslant k \leqslant p$, $p$ an odd prime has an irreducible factor over the rational field $Q$ of degree $\geqslant 2m+1-p$.

In the case of an even index McCarthy [5] has shown that $pB_{2m}(x)$ is an Eisenstein polynomial (and therefore irreducible over $Q$) if and only if there exists a prime $p$ such that $\sum m_i = p-1$, where $2m = \sum m_i p^i$, $0 \leqslant m_i \leqslant p-1$ for all $i$, is the $p$-adic expansion of $2m$.

In Section 1 we first deal with properties concerning the divisibility of the binomial coefficients and in Section 2 those results are applied to the polynomials, whose coefficients contain the binomial coefficients, and we shall obtain some generalizations of the results mentioned above in the rest of this note.

**1.** Let $p$ be a prime number and $n$ an arbitrary positive integer. Let

$$n = \sum_{i=0}^{h} n_i p^i \quad (0 \leqslant n_i \leqslant p-1 \text{ for all } i \text{ and } n_h \neq 0)$$

be the $p$-adic notation of $n$. We define $A(n, p)$ by

$$A(n, p) = \sum_{i=0}^{h} n_i.$$