

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-LOUIS NICOLAS

**Sur les entiers  $N$  pour lesquels il y a beaucoup  
de groupes abéliens d'ordre  $N$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 28, n° 4 (1978), p. 1-16.

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1978\\_\\_28\\_4\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_4_1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES ENTIERS $N$ POUR LESQUELS IL Y A BEAUCOUP DE GROUPES ABÉLIENS D'ORDRE $N$

par Jean-Louis NICOLAS

---

### Introduction.

Soit  $a(n)$  le nombre de groupes abéliens d'ordre  $n$ . On désigne par  $P(\alpha)$  le nombre de partitions de l'entier  $\alpha$ , c'est-à-dire le nombre de façons d'écrire  $\alpha$  comme somme d'entiers, sans tenir compte de l'ordre (cf. [8], ch. XIX). Il est connu depuis longtemps (cf. par exemple Burnside [1]) que, si la décomposition en facteurs premiers de  $n$  est :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

alors on a :

$$a(n) = P(\alpha_1)P(\alpha_2) \dots P(\alpha_k).$$

La démonstration se fait en deux temps : d'abord le groupe  $G$  d'ordre  $n$  s'écrit :

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_k$$

où  $G_i$  est le sous-groupe des éléments dont l'ordre est une puissance de  $p_i$ . Cela montre que la fonction arithmétique  $a(n)$  est multiplicative et vérifie :

$$a(n) = a(p_1^{\alpha_1}) \dots a(p_k^{\alpha_k}).$$

Il reste ensuite à compter le nombre de groupes abéliens d'ordre  $p^\alpha$ . On peut décomposer un groupe abélien en somme directe de sous-groupes cycliques. Si le groupe  $H$  a  $p^\alpha$  éléments, on écrit :

$$H = H_1 \oplus \dots \oplus H_r.$$

Si le sous-groupe  $H_i$  a  $p^{\alpha_i}$  éléments, on voit apparaître la partition de  $\alpha$  :

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_r .$$

Il y a donc  $P(\alpha)$  groupes  $H$  non isomorphes ayant  $p^\alpha$  éléments.

P. Erdős et G. Szekeres ont étudié en 1934 (cf. [4]) la fonction  $a(n)$  et montré que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} = \prod_{k=1}^{\infty} \zeta(ks) , \quad \text{Re } s > 1 .$$

On en déduit par application du théorème taubérien de Ikehara (cf. [6], ch. 12) que

$$\sum_{n \leq x} a(n) \sim A_1 x \quad \text{avec} \quad A_1 = \prod_{k=2}^{\infty} \zeta(k) .$$

On peut maintenant démontrer : (cf. : [18] et [20])

$$\sum_{n \leq x} a(n) = A_1 x \times A_2 x^{1/2} + A_3 x^{1/3} + O(x^\theta)$$

l'exposant  $\theta$  diminuant progressivement : la meilleure valeur actuellement connue est :  $\frac{10}{39} + \varepsilon$ .

L'étude des « grandes valeurs » prises par une fonction multiplicative a été étudiée pour la première fois par Wigert, pour la fonction  $d(n)$ , nombre de diviseurs de  $n$ .

Il démontra [21] que l'ordre maximum de  $d(n)$  était

$$2^{(1+o(1))(\log n)/\log \log n}$$

c'est-à-dire que pour  $\varepsilon > 0$ , on avait :

$$\begin{aligned} d(n) &< 2^{(1+\varepsilon)(\log n)/\log \log n} && \text{pour tout } n \text{ assez grand} \\ d(n) &> 2^{(1-\varepsilon)(\log n)/\log \log n} && \text{pour une infinité de } n . \end{aligned}$$

S. Ramanujan [16] a introduit les nombres hautement composés afin de préciser les résultats de Wigert. Il montre notamment que l'ordre maximum de  $d(n)$  est

$$2^{li(\log n) + O(\log n e^{-c\sqrt{\log \log n}})}$$

où  $li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$  désigne le logarithme intégral de  $x$ .

Avec l'hypothèse de Riemann, il donne même un développement asymptotique plus long (cf. [16], § 43).

Les grandes valeurs de la fonction  $a(n)$  ont été étudiées par Kendall et Rankin [10] qui ont montré que l'ordre maximum de  $\log a(n)$  était  $O(\log n / \log \log n)$ . Krätzel [13] précisait la constante :  $\left(\frac{\log 5}{4} + O(1)\right) \log n / \log \log n$  répondant ainsi à une question posée par P. Erdős dans [22] et Schwarz et Wirsing démontraient : [19]

$$(1) \quad \log 5 \operatorname{li} \left( \frac{1}{4} \log n \right) + O(\log n e^{-c\sqrt{\log \log n}}).$$

D'autres auteurs ont étudié les grandes valeurs de fonctions multiplicatives (cf. [8], notes du ch. XVIII) : Landau pour  $n/\varphi(n)$  où  $\varphi$  est l'indicateur d'Euler, Gronwall pour la somme  $\sigma(n)$  des diviseurs de  $n$ , Knopfmacher [11] et [12] pour certaines fonctions venues de la théorie algébrique des nombres, Serre et Deligne [2] pour des coefficients de formes modulaires. Enfin, Heppner [9] a donné une formulation plus générale.

Nous allons suivre l'idée de Ramanujan et définir pour la fonction  $a(n)$  des nombres  $a$ -hautement composés et  $a$ -hautement composés supérieurs. Il faudra pour cela étudier la concavité de la fonction  $\log P(\alpha)$ . Nous montrerons ensuite que l'étude de ces nombres est indispensable pour évaluer l'ordre maximum, en donnant sous l'hypothèse de Riemann, un développement asymptotique plus long que (1). Nous terminerons par des considérations sur l'ordre maximum.

## 1. Concavité logarithmique de la fonction de répartition.

Soit  $E \subset \mathbf{R}^2$ . On appelle enveloppe inférieure convexe de  $E$  l'intersection des demi-plans inférieurs contenant  $E$ . Pour les demi-plans définis par l'équation  $y = ax + b$ ,  $a \neq 0$ , on appelle demi-plan inférieur la région  $y \leq ax + b$ .

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $P(n)$  le nombre de partitions de l'entier  $n$ . L'enveloppe inférieure convexe du graphe de l'appli-*

cation  $n \mapsto \log P(n)$  de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$  a pour sommets 0, les entiers pairs vérifiant  $4 \leq n \leq 26$  et tous les entiers supérieurs à 26.

*Démonstration.* — Nous allons d'abord démontrer que  $P(n)$  est logarithmiquement concave pour  $n \geq 100$ . Nous allons utiliser les formules données par Hardy et Ramanujan [7] et Rademacher [17], § 120 :

$$(2) \quad P(n) = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \sum_{k \geq 1} \sqrt{k} A_k(n) \frac{d}{dn} \left( \frac{\text{Sh} \frac{C}{k} \lambda_n}{\lambda_n} \right)$$

avec  $C = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} = 2,565$ ,  $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$ . Les valeurs de  $A_k(n)$  ont été calculées par Hardy et Ramanujan jusqu'à  $k = 18$ . En particulier  $A_1(n) = 1$  et  $A_2(n) = (-1)^n$ . On sait démontrer que : (cf. [17], § 127) pour tout  $n$  on a :

$$|A_k(n)| \leq 2k^{3/4}.$$

Le reste  $R_N = \sum_{k \geq N+1}$  de la série (2) se majore en développant en série entière la fonction  $\text{Sh}$ , en permutant les sommations et en majorant  $\sum_{k \geq N+1} \frac{|A_k|}{k^{2r+1/2}}$  par l'intégrale  $\int_N^\infty \frac{2 dx}{x^{2r-1/4}}$ . On trouve :

$$|R_N| \leq \frac{4}{3} \frac{N^{9/4}}{\lambda_n^3} \text{Sh} \frac{C \lambda_n}{N}.$$

On trouvera dans [17], une majoration plus précise.

LEMME. — Soit :

$$f(n) = \frac{1}{2\pi \sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left( \frac{e^{C \lambda_n}}{\lambda_n} \right) = \frac{1}{4\pi \sqrt{2}} \frac{e^{C \lambda_n}}{\lambda_n^2} \left( C - \frac{1}{\lambda_n} \right).$$

Pour  $n \geq 26$ , on a :

$$P(n) = f(n) + \theta \frac{e^{\frac{C}{2} \lambda_n}}{\lambda_n^2} \quad \text{avec} \quad |\theta| < 1$$

et

$$P(n) = f(n) \left( 1 + \xi e^{-\frac{C}{2} \lambda_n} \right) \quad \text{avec} \quad |\xi| < 8.$$

*Démonstration.* — On écrit les deux premiers termes de la série (2) en décomposant le Sh :

$$P(n) = f(n) - \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left( \frac{e^{-C\lambda_n}}{\lambda_n} \right) + \frac{(-1)^n}{2\pi} \frac{d}{dn} \left( \frac{e^{\frac{C}{2}\lambda_n}}{\lambda_n} \right) - \frac{(-1)^n}{2\pi} \frac{d}{dn} \left( \frac{e^{-\frac{C}{2}\lambda_n}}{\lambda_n} \right) + R_2.$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \frac{e^{-C\lambda_n}}{\lambda_n^2} \left( C + \frac{1}{\lambda_n} \right) \frac{1}{2\lambda_n^2}.$$

Le quatrième terme est lui aussi majoré par  $1/2\lambda_n^2$ .

Le troisième vaut  $\frac{(-1)^n}{4\pi} \frac{e^{\frac{C}{2}\lambda_n}}{\lambda_n^2} \left( \frac{C}{2} - \frac{1}{\lambda_n} \right)$ . Il est majoré en valeur absolue par  $\frac{C e^{\frac{C}{2}\lambda_n}}{8\pi\lambda_n^2}$ . Enfin pour  $R_2$  on a :

$$|R_2| \leq \frac{4}{3} \frac{2^{9/4}}{\lambda_n^3} \left( \frac{1}{2} e^{\frac{C}{2}\lambda_n} \right) \leq \frac{4}{15} 2^{5/4} \frac{e^{\frac{C}{2}\lambda_n}}{\lambda_n^2}$$

car  $\lambda_n > 5$  dès que  $n \geq 26$ . On a donc :

$$P(n) = f(n) + \theta \frac{e^{\frac{C}{2}\lambda_n}}{\lambda_n^2}$$

avec  $|\theta| \leq \frac{C}{8\pi} + \frac{4}{15} 2^{5/4} + \frac{1}{e^5} = 0,743 < 1$ .

Pour la forme multiplicative, on exprime  $\xi$  en fonction de  $\theta$ .

$$\xi = \frac{4\pi\sqrt{2}\theta}{C - 1/\lambda_n} \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{C - 1/5} \theta \leq 7,52 \theta < 8$$

dès que  $n \geq 26$ .

Nous allons déduire de ce lemme que la concavité de  $\varphi(n) = \log f(n)$  entraîne la concavité de  $\log P(n)$ . On a :

$$\log P(n) = \varphi(n) + \log \left( 1 + \xi e^{-\frac{C}{2}\lambda_n} \right)$$

d'où l'on tire :

$$\log \frac{P(n+2)}{P(n+1)} - \log \frac{P(n+1)}{P(n)} = \varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n) + \Delta$$

avec  $\Delta \leq 32e^{-\frac{C}{2}\lambda_n}$ . La fonction  $\varphi$  est définie pour  $x$  réel et l'on a :

$$\varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n) = \varphi''(\eta)$$

avec

$$n < \eta < n + 2.$$

On a :

$$\varphi(x) = C\lambda - 2 \log \lambda + \log \left( C - \frac{1}{\lambda} \right) - \log 4\pi \sqrt{2}$$

avec  $\lambda = \lambda(x) = \sqrt{x - \frac{1}{24}}$  et  $\lambda'(x) = \frac{1}{2\lambda(x)}$ . D'où

$$\varphi''(x) = -\frac{C}{4\lambda^3} \left[ 1 - \frac{4}{C\lambda} + \frac{3C\lambda - 2}{C\lambda(C\lambda - 1)^2} \right].$$

La fonction  $u \mapsto \frac{3u-2}{u(u-1)^2}$  est décroissante pour  $u > 1$ . On en déduit que le crochet est  $> \frac{2}{3}$  lorsque  $x \geq 26$  ce qui entraîne  $C\lambda > 12,5$ . On aura donc, pour  $n \geq 26$

$$|\varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n)| = |\varphi''(\eta)| > \frac{C}{6\lambda_{n+2}^3} > \frac{C}{7\lambda_n^3}.$$

Pour s'assurer que  $P(n)$  est logarithmiquement concave

il suffit de vérifier que :  $\Delta \leq \frac{C}{7\lambda_n^3}$ , soit  $e^{\frac{C}{2}\lambda_n} > \frac{224}{C}$ . Cette inégalité est vraie pour  $\lambda_n \geq 9$  et donc pour  $n \geq 82$ .

On achève de démontrer la proposition en étudiant avec un ordinateur la table numérique des valeurs de  $P(n)$ . Il est à noter que comme  $A_2(n) = (-1)^n$ , la fonction  $P$  est un peu plus faible pour les nombres impairs.

**COROLLAIRE.** — *On a les inégalités valables pour tout  $n \geq 0$*

$$P(n) \leq 5^{n/4} \quad \text{et} \quad P(n) \leq \frac{125}{121} \left( \frac{11}{5} \right)^{n/2}.$$

On obtient de telles inégalités en écrivant que le graphe de  $\log P(n)$  est situé sous l'une des droites qui forment son enveloppe convexe.

*Table numérique*

$n = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(n) = 1$	2	3	5	7	11	15	22	30	42

## 2. Nombres $a$ -hautement composés.

**DÉFINITION.** — On dit que  $n$  est  $a$ -hautement composé ( $a$ -h.c.) si pour  $m < n$ , on a :  $a(m) < a(n)$ .

Comme  $a(p^\alpha) = P(\alpha)$  ne dépend que de l'exposant  $\alpha$ , on a pour deux nombres premiers  $p$  et  $q$  et  $n$   $a$ -h.c. :

$$(3) \quad p < q \implies \nu_p(n) \geq \nu_q(n)$$

avec  $\nu_p(n)$  l'exposant de  $p$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $n$ .

Désignons par  $p_k$  le  $k^{\text{ième}}$  nombre premier, et écrivons  $n$ , supposé  $a$ -h.c. :

$$(4) \quad n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

On a :  $\alpha_{k-1} \geq 4$  et  $\alpha_k \geq 2$ .

Si  $n$  n'est pas  $a$ -h.c. il existe  $m < n$  tel que  $a(m) \geq a(n)$ . On dit alors que  $m$  barre  $n$ .

Comme  $P(1) = 1$ , on a d'abord  $\alpha_i \geq 2$ . (Si  $\alpha_i = 1$ ,  $m = \frac{n}{p_i}$  barre  $n$ ). Les valeurs possibles du couple  $(\alpha_{k-1}, \alpha_k)$  compte tenu de (3) sont : (2, 2); (3, 2) et (3, 3). Dans les deux premiers cas,  $n$  est barré par :  $n \left( \frac{p_{k-1}}{p_k} \right)^2$  et dans le troisième par  $n \left( \frac{p_{k-1}}{p_k} \right)^3$ .

Les méthodes utilisées pour étudier les nombres hautement composés de Ramanujan s'adaptent à l'étude des nombres

*a-h.c.* En particulier, on peut démontrer, par la méthode des bénéfiques, que sauf pour un nombre fini de  $n$ , on a  $\alpha_k = 4$  dans la formule (4) (cf. [14]).

### 3. Nombres *a-h.c.* supérieurs.

PROPOSITION 2. — Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n^\varepsilon} = 0$ .

Démonstration. — La fonction  $n \mapsto \frac{a(n)}{n^\varepsilon}$  est multiplicative.

Pour qu'elle tende vers 0 il faut et il suffit qu'elle tende vers 0 sur la sous-suite des  $n = p^m$ , puissance des nombres premiers. (Cf. (8), ch. XVIII). La formule (2) nous donne :

$$P(m) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{\exp(C\sqrt{m})}{m}$$

soit  $\log P(m) \leq A\sqrt{m}$  et :

$$\begin{aligned} \log \frac{a(p^m)}{p^{m\varepsilon}} &= \log P(m) - \varepsilon m \log p \leq A \sqrt{\frac{\log p^m}{\log p}} - \varepsilon \log p^m \\ &\leq \frac{A}{\sqrt{\log 2}} \sqrt{\log p^m} - \varepsilon \log p^m. \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers  $-\infty$  quand  $p^m$  tend vers l'infini.

Remarque. — La fonction  $n \mapsto \frac{a(n)}{n^\varepsilon}$  a un maximum qu'elle atteint en général en un seul point  $N_\varepsilon$  : Comme pour les nombres colossalement abondants (cf. [5]) le maximum peut être atteint en deux points et éventuellement en quatre points s'il existe, ce qui est peu probable, deux nombres premiers  $p \neq q$  et des nombres rationnels  $a$  et  $b$  distincts de 1 tels que :

$$\frac{\log a}{\log p} = \frac{\log b}{\log q}.$$

DÉFINITION. — On dit que  $N$  est *a-hautement composé supérieur* (*a-h.c.s.*) s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que la fonction  $n \mapsto \frac{a(n)}{n^\varepsilon}$  soit maximale en  $N$ .

Un tel nombre est a-h.c. On a en effet, pour  $n < N$  :

$$\frac{a(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{a(N)}{N^\varepsilon} \implies a(n) \leq \left(\frac{n}{N}\right)^\varepsilon a(N) < a(N).$$

Détermination des nombres  $N_\varepsilon$  :

Le maximum d'une fonction multiplicative  $f$  tendant vers 0 à l'infini vérifie :

$$\max_n f(n) = \max \prod_i f(p_i^{\alpha_i}) = \prod_p \max_\alpha f(p^\alpha).$$

Le dernier produit est fini, car, sauf pour un nombre fini de  $p$ ,  $\max_\alpha f(p^\alpha)$  est atteint pour  $\alpha = 0$ .

Il reste à déterminer le maximum de  $\frac{P(\alpha)}{p^{\varepsilon\alpha}}$ , c'est-à-dire de  $\log P(\alpha) - \varepsilon \log p \cdot \alpha$ . Cette quantité peut s'interpréter comme l'ordonnée à l'origine de la droite de pente  $\varepsilon \log p$  passant par le point de coordonnées :  $\alpha, \log P(\alpha)$ . On voit alors que le maximum de  $\log P(\alpha) - \varepsilon \alpha \log p$  est atteint en un des sommets de l'enveloppe convexe du graphe de  $\log P$ .

Désignons par  $(s_i)$  l'abscisse du  $i^{\text{ème}}$  sommet de cette enveloppe convexe. On a vu (proposition 1) que :

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 4, \quad s_2 = 6, \quad s_k = 2k + 2 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 12$$

et  $s_k = k + 14$  pour  $k \geq 12$ . Désignons par  $t_k$  la pente du côté qui relie les  $(k-1)^{\text{ème}}$  au  $k^{\text{ème}}$  sommet. On a :

$$(5) \quad \begin{aligned} t_1 &= \frac{\log 5}{4}; & t_2 &= \frac{\log \frac{11}{5}}{2} \dots \\ t_k &= \frac{\log P(s_k) - \log P(s_{k-1})}{s_k - s_{k-1}} \end{aligned}$$

la suite  $t_k$  est décroissante et tend vers 0.

(6) Si l'on a :  $t_{k+1} < \varepsilon \log p < t_k$  alors  $\frac{P(\alpha)}{p^{\varepsilon\alpha}}$  atteindra son maximum en  $\alpha = s_k$ .

En particulier posons  $x$  tel que  $\varepsilon \log x = t_1 = \frac{\log 5}{4}$  alors pour  $p > x$  on aura un maximum en  $\alpha = 0$ .

De même on pose :

$$(7) \quad \varepsilon \log x_{s_i} = t_i, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \log x_{s_i} = \frac{4 t_i}{\log 5} \log x$$

et on a :

$$\begin{aligned} \text{pour } p < x_{s_i}, & \quad \nu_p(N_\varepsilon) \geq s_i \\ \text{pour } p > x_{s_i}, & \quad \nu_p(N_\varepsilon) \leq s_{i-1}. \end{aligned}$$

On a alors en fonction de  $x = x_{s_i} = 5^{\frac{1}{4\varepsilon}}$  :

$$\begin{aligned} \log N_\varepsilon &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p \leq x_{s_i}} (s_i - s_{i-1}) \log p \\ (8) \quad \log N_\varepsilon &= \sum_{i=1}^{\infty} (s_i - s_{i-1}) \theta \left( x^{\frac{4 t_i}{\log 5}} \right) \end{aligned}$$

où  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  désigne la fonction de Tchebichev. On

a également :

$$(9) \quad \log a(N_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(x_{s_i}) \log \frac{P(s_{i+1})}{P(s_i)}$$

avec  $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ .

Ces formules permettent de calculer numériquement les nombres  $N_\varepsilon$  :

#### *Table numérique*

$s_i$	$s_0 = 0$	$s_1 = 4$	$s_2 = 6$	$s_3 = 8$	$s_4 = 10$	$s_5 = 12$
$\frac{4 t_i}{\log 5}$		1	0,979 79	0,861 35	0,903 54	0,753 23

*Application :*

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,155; & x &= x_4 = 5^{\frac{1}{4\varepsilon}} = 13,40 \\ x_6 &= x^{0,979\ 79} = 12,72; & x_8 &= x^{0,861\ 35} = 9,35 \dots \end{aligned}$$

Compris entre  $x_4$  et  $x_6$ , le nombre premier 13 aura pour exposant 4. L'exposant de 11 sera 6. Les exposants de 2, 3, 5, 7 se calculent à l'aide de la relation (6) et d'une

table des valeurs de  $t_k$ . On trouve :

$$N_{0,155} = 2^{124} 3^{45} 5^{17} 7^{12} 11^6 13^4 .$$

Les plus petits nombres *a-h.c.s.* sont des puissances de 2 :  $2^4, 2^6, \dots, 2^{18}$ . Viennent ensuite  $2^{18}3^4$  et  $2^{18}3^6$ . Le plus petit nombre où intervient 5 est  $2^{43}3^{14}5^4$ .

#### 4. Ordre maximum de $a(n)$ .

**THÉORÈME.** — *Sous l'hypothèse de Riemann l'ordre maximum de  $a(n)$  vérifie :*

$$\log a(n) = \Phi(n) + O(\log n)^{2\alpha-1}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi(n) = \log 5 \operatorname{li} \left( \frac{\log n}{4} \right) - \frac{\log 5}{2 \log \log n} \left( \frac{\log n}{4} \right)^\alpha \\ + \log \frac{11}{5} \operatorname{li} \left( \frac{\log n}{4} \right)^\alpha \end{aligned}$$

et :

$$\alpha = \frac{t_2}{t_1} = \frac{2 \log 11/5}{\log 5} = 0,979 \ 79 .$$

*Démonstration.* — Montrons d'abord que pour  $n = N_\varepsilon$ , *a-h.c.s.* nous avons :

$$(10) \quad \log a(N_\varepsilon) = \Phi(N_\varepsilon) + O(\log N_\varepsilon)^{2\alpha-1} .$$

On définit  $x$  par :  $\varepsilon \log x = \frac{1}{4} \log 5$ . Les formules (8) et (9) donnent :

$$\begin{aligned} \log N_\varepsilon &= 4\theta(x) + 2\theta(x_6) + O(x_8) \\ \log a(N_\varepsilon) &= \pi(x) \log 5 + \pi(x_6) \log \frac{11}{5} + O(x_8) . \end{aligned}$$

Si la limite supérieure  $\sigma$  de l'abscisse des zéros de la fonction de Riemann vérifie  $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ , on sait que (cf. [3], p. 175) :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= x + O(x^\sigma \log^2 x) , \\ \pi(x) &= \operatorname{li} x + O(x^\sigma \log x) . \end{aligned}$$

On a seulement besoin ici de supposer  $\sigma < 0,97$ . On a alors :

$$\begin{aligned}\log N_\varepsilon &= 4x + 2x^\alpha + 0(x^{2\alpha-1}) \\ \log a(N_\varepsilon) &= \log 5 \operatorname{li} x + \log \frac{11}{5} \operatorname{li}(x^\alpha) + 0(x^{2\alpha-1})\end{aligned}$$

puisque  $x_\varepsilon = x^{0,86} \leq x^{2\alpha-1}$ .

On doit calculer  $x$  en fonction de  $N$  dans la première équation et reporter dans la deuxième. Ce calcul suit la méthode de Ramanujan, ([16], § 43). Il vient :

$$(11) \quad x \sim \frac{1}{4} \log N_\varepsilon.$$

On pose, par commodité,  $\xi = \frac{1}{4} \log N_\varepsilon$  et en remplaçant  $x^\alpha$  par  $\xi^\alpha(1 + o(1))$ , on trouve :

$$x = \xi - \frac{1}{2} \xi^\alpha + 0(\xi^{2\alpha-1}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \xi - u.$$

On a alors :

$$\log a(N) = \log 5 \operatorname{li}(\xi - u) + \log \frac{11}{5} \operatorname{li}(\xi - u)^\alpha + 0(\xi^{2\alpha-1})$$

Par la formule de Taylor, on a :

$$(12) \quad \operatorname{li}(\xi - u) - \operatorname{li}(\xi) = -\frac{u}{\log \xi} + 0(\xi^{2\alpha-1})$$

et

$$\operatorname{li}(\xi - u)^\alpha = \operatorname{li}(\xi^\alpha + 0(\xi^{2\alpha-1})) = \operatorname{li} \xi^\alpha + 0(\xi^{2\alpha-1})$$

et la formule (10) en découle.

Maintenant soit  $n$  quelconque et soit  $N_1 < n \leq N_2$  les deux nombres *a-h.c.s.* qui l'encadrent. Si  $P$  est le plus petit nombre premier ne divisant pas  $N_1$ , on a  $N_2 \leq N_1 P^4$  d'où il résulte que

$$\log N_2 = \log n + 0(\log \log n)$$

(puisque  $P \sim x \sim \frac{1}{4} \log N_1$  par (10)).

On a alors par (12) :  $\Phi(N_2) = \Phi(n) + 0(1)$  et

$$\begin{aligned} \log a(n) \leq \log a(N_2) &= \Phi(N_2) + 0 (\log N_2)^{2\alpha-1} \\ &= \Phi(n) + 0 (\log n)^{2\alpha-1} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

*Remarque.* — En prenant davantage de termes dans les formules (8) et (9), on peut obtenir un développement asymptotique plus long. Le calcul en est techniquement compliqué. L'intérêt de ce théorème est de mettre en valeur le coefficient  $\alpha = \frac{t_2}{t_1}$  quotient des deux premières pentes de l'enveloppe inférieure convexe de la fonction  $n \mapsto \log P(n)$ . Un développement asymptotique plus long ferait intervenir les pentes suivantes. Le problème de l'ordre maximum de  $a(n)$  est donc lié à celui de cette enveloppe.

### 5. Ordre maximum d'une fonction multiplicative.

Revenons à la fonction  $n \mapsto d(n) = \sum_{d|n} 1$ .

Ramanujan ([16]) a défini les nombres hautement composés  $n$ , ( $m < n \implies d(m) < d(n)$ ) et les nombres *h.c.* supérieurs  $N_\varepsilon$  maximisant  $d(n)/n^\varepsilon$ . Il construit alors (§ 30) une fonction  $x \mapsto D(x)$ , telle que pour tout  $n$  on a :

$$d(n) \leq D(n)$$

avec égalité lorsque  $n$  est un nombre *h.c.* supérieur. Il conclut :

« Hence  $D(n)$  is the maximum order of  $d(n)$ . In other words,  $d(n)$  will attain its maximum order when  $n$  is a superior highly composite number ».

Ramanujan donne pour la fonction  $x \mapsto D(x)$  une définition compliquée. En fait on peut la définir ainsi. On trace les points de coordonnées  $(\log n, \log d(n))$  pour tout  $n$ . On prend l'enveloppe inférieure convexe de ces points. La frontière est une fonction  $u \mapsto \Delta(u)$  affine par morceau, concave, affine entre les points  $(\log N, \log d(N))$ , où  $N$  est *h.c.* supérieur. On a alors :

$$D(x) = e^{\Delta(\log x)}.$$

Si la fonction  $\varphi$  est dérivable deux fois, on a pour  $f(x) = e^{\varphi(\log x)}$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{\varphi} (\varphi'' + \varphi'^2 - \varphi')$$

$\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  étant prise au point  $\log x$ . Comme  $\Delta$  peut être interprétée comme la limite d'une suite de fonctions concaves dérivables deux fois, et que la dérivée à droite de  $\Delta$  est  $\leq 1$ , on en déduit que  $D$  est concave.

Le « bénéfice » de  $n$  (cf. [14]) s'interprète facilement. Si  $N_1 \leq n \leq N_2$  sont les nombres *h.c.* supérieurs entourant  $n$ , et  $\varepsilon$  la pente du segment  $(\log N_1, \log d(N_1))$   $(\log N_2, \log d(N_2))$ , on a, relativement à  $\varepsilon$  :

$$\text{bén } n = \Delta(n) - \log d(n).$$

On pouvait prendre d'autres définitions que celle de Ramanujan pour l'ordre maximum de  $d(n)$  :

1) Soit  $F_1(x)$  la plus petite fonction croissante telle que  $F_1(n) \geq d(n)$ . L'appui de  $F_1$  (i. e. les entiers  $n$  pour lesquels  $F_1(n) = d(n)$ ) est formé des nombres  $n$  largement composés ( $m \leq n \Rightarrow d(m) \leq d(n)$ ).

2) Soit  $F(x)$  une fonction strictement croissante telle que  $F(n) \geq d(n)$  et d'appui maximal. L'appui est formé des nombres *h.c.* On a  $F_1(x) \leq F(x)$ .

3) Soit  $F_2(x)$  la plus petite fonction concave telle que  $F_2(n) \geq d(n)$ . On a :  $F_2(x) \leq D(x)$  avec égalité lorsque  $x = N_\varepsilon$ , *h.c.* supérieur. L'appui de  $F_2(x)$  est formé des nombres  $\tilde{N}_\varepsilon$  maximisant  $d(n) - \lambda n$ . Il contient l'appui de  $D$ . Donc tout nombre *h.c.* supérieur est un  $\tilde{N}_\lambda$  pour une certaine valeur de  $\lambda$ . On peut se demander s'il existe une infinité de  $\tilde{N}_\lambda$  qui ne sont pas *h.c.* supérieurs et une infinité de nombres *h.c.* qui ne sont pas des  $\tilde{N}_\lambda$ .

Ces diverses fonctions sont très voisines. A l'aide du théorème de majoration des bénéfiques (cf. [14], th. 1), on voit que :

$$\log D(n) - \log F_1(n) = O\left(\frac{1}{(\log n)^\gamma}\right)$$

avec  $\gamma > 0$ . Ce terme d'erreur est très petit comparé à

celui du théorème du § 4. On aurait pour  $a(n)$  les mêmes résultats, et cela nous autorise à dire, après Ramanujan que l'ordre maximum de la fonction  $n \mapsto a(n)$  est atteint pour les nombres  $a$ -hautement composés supérieurs.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BURNSIDE, Theory of groups of finite order, Dover Publications (1955).
- [2] P. DELIGNE et J. P. SERRE, Formes modulaires de poids 1, *Annales Scientifiques de l'E.N.S.*, 4<sup>e</sup> série, 7 (1974), 507-530.
- [3] W. J. ELLISON et M. MENDES-FRANCE, Les nombres premiers, Hermann (1975), *Actualités Scientifiques et Industrielles* n° 1366.
- [4] P. ERDÖS und G. SZEKERES, Über die Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung und über ein verwandtes zahlentheoretisches Problem, *Acta Litt. Sci. Reg. Univ. Hungar. Fr.-Jos.*, Sect. Sci. Math., 7 (1934), 94-103.
- [5] P. ERDOS et J. L. NICOLAS, Répartition des nombres superabondants, *Bull. Soc. Math. France*, 103 (1975), 65-90.
- [6] G. H. HARDY, Divergent series, Oxford at the Clarendon Press, (1949).
- [7] G. H. HARDY and S. RAMANUJAN, Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. of the London Math. Soc.*, 2, XVII (1918), 75-115 and *Collected Papers of S. Ramanujan*, p. 276 à 309.
- [8] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, An introduction to the theory of numbers, Oxford at the Clarendon Press, 4<sup>th</sup> edition (1962).
- [9] E. HEPPNER, Die maximale Ordnung primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen, *Arch. Math.*, XXIV (1973), 63-66.
- [10] D. G. KENDALL and R. A. RANKIN, On the number of abelian groups of a given order, *Quart J. Math.*, Oxford, ser. 18 (1947), 197-208.
- [11] J. KNOPFMACHER, Arithmetical properties of finite rings and algebras, and analytic number theory I to VI, *J. Reine angew. Math.* 252 (1972), 16-43; 254 (1972), 74-99; 259 (1973), 157-170; 270 (1974), 97-114; 271 (1974), 95-121; 277 (1975), 45-62.
- [12] J. KNOPFMACHER, A prime divisor function, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40 (1973), 373-377.
- [13] E. KRATZEL, Die Maximale Ordnung der Anzahl der wesentlich verschiedenen Abelschen Gruppen  $n$ -ter Ordnung, *Quart J. Math.*, Oxford, (2) 21 (1970), 273-275.
- [14] J. L. NICOLAS, Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, *Can. J. Math.*, vol. XXIII, n° 1, (1971), 116-130.
- [15] J. L. NICOLAS, Grandes valeurs des fonctions arithmétiques, *Séminaire de théorie des nombres Delange-Pisot-Poitou*, Paris (1974-75), 16<sup>e</sup> année, n° G. 20.
- [16] S. RAMANUJAN, Highly composite numbers, *Proc. of the London Math. Soc.*, 2, 14 (1915), 347-409; et *Collected papers*, p. 78-128, Chelsea (1927).

- [17] H. RADEMACHER, Topics in analytic number theory, *Die Grundlehren der Math. Wiss.*, Band n° 169, Springer-Verlag (1973).
- [18] P. G. SCHMIDT, Über die Anzahl abelscher Gruppen, Oberwolfach, Novembre (1975).
- [19] W. SCHWARZ and E. WIRSING, The maximal number of non-isomorphic abelian groups of order  $n$ , *Arch. Math.*, XXIV (1973), 59-62.
- [20] B. R. SRINIVASAN, On the number of Abelian groups of a given order, *Acta Arith.*, 23 (1973), 195-205.
- [21] S. WIGERT, Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier, *Arkiv för Matematik*, vol. 3, n° 18 (1906-1907), 1-9.
- [22] Problèmes et Solutions, *Can. Math. Bull.*, 7 (1964), 307.

Manuscrit reçu le 21 septembre 1977

Proposé par C. Chabauty.

Jean-Louis NICOLAS,  
Université de Limoges  
Département de Mathématiques  
123, rue Albert-Thomas  
87060 Limoges cedex.

---