

MAJORATIONS EXPLICITES POUR LE NOMBRE DE DIVISEURS DE N

BY
J. L. NICOLAS ET G. ROBIN

ABSTRACT. Let

$$d(n) = \sum_{d|n} 1 \quad \text{and} \quad f(n) = \frac{\log d(n) \log \log n}{\log 2 \log n} \quad (n \geq 2).$$

It is proved that the function f reaches its maximum for $n = 6\,983\,776\,800$, and that $\max_{n \geq 2} f(n) = 1.5379$. The proof deals with superior highly composite numbers introduced by Ramanujan.

1. Introduction. Soit

$$d(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \text{et pour } n \geq 2, \quad \text{soit} \quad f(n) = \frac{\log d(n) \log \log n}{\log 2 \log n}.$$

Dans plusieurs livres de théorie analytique des nombres, on trouve la formule, due à Wigert: (cf. [Wig] et [Har], ch. 18).

$$(1) \quad \limsup f(n) = 1$$

Cette relation implique que f est majorée. Nous nous proposons de calculer le maximum de f :

THEOREME 1. *Le maximum de $f(n)$ est atteint en $n = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 6\,983\,776\,800$, et l'on a: $\max_{n \geq 2} f(n) = 1,5379$.*

La démonstration du théorème 1 ne nécessite pas le théorème des nombres premiers. Soit $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$; $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$.

Nous utiliserons les résultats élémentaires:

$$(2) \quad \forall x > 0; \quad \theta(x) \leq x \log 3 \quad [\text{Han}]$$

$$(3) \quad \forall x \geq 8; \quad \pi(x) \leq \frac{x}{2}$$

La méthode de démonstration est la suivante: On montre que le maximum de f est atteint en un nombre hautement composé supérieur (Lemme 7), qui n'est pas trop grand (Lemme 8). Il suffira alors de calculer $f(n)$ pour les nombres de la table placée en appendice.

Regu par la réduction le 19 octobre 1982 et, sous une forme révisée, le 2 février 1983.

AMS Subject Classification (1980): 10H25

© Canadian Mathematical Society 1983.

Le paragraphe 2 rappelle quelques propriétés des nombres hautement composés supérieurs, introduits par Ramanujan, et qui jouent un grand rôle dans l'étude des grandes valeurs de la fonction $d(n)$. Une étude analogue peut se faire avec d'autres fonctions multiplicatives ou additives: Dans [Rob 1], G. Robin donne diverses majorations explicites pour la fonction $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$.

2. Nombres hautement composés supérieurs. Afin de préciser le résultat de Wigert (1), Ramanujan (cf. [Ram]) a défini les nombres hautement composés:

DEFINITION. On dit que N est hautement composé, si pour tout $m < N$, on a $d(m) < d(N)$.

Soit $Q(X)$ le nombre de nombres hautement composés $\leq X$. Ramanujan a démontré que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(X)}{\log X} = +\infty;$$

P. Erdős ([Erd 1]) a démontré que $Q(X) \gg (\log X)^{1+c}$, $c > 0$; J. L. Nicolas ([Nic 1]) a montré que $Q(X) \ll (\log X)^{c'}$ et conjecturé que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log Q(X)}{\log \log X} = \frac{\log 30}{\log 16} = 1,227.$$

A l'aide de résultats récents de M. Waldschmidt sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, on peut prendre $c' = 3,65$.

Ramanujan a introduit ensuite les nombres hautement composés supérieurs:

DEFINITION. On dit que N est hautement composé supérieur s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait:

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{d(N)}{N^\varepsilon}.$$

Un tel nombre est évidemment hautement composé:

$$m < N \Rightarrow d(m) \leq \left(\frac{m}{N}\right)^\varepsilon d(N) < d(N).$$

REMARQUE. On peut interpréter ε comme le multiplicateur de Lagrange du problème d'optimisation avec contrainte:

$$\begin{cases} \log n \leq \log n_0 \\ \max \log d(n) \end{cases}$$

cf. [Nic 2]. Dans cette optique, G. Robin a utilisé des méthodes de recherche opérationnelle pour construire une table des nombres hautement composés de Ramanujan (cf [Rob 2]).

Géométriquement, la droite de pente ε passant par le point $\log n$, $\log d(n)$ a pour ordonnée à l'origine $\log d(n) - \varepsilon \log n$. L'enveloppe convexe des points

$\log n$, $\log d(n)$ est une ligne brisée concave, dont les sommets ont pour abscisse $\log N$, où N est hautement composé supérieur.

Les nombres hautement composés supérieurs sont très faciles à calculer, grâce au lemme suivant:

LEMME 1. Soit $g(n)$ une fonction multiplicative, c'est-à-dire $(m, n) = 1 \Rightarrow g(mn) = g(m)g(n)$. On suppose que $\lim_{p^k \rightarrow \infty} g(p^k) = 0$. alors, g est bornée, et

$$\max g(n) = \prod_{p \text{ premier}} \max_{k \geq 0} g(p^k)$$

où le produit est en fait un produit fini, car pour p assez grand le maximum de $g(p^k)$ est atteint en $k = 0$.

Démonstration. Immédiate, en décomposant n en facteurs premiers.

LEMME 2. Etant donné $\varepsilon > 0$, on désigne par N_ε , et on appelle nombre hautement composé supérieur associé à ε , l'un des nombres qui maximisent la fonction $n \mapsto d(n)/n^\varepsilon$. On a:

$$(4) \quad N_\varepsilon = \prod_{p \leq 2^{1/\varepsilon}} p^{k(p, \varepsilon)}$$

avec, en désignant par $[t]$ la partie entière de t :

$$k(p, \varepsilon) = \begin{cases} \left[\frac{1}{p^\varepsilon - 1} \right] \text{ si } \frac{1}{p^\varepsilon - 1} \notin \mathbb{N} \\ \left[\frac{1}{p^\varepsilon - 1} \right] \text{ ou } \left[\frac{1}{p^\varepsilon - 1} - 1 \right] \text{ si } \frac{1}{p^\varepsilon - 1} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démonstration. (cf. [Ram], §32). On applique le lemme 1 à la fonction $d(n)/n^\varepsilon$.

REMARQUE. Pour ε fixé, par un théorème de transcendance de Lang, il y a au plus deux nombres premiers p tels que $1/(p^\varepsilon - 1)$ soit entier (cf. [Erd 2]), ce qui entraîne qu'il y a au plus 4 nombres N_ε hautement composés supérieurs associés à ε . On remarque enfin, que si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, N_{ε_2} divise N_{ε_1} .

LEMME 3. (Majoration des nombres hautement composés supérieurs). Soit N_ε donné par la formule (4), on pose $x = 2^{1/\varepsilon}$. Soit $\varepsilon < 0,193$ (ce qui entraîne $x > 36$), alors on a:

$$\log N_\varepsilon \leq 1,69x = (1,69)2^{1/\varepsilon}.$$

Démonstration. On déduit de la formule donnant $k(p, \varepsilon)$ dans le lemme 2, que

$$k(p, \varepsilon) \leq \frac{1}{p^\varepsilon - 1} \leq \frac{1}{\varepsilon \log p} \quad \text{puisque } e^u - 1 \geq u.$$

et d'autre part que, si l'on pose $x_2 = x^\theta = 2^{\theta/\varepsilon}$ avec $\theta = \log 3/2/\log 2$, on a, pour $p > x_2$, $p^\varepsilon - 1 > \frac{1}{2}$ et donc $k(p, \varepsilon) \leq 1$. On a de plus, pour $x > 36$, $x_2 > 8$ et d'après (3), $\pi(x_2) \leq x_2/2$.

Il vient alors:

$$\log N_\varepsilon = \sum_{p \leq x} k(p, \varepsilon) \log p \leq \theta(x) + \sum_{p \leq x_2} \left(\frac{1}{\varepsilon \log p} \right) \log p$$

$$\log N_\varepsilon \leq \theta(x) + \frac{1}{\varepsilon} \pi(x_2) \leq \theta(x) + \frac{x_2}{2\varepsilon}$$

En utilisant (2), on obtient:

$$\log N_\varepsilon \leq x \log 3 \left(1 + \frac{\log x}{2(\log 2)(\log 3) \times x^{(1-\theta)}} \right).$$

Or la fonction $x \mapsto (\log x)x^{\theta-1}$ étant décroissante pour $x \geq 36$, on obtient:

$$\log N_\varepsilon \leq x \log 3 \left(1 + \frac{\log 36}{2(\log 2)(\log 3)(36)^{1-\theta}} \right) \leq 1,69x$$

REMARQUE. La majoration du Lemme 3 est très grossière. On pourrait obtenir un meilleur coefficient avec des calculs plus longs.

LEMME 4. Soit N_0 un nombre hautement composé supérieur associé à ε_0 . Soit $N_1 > N_0$ et $\varepsilon_1 > 0$. On suppose que

$$(5) \quad \forall n \geq N_0, \frac{d(n)}{n^{\varepsilon_1}} \leq \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}}$$

alors:

- (i) on a $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$
- (ii) N_1 est hautement composé supérieur associé à ε_1 .

Démonstration. Comme N_0 est hautement composé supérieur, on a:

$$\frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_0}} \leq \frac{d(N_0)}{N_0^{\varepsilon_0}}$$

Ecrivons la relation (5) avec $n = N_0$:

$$(6) \quad \frac{d(N_0)}{N_0^{\varepsilon_1}} \leq \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}}$$

On en déduit:

$$\left(\frac{N_1}{N_0} \right)^{\varepsilon_1} \leq \frac{d(N_1)}{d(N_0)} \leq \left(\frac{N_1}{N_0} \right)^{\varepsilon_0}$$

ce qui montre $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, c'est-à-dire (i).

Pour démontrer (ii), il suffit de montrer que

$$n < N_0 \Rightarrow \frac{d(n)}{n^{\varepsilon_1}} \leq \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}}.$$

Soit $n < N_0$, on a:

$$\frac{d(n)}{n^{\varepsilon_0}} \leq \frac{d(N_0)}{N_0^{\varepsilon_0}}$$

et, à l'aide de (6):

$$\frac{d(n)}{n^{\varepsilon_1}} \leq \left(\frac{n}{N_0}\right)^{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}} \leq \frac{d(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}}$$

3. Démonstration du Théorème 1

LEMME 5. On a, pour $2 \leq n \leq 5040$, $f(n) \leq f(5040)$.

Démonstration. On peut le vérifier sur une machine à calculer. Autre méthode: 5040 est hautement composé supérieur, associé à $\varepsilon = 0.3$. On a donc pour tout n :

$$\frac{d(n)}{n^{0,3}} \leq \frac{60}{(5040)^{0,3}}$$

c'est-à-dire:

$$\log d(n) \leq 0,3(\log n + a) \text{ avec } a = \frac{\log 60 - 0,3 \log 5040}{0,3} = 5,12$$

Il vient ensuite, pour $n \geq 3$:

$$f(n) = \frac{\log d(n)}{\log 2 \log n} \log \log n \leq \frac{0,3}{\log 2} \left(\log \log n + a \frac{\log \log n}{\log n} \right).$$

Or la fonction $t \mapsto t + a t e^{-t}$, lorsque $a < e^2$, est croissante sur \mathbb{R} ; on a donc, pour $3 \leq n \leq 5040$,

$$f(n) \leq \frac{0,3}{\log 2} \left(\log \log 5040 + a \frac{\log \log 5040}{\log 5040} \right) = f(5040).$$

LEMME 6. Soit $b \in \mathbb{R}$, $b > 2$. Soit

$$F_b(t) = \frac{e^t}{t} - \frac{b-1}{b^2} e^t$$

alors, pour $t \geq 2$, on a: $F_b(t) \leq F_b(b)$.

Démonstration. On a:

$$F'_b(t) = \frac{e^t}{b^2 t^2} (b-1)(b-t) \left(t - \frac{b}{b-1} \right)$$

et comme

$$b > 2, \quad \frac{b}{b-1} < 2.$$

La fonction $t \mapsto F_b(t)$ est donc croissante sur l'intervalle $[2, b]$ et décroissante sur $[b, +\infty[$.

LEMME 7. Soit $\lambda = \max f(n)$ et soit N un entier où f atteint son maximum. (On a donc $\lambda = f(N)$). Alors N est un nombre hautement composé supérieur associé à :

$$\varepsilon = \lambda \log 2 \frac{\log \log N - 1}{(\log \log N)^2}.$$

Démonstration. D'après le lemme 5, on a $N \geq 5040$. D'après le lemme 4, avec $N_0 = 2520$, il suffit de démontrer que :

$$n \geq 2520 \Rightarrow \log d(n) - \varepsilon \log n \leq \log d(N) - \varepsilon \log N.$$

Supposons $n \geq 2520$, cela entraîne $\log \log n > 2$. Il vient :

$$\log d(n) - \varepsilon \log n = \left(\log d(n) - \lambda \log 2 \frac{\log n}{\log \log n} \right) + \left(\lambda \log 2 \frac{\log n}{\log \log n} - \varepsilon \log n \right)$$

la première parenthèse est ≤ 0 . La 2^e parenthèse vaut $\lambda \log 2 F_b(\log \log n)$ avec les notations du lemme 6, et $b = \log \log N$. On a donc, puisque $\lambda = f(N)$,

$$\log d(n) - \varepsilon \log n \leq \lambda \log 2 \frac{\log N}{\log \log N} - \varepsilon \log N = \log d(N) - \varepsilon \log N.$$

LEMME 8. Soit $\varepsilon < 0,193$ et N_ε un nombre hautement composé supérieur associé à ε ; on a :

$$\frac{\varepsilon}{\log 2} \frac{(\log \log N_\varepsilon)^2}{\log \log N_\varepsilon - 1} \leq 1,52.$$

Démonstration. Posant, $x = 2^{1/\varepsilon}$, on a par le Lemme 3 :

$$\log \log N_\varepsilon \leq \log x + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \log(1,69)$$

La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{t-1}$ est croissante pour $t \geq 2$ et $\varepsilon < 0,193$ entraîne $N_\varepsilon > e^{e^2}$.

On a donc :

$$\frac{\varepsilon}{\log 2} \frac{(\log \log N_\varepsilon)^2}{\log \log N_\varepsilon - 1} \leq \frac{(\log x + \alpha)^2}{(\log x)(\log x + \alpha - 1)} = G(\log x)$$

Lorsque $0 < \alpha < 1$, la fonction

$$G(t) = \frac{(t + \alpha)^2}{t(t + \alpha - 1)} = \left(1 + \frac{\alpha}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{t + \alpha - 1}\right)$$

est décroissante pour $t > 1 - \alpha$, on a donc, pour $x > 36$:

$$G(\log x) \leq G(\log 36) \leq 1,5153.$$

La démonstration du théorème 1 s'achève de la façon suivante: D'après les lemmes 5 et 7, le maximum de f est atteint en un nombre hautement composé

Table des nombres hautement composes superieurs (d'après Ramanujan, cf. [Ram], p. 116)

ε	N_ε	$d(N_\varepsilon)$	$f(N_\varepsilon)$
$\frac{\log 2}{\log 7} = 0,35621$	$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	48	1,4677
$\frac{\log 5/4}{\log 2} = 0,32193$	$5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	60	1,4849
$\frac{\log 2}{\log 11} = 0,28906$	$55\,440 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	120	1,5118
$\frac{\log 2}{\log 13} = 0,27024$	$720\,720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	240	1,5252
$\frac{\log 6/5}{\log 2} = 0,26303$	$1\,441\,440 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	288	1,5278
$\frac{\log 4/3}{\log 3} = 0,26186$	$4\,324\,320 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	384	1,5319
$\frac{\log 3/2}{\log 5} = 0,25193$	$21\,621\,600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	576	1,5347
$\frac{\log 2}{\log 17} = 0,24465$	$367\,567\,200 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	1152	1,5376
$\frac{\log 2}{\log 19} = 0,23541$	$6\,983\,776\,800 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	2304	1,5379
$\frac{\log 7/6}{\log 2} = 0,22239$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	2688	1,5367
$\frac{\log 2}{\log 23} = 0,22106$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	5376	1,5327
$\frac{\log 3/2}{\log 7} = 0,20837$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	8064	1,5276
$\frac{\log 2}{\log 29} = 0,20585$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$	16128	1,5203
$\frac{\log 5/4}{\log 3} = 0,20311$	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$	20160	1,5181
$\frac{\log 2}{\log 31} = 0,20185$	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	40320	1,5126
$\frac{\log 8/7}{\log 2} = 0,19265$			

supérieur $N_\varepsilon \geq 5040$. D'après la table ci-jointe, on constate que pour $\varepsilon > 0,193$, $f(N_\varepsilon)$ est maximum pour $N_{\max} = 6\,983\,776\,800$. Si le maximum de f était atteint en un nombre hautement composé supérieur N_ε avec $\varepsilon < 0,193$, on aurait d'après les lemmes 7 et 8

$$\lambda = \max f(n) = \frac{\varepsilon}{\log 2} \frac{(\log \log N_\varepsilon)^2}{\log \log N_\varepsilon - 1} \leq 1,52$$

ce n'est pas possible puisque $f(N_{\max}) > 1,53$.

Lecture de la table: Pour

$$\frac{\log 2}{\log 7} = 0,35621 > \varepsilon > \frac{\log 5/4}{\log 2} = 0,32193$$

le nombre hautement composé supérieur associé à ε est 2520. Il y a deux nombres hautement composés supérieurs associés à $\varepsilon = \frac{\log 5/4}{\log 2}$, qui sont 2520 et 5040.

RÉFÉRENCES

- [Erd 1] P. Erdős *On highly composite numbers*, J. London Math. Soc., t. **19** (1944), 130–133.
- [Erd 2] P. Erdős et J. L. Nicolas, *Répartition des nombres superabondants*, Bull. Soc. Math. France, t. **103** (1975), 65–90.
- [Han] D. Hanson, *On the product of the primes*, Canad. Math. Bull., t. **15** (1972) 33–37.
- [Har] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 4th edition. Oxford, The Clarendon Press, 1960.
- [Nic 1] J. L. Nicolas, *Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan*, Canad. J. of Math., t. **23** (1971) 116–130.
- [Nic 2] J. L. Nicolas.—*Algorithmes d'optimisation en nombres entiers*, Astérisque **38–39** (1976), 169–182.
- [Ram] S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc., Série 2, t. **14** (1915) 347–400; and *Collected papers*. Cambridge, at the University Press, 1927, p. 78–128.
- [Rob 1] G. Robin,—*Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers de n* , A paraître dans Acta Arithmetica, Vol. 42, n°4.
- [Rob 2] G. Robin, *Methodes d'optimisation pour un problème de theorie des nombres* à paraître dans R.A.I.R.O. (Informatique théorique).
- [Wig] S. Wigert, *Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier*. Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd 3, n° 18, 9S; 1906–1907.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE LIMOGES
123 AVENUE ALBERT THOMAS
87060 LIMOGES CEDEX. (FRANCE).