

Étalonnage de l'analyse spectrale par la méthode du modèle autorégressif

Jean-Louis LACOUME *

Docteur d'état en géophysique

Charaf HANNA *

Docteur 3^e cycle

Jean-Louis NICOLAS **

Docteur d'état en mathématique

Analyse

Dans l'étude de la densité spectrale de puissance d'un bruit blanc additionné à un signal à fréquence pure par la méthode du modèle autorégressif, les auteurs établissent une formule générale permettant d'étalonner cette méthode d'analyse en fonction de l'ordre du filtre autorégressif et du rapport signal sur bruit d'entrée. L'article montre que, dans l'analyse de fréquences pures en présence de bruit blanc, le pouvoir de résolution de la méthode du modèle autorégressif est caractérisé par une largeur de bande dépendant du rapport signal sur bruit d'entrée et de l'ordre du filtre. Cette largeur de bande est calculée dans le cas général.

Mots clés : Analyse spectrale, Signal sinusoïdal, Bruit additif, Étalonnage, Modèle autorégressif, Modèle statistique, Spectre puissance.

AMPLITUDE CALIBRATION OF THE AUTOREGRESSIVE SPECTRAL ANALYSIS METHOD

Abstract

The authors give the general formulas for the amplitude calibration of the autoregressive spectral analysis method of a pure frequency in additive white noise. These calibrations are given versus the autoregressive filter order and the input signal to noise ratio. They show that this spectral analysis method can be characterized by a bandwidth depending of the autoregressive filter order and the input signal to noise ratio. This bandwidth is calculated in the general case.

Key words : Spectral analysis, Sinusoidal signal, Additive noise, Calibration, Autoregressive model, Statistical model, Power spectrum.

Sommaire

1. Introduction.
 2. Étalonnage de l'analyse spectrale par la méthode du modèle autorégressif.
 3. Introduction d'un filtre équivalent dans l'analyse spectrale par la méthode du modèle autorégressif.
 4. Conclusion.
- Bibliographie (7 réf.).

1. INTRODUCTION

Dans les mesures de densité spectrale de puissance, l'étalonnage dépend de la largeur de bande de bruit équivalente de l'appareil de mesure (B_e) et de la largeur de bande du signal analysé (B_s).

La largeur de bande équivalente du signal et celle de l'appareil de mesure sont définies par :

$$B_s = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\nu) d\nu \right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x^2(\nu) d\nu,$$

$$B_e = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) d\nu \right]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 d\nu,$$

où :

— $\gamma_x(\nu)$ est la densité spectrale de puissance (dsp) du signal analysé ;

— $H(\nu) = \text{TF}(h(t))$ est la transformée de Fourier de la fonction d'apodisation totale (en prenant en compte les parties linéaires et quadratiques de l'apodisation) [2].

La bande passante équivalente du signal B_s est la bande passante du bruit blanc à bande passante limitée ayant même puissance que le signal $X(t)$

* CEPHAG (Equipe de Recherche Associée au CNRS), BP 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères.

** UER des Sciences, Département de Mathématiques, 123, rue Albert Thomas, 87100 Limoges.

étudié et dont l'estimateur de la puissance (calculé sur la même durée) a la même variance que l'estimateur de la puissance de $X(t)$. Cette « largeur de bande » permet de caractériser par une référence globale simple la précision statistique de la mesure de puissance de $X(t)$. La largeur de bande de l'appareil de mesure B_e caractérise de la même façon la précision statistique de l'estimation de la puissance du signal $X(t)$ filtré par l'appareil de mesure. B_e est caractéristique de la précision de l'estimateur de la dsp de $X(t)$. L'expression donnée ici, à partir de la fonction d'apodisation utilisée pour l'analyse spectrale, est classique. On peut la trouver en particulier dans [1, p. 256].

Deux cas limites sont généralement considérés. Dans le premier cas, le signal étudié est à large bande, par rapport à la bande passante de l'appareil d'analyse ($B_s \gg B_e$). La puissance en sortie de l'appareil de mesure fonctionnant à la fréquence ν_0 , est alors :

$$P_1 = B_e \gamma_x(\nu_0).$$

Dans le second cas, le signal est *quasi monochromatique*, relativement à l'appareil de mesure, et la puissance de sortie est :

$$P_2 = \int \gamma_x(\nu) d\nu = \text{puissance totale du signal.}$$

Ces deux relations permettent de calibrer l'appareil de mesure, selon la situation envisagée. Par ailleurs, elles déterminent l'amplitude relative, en sortie de l'appareil de mesure, d'un signal (ou bruit) large bande et des raies pures d'un signal quasi monochromatique. On voit en particulier, que le contraste entre les fréquences pures et le bruit large bande, est maximal pour une valeur minimale de la bande passante B_e de l'appareil de mesure (compatible avec $B_e > B_s$).

Ce problème de calibration est donc très important car il permet d'une part de donner un sens quantitatif aux mesures spectrales, et d'autre part d'évaluer la capacité de détection de raies pures par analyse spectrale. Cette question a été résolue dans les méthodes classiques qui se ramènent à un filtrage. Par contre, peu d'auteurs ont envisagé d'étudier ce problème pour des méthodes paramétriques.

Un article récent [3] donne un résultat asymptotique pour la méthode dite *du maximum d'entropie*. Cette étude montre que l'amplitude relative après analyse d'une fréquence pure, additionnée à un bruit large bande (considéré comme blanc) est liée au rapport signal sur bruit avant traitement et à l'ordre du filtre autorégressif.

Nous présentons ici une extension de cette étude qui conduit à un résultat valable dans tous les cas. Nous montrons ensuite, que l'analyse spectrale par la méthode du modèle autorégressif d'une fréquence pure additionnée à un bruit blanc se comporte comme une analyse par filtrage réalisée avec un filtre dont la largeur de bande dépend du rapport signal sur bruit. Il apparaît que la bande passante du filtre équivalent

est d'autant plus étroite que le rapport signal sur bruit est grand. Ce résultat est à rapprocher des méthodes d'analyse spectrale, dites « hybrides » [4] dans lesquelles la finesse d'analyse est accrue par soustraction d'une partie du « bruit blanc » et donc par accroissement du rapport signal sur bruit.

2. ÉTALONNAGE DE L'ANALYSE SPECTRALE PAR LA MÉTHODE DU MODÈLE AUTORÉGRESSIF

2.1. Densité spectrale de puissance du modèle autorégressif.

Soit $\{X(n)\}$ une suite complexe formée de N échantillons d'un signal stationnaire $X(t)$ pris aux instants nT_E ($1 \leq n \leq N$, T_E est le pas d'échantillonnage).

Soit la matrice de corrélation R_L (de dimension $L \times L$) et le vecteur r_L définis par :

$$R_L = \begin{bmatrix} R(0) & R(-1) & \dots & R(-L+1) \\ R(1) & R(0) & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ R(L-1) & \dots & \dots & R(0) \end{bmatrix}$$

et $r_L = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(L) \end{bmatrix}$, ($L < N$)

où $R(l)$ est la vraie valeur de la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ pour un retard lT_E (dans la pratique nous utiliserons ensuite $\{X(n)\}$ pour estimer $R(l)$, mais nous supposons que la valeur de $R(l)$ est sans erreur).

Soit un filtre autorégressif (AR) d'ordre L et de coefficient α^L

$$\alpha^L = \begin{bmatrix} \alpha_1^L \\ \vdots \\ \alpha_L^L \end{bmatrix}.$$

En utilisant ce filtre pour prédire $X(n)$ à partir de $X(n-1), \dots, X(n-L)$, l'erreur de prédiction est :

$$e_n = X(n) - \sum_{i=1}^L \alpha_i^L X(n-i).$$

En minimisant l'erreur quadratique moyenne :

$$P_E(L) = E\{e_n^2\},$$

nous obtenons :

$$\alpha^L = R_L^{-L} r_L$$

avec une erreur quadratique moyenne :

$$P_E(L) = R(0) - r_L^{\dagger} \alpha^L$$

(r_L^{\dagger} est le complexe conjugué transposé de r_L).

On sait que la densité spectrale de puissance du modèle autorégressif (ou du maximum d'entropie)

de $\{X(n)\}$ est [5] :

$$\gamma_x(\nu) = P_E(L) / |G_L(Z)|^2,$$

$$\text{où } G_L(Z) = 1 - (\alpha^L)^T \begin{bmatrix} Z^{-1} \\ \vdots \\ Z^{-L} \end{bmatrix}; Z = \exp\{2\pi j\nu\Delta T\},$$

est le gain complexe du filtre autorégressif.

2.2. Calcul de la dsp dans le cas d'une fréquence pure additionnée à du bruit blanc - Rapport signal sur bruit après traitement.

Le signal $\{X(n)\}$ est formé d'une fréquence pure ν_0 de puissance P et d'un bruit blanc échantillonné de puissance P_B .

Dans ce cas :

$$R(L) = PZ_0^L + P_B\delta(L).$$

Posons :

$$C_L \triangleq \begin{bmatrix} Z_0^{-(L-1)} \\ \vdots \\ Z_0^{-1} \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$R_L = P C_L C_L^T + P_B I.$$

I matrice identité, d'où l'on déduit :

$$R_L^{-1} = \frac{1}{P_B} I - \frac{P}{P_B(P_B + PL)} C_L C_L^T,$$

et :

$$\alpha L = \frac{1}{P_B + PL} r_L = \frac{P}{P_B + PL} \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_0^2 \\ \vdots \\ Z_0^L \end{bmatrix}.$$

L'erreur quadratique moyenne résiduelle $P_E(L)$ et le gain complexe $G_L(Z)$ du filtre AR sont alors :

$$P_E(L) = \frac{P_B(P + P_B + PL)}{P_B + PL},$$

$$(4) \quad G_L(Z) = 1 - \frac{P}{P_B + PL} \sum_{i=1}^L \left(\frac{Z_0}{Z}\right)^i.$$

Le rapport entre les valeurs mesurées de la dsp de la fréquence pure ($\nu = \nu_0$) et du bruit blanc (ν très différent de ν_0) est donné par :

$$R_1 = |G_L(Z_0)/G_L(Z)|^2 - 1,$$

où Z est calculé pour ν très éloigné de ν_0 .

L'expression (1) donne :

$$G_L(Z_0) = P_B/(P_B + PL).$$

Lorsque Z est très différent de Z_0 , on peut admettre que le second terme de (1) s'annule par *mélange de phase*. Ceci revient à dire que les termes du type $(Z_0/Z)^i$ s'écrivent $e^{i\varphi}$ avec φ non voisin de 0 et que les *vecteurs de Fresnel* qui leur sont associés sont *en moyenne* orientés dans des directions uniformément réparties entre 0 et 2π . Leur somme est

donc nulle en moyenne. En fait, il reste une partie résiduelle qui se traduit par de petites oscillations de la dsp (voir Fig. 2).

On obtient donc :

$$(2) \quad R_1 = \left| \frac{P_B + PL}{P_B} \right|^2 - 1 = (1 + \sigma L)^2 - 1.$$

En posant :

$$\sigma = \frac{P}{P_B} = \frac{\text{puissance du signal}}{\text{puissance du bruit}} = \text{rapport signal/bruit avant traitement},$$

le calcul précédent, valable pour un signal complexe, peut être adapté au cas d'un signal réel. Ce cas correspond à la présence de deux signaux complexes de fréquences opposées et dans le calcul de R_L^{-1} , il apparaît des termes du type :

$$J = \sum_{m=1}^{L-1} Z_0^{2m}$$

couplant les deux fréquences.

Ces termes sont négligeables pour L grand (mélange de phase) et l'on obtient alors :

$$(3) \quad R_2 = (1 + \sigma L/2)^2 - 1.$$

Ce dernier résultat valable lorsque L est grand a déjà été obtenu dans [3]. L'influence du rapport signal sur bruit d'entrée sur le contraste après traitement a été mis en évidence empiriquement dans [7].

Dans l'analyse spectrale par filtrage, si W est la bande passante du bruit blanc et B_e la bande passante équivalente du filtre d'analyse, le rapport signal sur bruit après traitement est :

$$R_c = \frac{\text{(puissance de la fréquence pure)}}{\text{(puissance du bruit blanc filtré)}} \\ R_c = \sigma W/B_e.$$

L'évolution du rapport signal sur bruit après traitement (par filtrage : R_c et par la méthode AR : R_1) est indiquée sur la figure 1. La méthode AR donne

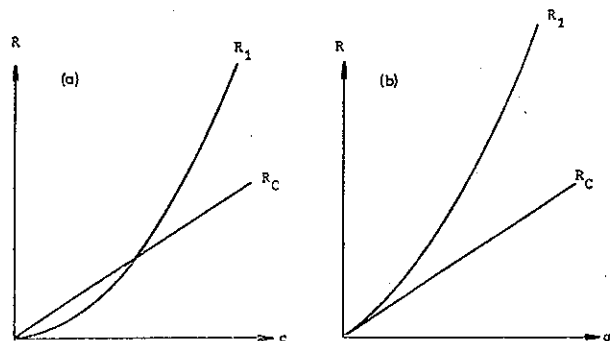


FIG. 1. — Evolution du rapport signal sur bruit après traitement pour la méthode par filtrage et la méthode autorégressive.

R_1 : rapport signal sur bruit après traitement (méthode AR)

R_c : rapport signal sur bruit après traitement (méthode par filtrage)

σ : rapport signal sur bruit avant traitement.

(a) $2L < W/B_e$ (b) $2L > W/B_e$

Output signal to noise ratio versus input signal to noise ratio for Fourier and autoregressive spectral analysis methods.

un meilleur résultat en présence d'un rapport signal sur bruit d'entrée élevé. Pour un faible rapport signal sur bruit d'entrée, le contraste en sortie de la méthode par filtrage est meilleur si :

$$W/B_e > 2L.$$

2.3. Vérification et illustration expérimentale.

Les dsp obtenues pour plusieurs valeurs du rapport signal sur bruit sont présentées figure 2, pour un filtre

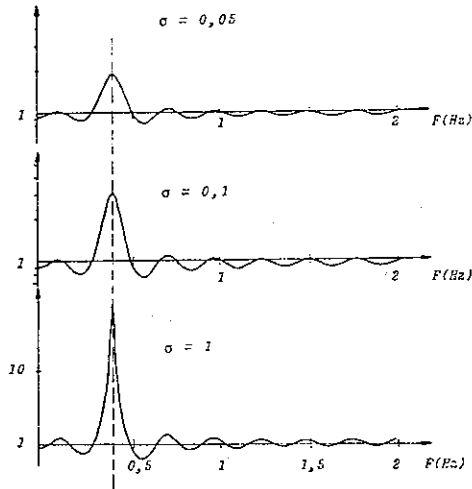


FIG. 2. — Estimation par la méthode du modèle autorégressif de la dsp d'une fréquence pure additionnée de bruit : σ (rapport signal sur bruit).

Spectral power density estimations of a pure frequency in additive white noise for different input signal to noise ratio (6).

AR d'ordre 15. On voit sur cette figure l'évolution du rapport signal sur bruit après traitement ainsi que la variation de la largeur de bande de la fréquence pure estimée. Ce dernier point est étudié en détail au paragraphe 3.

Nous avons également étudié l'évolution du rapport signal sur bruit après traitement (R_2) en fonction du rapport signal sur bruit d'entrée (pour un filtre AR d'ordre 15) et de l'ordre du filtre (pour diverses valeurs du rapport signal sur bruit d'entrée). Les valeurs théoriques (issues de (3)) et les résultats expérimentaux sont présentés sur les figures 3 et 4. La figure 3 nous montre l'évolution du rapport signal sur bruit après traitement en fonction du rapport signal sur bruit d'entrée ($L = 15$). On voit que le contraste en sortie varie plus rapidement que le rapport signal sur bruit d'entrée. La figure 4 présente l'évolution du rapport signal sur bruit en sortie en fonction de l'ordre du filtre : on constate que, comme l'indiquent les relations (2) et (3), le contraste en sortie croît avec l'ordre du filtre.

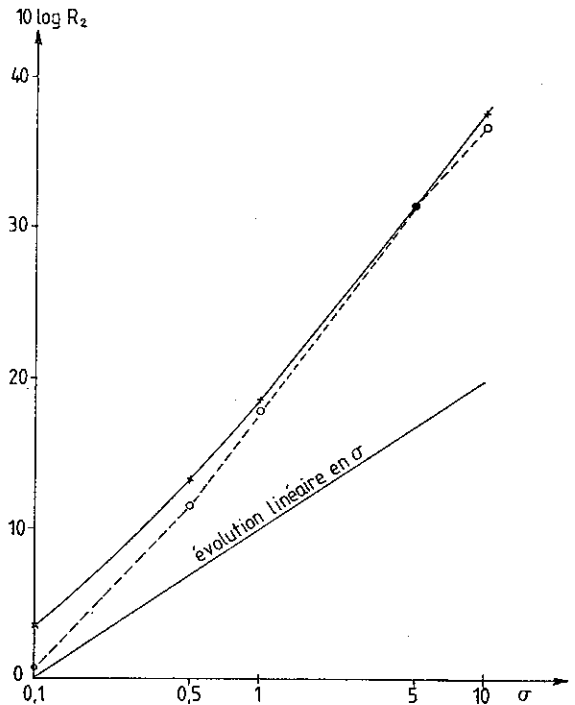


FIG. 3. — Evolution du rapport signal sur bruit après traitement en fonction du rapport signal sur bruit d'entrée. —x— Valeurs théoriques —o— Résultats expérimentaux

Output signal to noise ratio versus input signal to noise ratio.

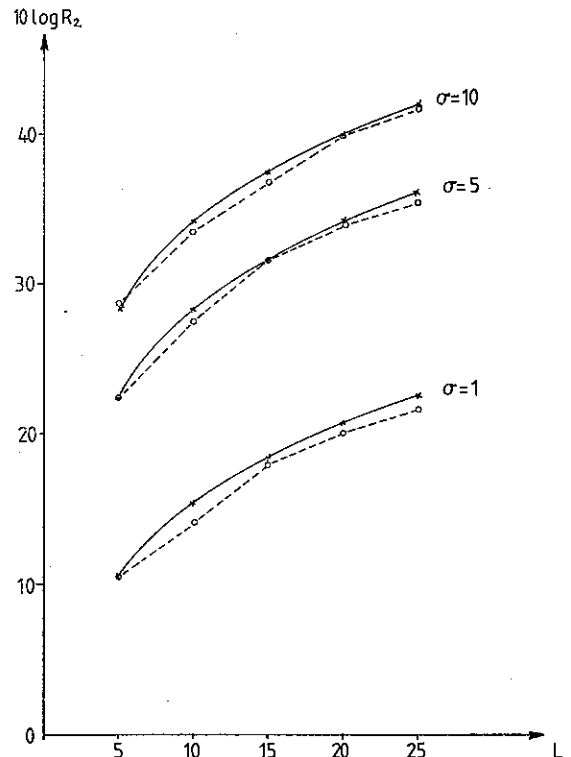


FIG. 4. — Evolution du rapport signal sur bruit après traitement en fonction de l'ordre du filtre AR pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit d'entrée.

—x— Valeurs théoriques —o— Résultats expérimentaux

Output signal to noise ratio versus autoregressive filter order (L) for different values of the input signal to noise ratio (6).

3. INTRODUCTION D'UN FILTRE ÉQUIVALENT DANS L'ANALYSE SPECTRALE PAR LA MÉTHODE DU MODÈLE AUTORÉGRESSIF

3.1. Localisation des pôles du filtre autorégressif : dans un cas simple.

Considérons tout d'abord le cas $L = 2$, alors les pôles du filtre autorégressif sont les racines de :

$$G_2(z) = 1 - \frac{P}{(P_B + 2P)} \left[\left(\frac{z_0}{z} \right) + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] = 0,$$

soit :

$$z = z_0 \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{\sigma} + \frac{9}{4}}}{2 + \frac{1}{\sigma}} = z_0 f(\sigma).$$

Lorsque le rapport signal sur bruit σ varie de 0 à l'infini, les deux racines se déplacent sur la droite de pente $\arg z_0$. Par ailleurs, lorsque le rapport signal sur bruit tend vers l'infini, l'une des racines tend vers z_0 alors que l'autre racine tend vers $-z_0/2$. Dans la zone du cercle unité voisine de $z = z_0$, en présence d'un fort rapport signal sur bruit la dsp obtenue par la méthode du modèle autorégressif se comporte donc comme celle que donnerait la fréquence pure amortie associée au pôle voisin de z_0 . Dans cette situation, la fonction de corrélation est :

$$R(l) = P z_0^l \beta^{|l|}$$

où β est le module de l'affixe du pôle voisin du cercle unité.

Le *décroissement logarithmique* de la fréquence amortie est :

$$\delta = -\frac{1}{T_E} \log \beta.$$

Pour un fort rapport signal sur bruit :

$$\delta = P_B/3 T_E P = 1/3 T_E \sigma.$$

3.2. Bandes passantes équivalentes de la raie après traitement.

3.2.1. Bande passante à 3 dB : B_3 .

$$B_3 = \frac{1 - \beta}{\pi T_E} = \frac{P_B}{3\pi P T_E} = \frac{1}{3\pi T_E \sigma}.$$

Pour un fort rapport signal sur bruit ($P_B/P \ll 1$).

3.2.2. Bande passante de bruit équivalente à la fréquence pure.

La dsp de la fréquence pure après traitement étant $\gamma_R(v)$, la bande passante de bruit blanc équivalente est [1] :

$$B_{wn} = \left[\int_{-1/2T_E}^{1/2T_E} \gamma_R(v) dv \right]^2 \int_{-1/2T_E}^{1/2T_E} \gamma_R^2(v) dv.$$

En présence d'un fort rapport signal sur bruit on obtient :

$$B_{wn} = (2/T_E) (P_B/P) = 2/T_E \sigma.$$

Les deux expressions précédentes nous montrent que, pour un filtre autorégressif d'ordre 2, la largeur de bande de la raie après traitement est fonction du rapport signal sur bruit avant traitement. Cette bande passante est d'autant plus étroite que le rapport signal sur bruit est plus fort. En particulier, la dsp de la raie tend vers une impulsion de Dirac ($B_{wn} \rightarrow 0$) lorsque le bruit blanc tend vers 0. Ceci nous montre pourquoi dans ce type de traitement, il est utile d'introduire (si nécessaire) du bruit blanc dans les données.

3.3. Généralisation.

Le calcul de la bande passante de la fréquence pure, après traitement peut être étendu au cas du filtre autorégressif d'ordre L .

Dans ce cas précis, en posant $x = z_0/z$, l'équation donnant les pôles du filtre autorégressif est :

$$(4) \quad x = z_0/z, \sum_1^L x^i = L + \frac{1}{\sigma}.$$

Pour un rapport signal sur bruit fort ($\sigma \gg 1$) cette équation est voisine de :

$$(5) \quad \sum_1^L x^i = L$$

et, les racines étant des fonctions continues du second membre, les racines de (4) seront voisines des racines de (5) pour un fort rapport signal sur bruit.

L'équation (5) a 2 familles de racines.

a) La première famille est constituée de la racine évidente : $x = 1$ qui sera, comme dans le cas précédent, le pôle donnant la fréquence pure.

b) Les $(L - 1)$ autres racines vérifient les conditions suivantes (*) :

— elles sont dans la couronne :

$$(6) \quad L/(L - 1) \leq |x_i| \leq (2L)^{1/L},$$

— il y a au moins une racine dans chacun des secteurs :

$$|\arg x - 2k\pi/L| \leq \frac{\pi}{L + 1}, k = 0, 1, \dots, L - 1.$$

Nous donnons à la figure 5 les racines de (5) dans le cas $L = 10$. Les résultats énoncés en a) et b) nous montrent que, comme sur la figure, la famille des

(*) Ces résultats sont donnés par Marden (M.) dans [6]. Ils sont obtenus en multipliant et en divisant (5) par $x - 1$ puis en appliquant le théorème 27-1 de [6], p. 122 ; voir aussi les exemples 2 et 3, p. 137 et p. 165 respectivement.

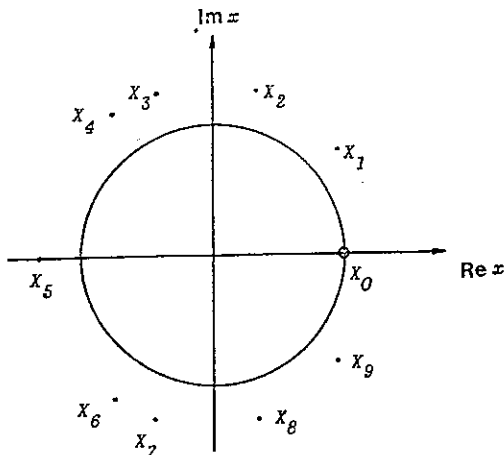


FIG. 5. — Localisation dans le plan complexe des racines de l'équation (5) [$L = 10$]

Localization in the complex plane of the roots of the equation (5) [$L = 10$].

racines b) se répartit uniformément à l'extérieur du cercle unité, à une certaine distance de celui-ci.

Les pôles correspondants : $z = z_0/x$ seront donc uniformément répartis dans le cercle unité et représenteront le bruit blanc. Par ailleurs, le pôle $z = z_0$, associé à la racine $x = 1$, donnera la fréquence pure.

Pour obtenir la bande passante de la fréquence pure, revenons à l'équation (4). Dans la mesure où le rapport signal sur bruit est assez grand nous savons, d'après les propriétés des racines définies en a) et b) et en utilisant la continuité des racines vis-à-vis du second membre, que :

- la racine a) restera au voisinage du point 1,
- les racines b) resteront à une certaine distance du cercle unité.

En multipliant l'équation (4) par $x - 1$, il vient :

$$x^{L+1} - x(L + 1 + 1/\sigma) + L + 1/\sigma = 0,$$

qui en écrivant :

$$x = 1 + \varepsilon$$

et en faisant un développement en ε^2 donne :

$$\varepsilon = 2/\sigma L(L + 1)$$

et pour la bande passante à 3 dB (comme en 3.2.)

$$B_3 = \frac{2}{\pi T_E \sigma L(L + 1)} = \frac{2 P_B}{\pi T_E L(L + 1) P'}$$

et la bande passante équivalente de bruit :

$$B_{wn} = \frac{12}{T_E L(L + 1) \sigma} = \frac{12 P_B}{L(L + 1) T_E P'}$$

Nous notons que, selon la relation (6), les autres pôles z_i sont tels que :

$$|z_i| < 1 - 1/L.$$

La racine voisine de 1 sera donc *dominante* dans le spectre, si le rapport signal sur bruit vérifie :

$$\sigma > 2/(L + 1).$$

Nous obtenons donc le résultat suivant. Dans l'analyse d'une raie pure additionnée à du bruit blanc par la méthode du modèle autorégressif, la finesse d'analyse, caractérisée par la bande passante à 3 dB, B_3 , ou la bande passante de bruit équivalente, B_{wn} est :

— inversement proportionnelle au carré de l'ordre du filtre,

— inversement proportionnelle au rapport signal sur bruit.

Ce résultat permet de chiffrer la puissance des méthodes hybrides (4) dans lesquelles on est conduit à affiner l'analyse en *soustrayant du bruit blanc*. Lorsque l'on cherche à séparer deux raies écartées de B , il faut atteindre un rapport signal sur bruit σ donné par :

$$\sigma = 2/\pi L(L + 1) B T_E.$$

4. CONCLUSION

Nous avons donné la formule générale permettant de calibrer la valeur de la dsp estimée par la méthode du modèle autorégressif pour un signal formé d'une raie pure et de bruit blanc. Ce résultat doit pouvoir être étendu au cas d'un signal formé de raies pures en présence d'un bruit large bande coloré. Par ailleurs, nous avons montré que dans le cas de l'analyse d'une raie pure en présence de bruit blanc, la finesse d'analyse par la méthode du filtre autorégressif peut être caractérisée par une largeur de bande dépendant du rapport signal sur bruit et de l'ordre du filtre AR. Cette bande passante équivalente est à notre avis un paramètre très important pour chiffrer le *pouvoir de résolution* de cette méthode d'analyse spectrale. Elle permet également d'introduire naturellement et de mesurer les performances des méthodes hybrides utilisant la méthode en modèle autorégressif, après avoir *soustrait* une partie du bruit blanc.

Manuscrit reçu le 21 janvier 1981,
accepté le 4 avril 1981.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] JENKINS (G. M.), WATTS (D. J.). *Spectral analysis and its applications*. Holden Day, USA (1968), 256 p.
- [2] VAN SCHOONEVELD (C.), PRINSON (P. J. A.). *Spectrum analysis. Aspects of signal processing*. NASI, ed. G. Tacconi, (1977), 563 p.
- [3] JEFFREY KEELER (R.). Uncertainties in adaptive maximum entropy frequency estimators. *IEEE, Trans., ASSP*, (oct. 1978), 26, n° 5, pp. 469-471.
- [4] FROST (O. L.). Power spectrum estimation. *Aspects of signal processing*. NASI, ed. G. Tacconi, (1977), 125 p.
- [5] ULRICH (T. J.), BISHOP (T. N.). Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. *Rev. Geophys. Space Phys.*, USA, (Fev. 1975), 13, n° 1.
- [6] MARDEN (M.). *Geometry of polynomials*. Amer. math. Soc., (1966), Math. Surveys n° 3, 2° édition.
- [7] KAVEH (M.), COOPER (G. R.). An empirical investigation of the properties of the autoregressive spectral estimator. *IEEE Trans., IT*, USA (mai 1976), 22, n° 3.