AUTOUR DE FORMULES DUES À A. SELBERG

Jean-Louis NICOLAS

I. INTRODUCTION.

Désignons par $\Omega(n) = \sum_{p^a \| n} a$ le nombre de diviseurs de n comptés avec leur multiplicité. On définit :

$$\mathcal{N}(x,k) = \{n \leq x \mid \Omega(n) = k\}$$

$$N(x,k) = \operatorname{Card} \mathcal{N}(x,k)$$

$$\mathcal{S}(x,k) = \{n \leq x \mid \Omega(n) \geq k\}$$

$$S(x,k) = \operatorname{Card} S(x,k).$$

Dans tout cet article on écrira ℓ à la place de $\log\log x$.

En 1900, E. LANDAU a démontré comme corollaire du théorème des nombres premiers que, pour k fixé,

$$N(x,k) \sim \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{x}{\log x} \frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!}$$

(cf. [Lan], § 56) . Cette formule avait été conjecturée par Gauss (cf. [Ell], Introduction). En 1917, Hardy et Ramanujan dans leur célèbre mémoire "The normal number of prime factors of a number n" ont donné une majoration de $N(x,k)$ (cf. [Ram]).

En 1953, L.G. Sathe (cf. [Sat]) explicitait une fonction f telle que, pour $k \leq (2-\varepsilon)\ell$, on ait :

$$N(x,k) \sim f(k/\ell) \frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!} \frac{x}{\log x}$$

étendant ainsi un résultat de P. Erdös qui avait considéré le cas $k-\ell = O(\sqrt{\ell})$; (cf. [Erd]).

A la suite de l'article de L.G. Sathe, A. Selberg démontrait la formule (cf. [Sel]) :

(1) $$\sum_{n\le x} z^{\Omega(n)} = xzF(z)(\log x)^{z-1} + O(x(\log x)^{\mathrm{Re}\, z-2}) \quad \text{où} \quad x\ge 2,$$

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p (1-1/p)^z\,(1-z/p)^{-1}$$

est une fonction holomorphe dans $|z|<2$, et où le "O" est uniforme dans tout disque $|z|\le R$, avec $R<2$.

La formule (1) permettait à A. Selberg de retrouver le résultat de L.G. Sathe, et de préciser le comportement de $N(x,k)$ lorsque $(2-\varepsilon)\ell\le k\le B\ell$. Il signale notamment que

$$N(x,k) \sim C(x\log x)/2^k$$

pour $(2+\varepsilon)\ell\le k\le B\ell$, où B est un nombre réel arbitraire.

La formule (1) a été généralisée de plusieurs façons par H. Delange (cf. [Del]).

En 1978, G. Kolesnik et E.G. Strauss, ont donné (cf. [Kol]) une estimation asymptotique de $N(x,k)$ sous la forme d'une somme double, mais dont les termes sont difficilement comparables. P. Erdös et Sarközy ont démontré dans [Sar] :

$$S(x,k) = O((x\log x)k^4/2^k)$$

uniformément pour tout x et k. Et K. Norton (cf. [Nor 3]) a donné

$$S(x,k) = O((x\log x)\sqrt{\ell}/2^k)$$

ainsi que

$$S(x,k) \gg (x\log x)2^{-k}(\varepsilon/\log\log\log x)^3$$

pour $2\ell - \sqrt{2\ell}\le k\le (1-\varepsilon)(\log x)/\log 2$ et x assez grand.

Nous démontrerons :

<u>THEOREME</u>. *Pour tout* $\varepsilon>0$ *et pour tout* $\eta>0$, *on a uniformément pour* $x\ge e$ *et* $(2+\varepsilon)\ell\le k\le (\log x)/\log 2-\eta$

$$N(x,k) = C(x/2^k)\log(x/2^k)(1+O(\log\log(3x/2^k))^{-1/4})$$

avec

$$C = (1/4)\prod_{p>2}(1+1/(p(p-2))) = 0{,}378694.$$

La démonstration du théorème repose sur la formule :

(2) $$N(x,k) = \sum_{m=0}^{k} N'(x/2^{k-m},\, m)$$

où $N'(y,m) = \text{card}\{n \leq y,\ n \text{ impair}, \Omega(n) = m\}$.

La formule (2) s'obtient en regroupant les $n \in \mathcal{N}(x,k)$ qui sont divisibles exactement par la même puissance de 2.

On évalue ensuite $N'(y,m)$ grâce à une extension de la formule de Selberg (cf. lemme 2), qui permet d'évaluer $\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \bmod 2}} z^{\Omega(n)}$. On remarque enfin que dans la sommation de la formule (1) les termes les plus importants sont ceux pour lesquels m est voisin de 2ℓ ; en quelque sorte, l'élément normal de $\mathcal{N}(x,k)$, lorsque $k \geq (2+\varepsilon)\ell$, s'écrit $n = 2^a n'$ avec n' impair et $\Omega(n') \sim 2\ell$.

Cette démonstration marche lorsque $k \leq (\log x)(\frac{1}{\log 2} - \varepsilon)$. Il est facile de voir que, si $k > (\log x)/\log 3$, alors tout élément de $\mathcal{N}(x,k)$ est certainement pair, et même divisible par une certaine puissance de 2, ce qui permet de nous ramener au cas précédent.

II. QUELQUES LEMMES.

LEMME 1. *Soit* a *un nombre réel fixé. On a, lorsque* $x \to +\infty$:

$$e^{-x} \sum_{m \geq x + x^{3/4} + a} \frac{x^m}{m!} = O(1/x)$$

et

$$e^{-x} \sum_{m \leq x - x^{3/4} + a} \frac{x^m}{m!} = O(1/x).$$

Démonstration. On utilise les majorations suivantes : (cf. [Hal], p. 149)

$$\sum_{m \geq m_0} \frac{x^m}{m!} \leq \left(\frac{ex}{m_0}\right)^{m_0} \quad ; \qquad 0 < x \leq m_0$$

$$\sum_{m \leq m_1} \frac{x^m}{m!} \leq \left(\frac{ex}{m_1}\right)^{m_1} \quad ; \qquad 0 < m_1 \leq x \quad .$$

On pose $m_0 = x(1+u)$ avec $u = x^{-1/4} + ax^{-1}$, et en utilisant le développement limité

$$(1+u)(1 - \log(1+u)) = 1 - u^2/2 + o(u^2)$$

on obtient pour la première quantité la majoration

$$\exp(-x \frac{u^2}{2} (1 + o(1))).$$

La deuxième majoration est similaire.

LEMME 2. (Formule de Selberg pour les nombres impairs).

On a :

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 1 \bmod 2}} z^{\Omega(n)} = xz\left(1-\frac{z}{2}\right) F(z)(\log x)^{z-1} + xO(\log x)^{\operatorname{Re} z-2}$$

où le "O" est uniforme pour $|z| \le R < 2$, *et la fonction* $(1-z/2)\,F(z)$ *est holomorphe pour* $|z| < 3$.

Démonstration. H. Delange a donné ([Del], p. 136) une formule de Selberg pour une progression arithmétique quelconque. Cependant, on peut donner ici une démonstration rapide. On a :

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n \text{ pair}}} z^{\Omega(n)} = \sum_{n'\le x/2} z^{1+\Omega(n')}$$

et par (1) :

$$= z\left\{\frac{x}{2}\, zF(z)\left(\log\frac{x}{2}\right)^{z-1} + O\left(\frac{x}{2}\left(\log\frac{x}{2}\right)\right)^{\operatorname{Re} z-2}\right\}$$

$$= z^2\,\frac{x}{2}\, F(z)(\log x)^{z-1} + O(x(\log x)^{\operatorname{Re} z-2}\;.$$

En observant que :

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 1 \bmod 2}} z^{\Omega(n)} = \sum_{n\le x} z^{\Omega(n)} - \sum_{\substack{n\le x\\ n \text{ pair}}} z^{\Omega(n)}\;,$$

et en appliquant (1), on démontre le lemme.

LEMME 3. *Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans* $|z| \le R$ *et vérifiant* $f(0) \ne 0$. *Soit* $t > 0$ *et*

$$f(z)e^{tz} = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k + \ldots\quad .$$

Alors on a, pour $k < tR$:

$$|a_k - f(k/t)\,t^k/k!| \le 2M\left(\frac{t^k}{k!}\right)\left(\frac{k}{t^2}\right)$$

où $M = \sup_{|z|\le R} |f''(z)|$.

Démonstration. On écrit, pour $k \ne 0$:

$$a_k = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)e^{tz}}{z^{k+1}}\,dz$$

où γ est le cercle de centre 0 et de rayon $r = k/t$. On a ensuite :

$$f(z) = f(r) + (z-r)\ f'(r) + (z-r)^2\ \Phi(z)$$

et la fonction Φ est holomorphe pour $|z| \leq R$. Un calcul simple montre que :

$$(z-r)^2\ \Phi(z) = \int_r^z (z-w)\ f''(w)dw$$

et que

$$|\Phi(z)| \leq M/2\ .$$

On a alors :

$$a_k = \frac{1}{2i\pi}\ \{\int_\gamma \frac{f(r)e^{tz}}{z^{k+1}}\ dz + \int_\gamma \frac{(z-r)f'(r)e^{tz}}{z^{k+1}}\ dz + \int_\gamma \frac{(z-r)^2\ e^{tz}\ \Phi(z)}{z^{k+1}}\ dz\}.$$

La première intégrale vaut $f(r)\ t^k/k!$; la seconde est nulle; la troisième est majorée par $\frac{M}{2\pi\ \ r^{k-2}}$ J, avec

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos\ \theta)e^{k\cos\theta} d\theta\ .$$

Or,

$$J = 2\int_0^\pi (1-\cos\ \theta)e^{k\cos\theta}d\theta \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\ \theta)e^{k\cos\theta}\ d\theta + (\pi+2)$$

$$\leq 2\int_0^1 \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\ e^{ku}\ du + (\pi+2) \leq 2\int_0^1 \sqrt{1-u}\ \ e^{ku}\ du + (\pi+2)$$

$$= 2\ e^k\ k^{-3/2} \int_0^k e^{-v}\ \sqrt{v}\ dv + (\pi+2)$$

$$\leq 2\ \Gamma(3/2)\ e^k\ k^{-3/2} + (\pi+2) \leq 4e^k\ k^{-3/2}\ .$$

On obtient donc :

$$|a_k - f(r)\ t^k/k!| \leq \frac{4M}{2\pi}\ \frac{t^{k-2}}{k^{k-2}}\ e^k\ k^{-3/2}\ .$$

En utilisant la formule de Stirling sous la forme :

$$k! \leq k^k\ e^{-k}\ \sqrt{2\pi k}\ \ \exp(1/12k) \leq 2{,}73\ k^k\ e^{-k}\ \sqrt{k}\ ,$$

on achève la démonstration du lemme.

<u>LEMME 4</u>. *Soit* $\chi(n)$ *la fonction qui vaut* 1 *si* n *est impair, et* 0 *si* n *est pair. On a alors, pour* z *réel, vérifiant* $1 \leq z < 3$,

$$\sum_{n\leq x} \chi(n)\ z^{\Omega(n)} \leq x \prod_{3\leq p\leq x} (1 + \frac{z-1}{p-z})$$

et pour tout $\rho < 3$, *on a* :

$$N'(x,k) \leq C_\rho\ \frac{x(\log\ x)^{\rho-1}}{\rho^k}$$

pour tout $x \geq 1$ *et* $k \geq 1$.

Démonstration. On écrit :

$$\chi(n)\, z^{\Omega(n)} = \sum_{d|n} h(d)$$

où $h(d)$ est la fonction multiplicative à valeurs positives ou nulles définies par :

$$h(p^{\alpha}) = \chi(p) z^{\alpha}(1-1/z).$$

On a ensuite :

$$\sum_{n\leq x} \chi(n) z^{\Omega(n)} = \sum_{n\leq x} \sum_{d|n} h(d) \leq x \sum_{d\leq x} \frac{h(d)}{d}$$

$$\leq x \prod_{p\leq x} \{1 + \frac{h(p)}{p} + \ldots + \frac{h(p^{\alpha})}{p^{\alpha}} + \ldots\}$$

$$= x \prod_{p\leq x} (1 + \chi(p)(1-\frac{1}{z})(\sum_{\alpha\geq 1} (\frac{z}{p})^{\alpha}))$$

$$= x \prod_{3\leq p\leq x} (1 + \frac{z-1}{p-z}).$$

On peut majorer $N'(x,k)$ en observant :

$$z^k N'(x,k) \leq \sum_{n\leq x} \chi(n)\, z^{\Omega(n)},$$

ce qui donne, pour $z = \rho$,

$$N'(x,k) \leq \rho^{-k} x \prod_{3\leq p\leq x} (1 + \frac{\rho-1}{p-\rho})$$

$$\leq \frac{x}{\rho^k} \exp \sum_{3\leq p\leq x} \frac{\rho-1}{p-\rho}$$

$$\leq \frac{x}{\rho^k} \exp (\sum_{3\leq p\leq x} \frac{1}{p} + (\frac{\rho}{p(p-\rho)}))(\rho-1).$$

Et en utilisant la relation

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + O(1)$$

on obtient l'égalité annoncée.

Remarquons que, par une méthode similaire, K. Norton obtient une majoration meilleure cf. [Nor 3])

$$N'(x,k) = O\left(\frac{x(\log x)^2}{3^k} \sqrt{\log\log x}\right).$$

PROPOSITION. (Evaluation de $N'(x,k)$). *On a, pour* $\rho < 3$,

(3) $$N'(x,k) = O\left(\frac{x}{\log x} \frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$

uniformément pour $k \leq \rho\ell$. *De plus, pour*

(4) $$2\ell - 2\ell^{3/4} \leq k \leq 2\ell + 2\ell^{3/4}$$

on a :

(5) $$N'(x,k) = \frac{Cx}{2 \log x} \frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!} (1 + O(\ell^{-1/4}))$$

où la constante C *est celle qui figure dans le théorème.*

Démonstration. Le lemme 2 nous dit que :

(6) $$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \bmod 2}} z^{\Omega(n)} = xz(1 - z/2)\, F(z)\, (\log x)^{z-1} + Q(x,z)$$

où $Q(x,z)$ est holomorphe pour $|z| < 3$, et pour chaque $R < 2$, il existe $M(R) > 0$ tel que

(7) $$|Q(x,z)| \leq M(R)\, x(\log x)^{\operatorname{Re} z-2} \quad \text{pour} \quad x \geq 2 \quad \text{et} \quad |z| \leq R.$$

Le coefficient de z^k dans (6) est $N'(x,k)$. On a donc :

$$N'(x,k) = a_k(x) + b_k(x)$$

où $a_k(x)$ et $b_k(x)$ sont les coefficients de z^k dans les développements en série entière de $xz(1 - z/2)\, F(z)\, (\log x)^{z-1}$ et de $Q(x,z)$.

D'après une inégalité classique de Cauchy, il résulte de (7) que pour $R < 2$,

$$|b_k(x)| \leq M(R)\, x(\log x)^{R-2}\, R^{-k} \quad \text{pour} \quad x \geq 2.$$

La formule (3) résulte pour $k \leq 9\ell/5$ du théorème de Sathe, car il est clair que $N'(x,k) \leq N(x,k)$. Pour $9/5 \leq k \leq \rho\ell$, on choisit $R = 9/5$, et on pose $r = k/\ell$. On a :

$$\begin{aligned} |b_k(x)| &\leq M(9/5)\, x(\log x)^{-1/5}\, (9/5)^{-k} \\ &\leq M(9/5)\, x \exp(-1/5 - r \log 9/5)\ell . \end{aligned}$$

On a d'autre part, d'après la formule de Stirling :

$$\frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!} \gg \frac{\ell^k}{k!} \gg \left(\frac{\ell}{k}\right)^k \frac{e^k}{\sqrt{\ell}}$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{\log x}\,\frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!} \gg \exp((-r\log r+r-1)\,\ell-(1/2)\log \ell).$$

La fonction $r \longmapsto -r\log r + r-1 + r\log(9/5) + 1/5$ pour $r \in [9/5,\ 3]$ présente un minimum en $r=3$. On en déduit :

$$b_k(x) = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1,6}}\,\frac{\ell^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

L'estimation de $a_k(x)$ se fait par le lemme 3, en remarquant que $F(0) \neq 0$. On achève ainsi de démontrer (3). On obtient (5), en observant que si l'on pose

$$F_1(z) = (1-z/2)\,F(z) = \frac{1}{2^z\,\Gamma(z+1)} \prod_{p\geq 3} (1-1/p)^z\,(1-z/p)^{-1}.$$

On a lorsque k vérifie (4)

$$F_1((k-1)/\ell) = F_1(2)\,(1+O(\ell^{-1/4}))$$

et

$$F_1(2) = C/2.$$

III. DEMONSTRATION DU THEOREME LORSQUE $k < \log x$.

On remarque d'abord que l'hypothèse $k < \log x$ entraîne :

$$x \geq x/2^k \geq x^{1-\log 2}$$

$$\log x \geq \log(x/2^k) \geq (1-\log 2)\log x$$

$$\log\log(x/2^k) = \ell + O(1).$$

On choisit $\rho = 5/2$ et on découpe la somme (2) :

$$N(x,k) = S_1+S_2+S_3+S_4$$

où les intervalles de sommation sont :

pour S_1 : $m \leq 2\ell - (2\ell)^{3/4} = m_o$

pour S_2 : $m_o < m \leq 2\ell + (2\ell)^{3/4} = m_1$

pour S_3 : $m_1 < m \leq \rho\ell$

pour S_4 : $\rho\ell < m \leq k$.

La somme S_4 pouvant éventuellement être vide.

a) Majoration de S_4.

D'après le lemme 4, on a :

$$S_4 = \sum_{\rho\ell<m\leq k} N'(x2^{m-k}, m)$$
$$\leq C_\rho \sum_{\rho\ell<m\leq k} x2^{m-k}(\log x)^{\rho-1}\ \rho^{-m}$$
$$<< \frac{x}{2^k} (\log x)^{\rho-1} \sum_{\rho\ell<m} (2/\rho)^m$$
$$<< x2^{-k}(\log x)^{\rho-1}(2/\rho)^{\rho\ell} = x2^{-k}(\log x)^{\rho-1+\rho\log(2/\rho)}$$
$$= O(x2^{-k}(\log x)^{0,95}), \quad \text{puisque} \quad \rho = 2,5.$$

b) Majoration de S_1. On a

$$S_1 = \sum_{m\leq m_o} N'(x2^{m-k}, m)$$

et par (3),

$$S_1 = O(\sum_{m\leq m_o} \frac{2^m \ell^{m-1}}{(m-1)!} \frac{x}{2^k\log(x/2^k)})$$

et par le lemme 1

$$S_1 = O(\frac{x \log x}{2^k \log\log x}) .$$

c) Majoration de S_3. On obtient la même majoration que pour S_1 en appliquant (3), puis le lemme 1.

d) Estimation de S_2. On a :

$$S_2 = \sum_{m_o\leq m\leq m_1} N'(x2^{m-k}, m).$$

On veut appliquer (5). On doit vérifier que :

$$2\log\log(x2^{m-k}) - 2(\log\log(x2^{m-k}))^{3/4} \leq m \leq 2\log\log(x2^{m-k}) + 2(\log\log(x2^{m-k}))^{3/4}.$$

Ceci résulte de

$$\log\log(x2^{m-k}) = \ell + O(1).$$

On obtient alors, par (5)

$$N'(x2^{m-k}, m) = \frac{Cx}{2\log(x2^{m-k})} 2^{m-k} \frac{(\log\log(x2^{m-k}))^{m-1}}{(m-1)!} (1+O(\ell^{-1/4})).$$

En posant $\ell_1 = \log\log(x2^{-k})$ et $\ell_2 = \log\log(x2^{(2+\varepsilon)\ell-k})$ et en remarquant que $\log(x2^{m-k}) = \log(x2^{-k})(1+O(\ell/\log x))$, on encadre S_2 par deux sommes de la forme :

$$i = 1,\,2 : \qquad \frac{C\,x}{2^k \log(x2^{-k})}\,(1 + O(\ell^{-1/4})) \sum_{m_0 < m \le m_1} \frac{(2\ell_i)^{m-1}}{(m-1)!}$$

qui valent, par le lemme 1 :

$$\frac{C\,x}{2^k \log(x2^{-k})}\; e^{2\ell_i}(1 + O(\ell^{-1/4})).$$

Or

$$e^{2\ell_1} = \log^2(x2^{-k})$$

et

$$e^{2\ell_2} = (\log(x2^{-k}) + (2+\varepsilon)\ell \log 2)^2$$
$$= \log^2(x2^{-k})(1 + O(\ell/\log x)).$$

On obtient donc :

$$S_2 = \frac{Cx}{2^k} \log(x2^{-k})(1 + O(\ell^{-1/4}))$$

et compte tenu des majorations de S_1, S_3, S_4, cela démontre le théorème lorsque $(2+\varepsilon)\ell \le k \le \log x$.

IV. DEMONSTRATION DU THEOREME LORSQUE $k > \log x$.

On observe d'abord que, si $n \in \mathcal{N}(x,k)$, et si l'on écrit $n = 2^a n'$ avec n' impair (ce qui entraîne $\Omega(n') \le (\log n')/\log 3$), on a, lorsque $k > \log x$:

$$k = a + \Omega(n') \le a + (\log n')/\log 3 \le a + \log(x/2^a)/\log 3$$

ce qui implique :

$$a > (k \log 3 - \log x)/\log(3/2)$$

et donc $a \ge a_0$, en posant :

$$a_0 = [(k \log 3 - \log x)/\log(3/2)]$$

où $[u]$ désigne la partie entière de u. On a donc :

$$a_0 = ((k \log 3 - \log x)/\log(3/2)) - \theta$$

avec $0 \le \theta < 1$. Tous les éléments de $\mathcal{N}(x,k)$ sont donc multiples de 2^{a_0}, et l'on a :

(8) $$N(x,k) = N(x2^{-a_0}, k - a_0).$$

On veut appliquer le résultat du paragraphe précédent au membre de droite de (8). On doit donc vérifier :

$$(9)\qquad k - a_0 \le \log(x2^{-a_0})$$

et

$$(10)\qquad (2+\varepsilon)\log\log(x2^{-a_0}) \le k - a_0.$$

Soit λ un nombre réel. On a :

$$(11)\qquad \lambda \log(x2^{-a_0}) - (k-a_0) = \frac{\lambda \log 3-1}{\log(3/2)} (\log x - k \log 2) - \theta(1-\lambda \log 2).$$

En choisissant $\lambda = 1$ et si $k \le (\log x)/(\log 2) - 2$, on constate que le deuxième membre de (11) est positif ce qui entraîne (9). En choisissant $\lambda = 1/\log 3$, le deuxième membre de (11) est maintenant négatif et l'on a :

$$k - a_0 \ge \frac{1}{\log 3} \log(x2^{-a_0}) \ge 3 \log\log(x2^{-a_0}),$$

cette dernière inégalité ayant lieu si $\log(x2^{-a_0}) \ge 6$. Or comme

$$(12)\qquad \log x - a_0\log 2 = \frac{\log 3}{\log(3/2)}(\log x - k\log 2) + \theta \log 2$$

$$\ge \frac{(\log 2)(\log 3)}{\log(3/2)} \left(\frac{\log x}{\log 2} - k\right),$$

on a $\log(x2^{-a_0}) \ge 6$ dès que $k \le \frac{\log x}{\log 2} - 4$, et cela entraîne (10), car on peut se limiter dans le théorème à $\varepsilon \le 1$.

Nous avons démontré au paragraphe III, pour $\varepsilon > 0$, l'existence d'une constante K_ε telle que, pour $x \ge 3$ et k vérifiant $(2+\varepsilon)\ell \le k \le \log x$, on ait :

$$|N(x,k) - Cx2^{-k} \log(x2^{-k})| \le K_\varepsilon \frac{x2^{-k}\log(x2^{-k})}{(\log\log(3x\cdot 2^{-k}))^{1/4}}.$$

On applique cette formule au membre de droite de (8) et on constate qu'elle est encore valable pour $k \le (\log x)/(\log 2) - 4$, puisque la quantité $x2^{-k}$ ne change pas quand on remplace x par $x2^{-a_0}$ et k par $k-a_0$. Enfin, lorsque

$$\frac{\log x}{\log 2} - 4 < k < \frac{\log x}{\log 2} - \eta,$$

(8) et (12) montrent que $N(x,k)$ est borné, et $x2^{-k}$ aussi, et le théorème est démontré en augmentant éventuellement la constante K_ε.

Remarques. L'exposant 1/4 qui figure dans le terme de reste du théorème peut être remplacé par tout nombre $< 1/2$. D'autre part la méthode de Selberg permet d'obtenir un reste meilleur si on se limite à $k \le B\ell$. Rappelons que cette méthode consiste à écrire dans (1) :

$$F(z) = \frac{C}{2-z} + G(z)$$

avec G holomorphe dans le disque $|z| < 3$, et à écrire $N(x,k)$ comme une somme de 3 termes, dont le premier est le coefficient de z^k dans

$$x\, z\, \frac{C}{2-z} (\log x)^{z-1}$$

et vaut donc :

$$\frac{Cx}{2^k \log x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2\ell)^j}{j!} .$$

Le deuxième s'évalue en appliquant le lemme 3 à la fonction G, et le troisième se majore par l'inégalité de Cauchy, comme dans la proposition 1. On peut ainsi prouver que :

PROPOSITION 2. *Pour tout* $r > 2$, *et* $B > r$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* k *vérifiant* $r\ell \leq k \leq B\ell$, *on ait :*

$$N(x,k) = C(x \log x) 2^{-k}(1 + O(\log x)^{-\delta}).$$

Pour $2 < r \leq 3$ *on peut choisir pour* δ *n'importe quelle valeur vérifiant* $\delta < 2 + r(\log r - \log 2 - 1)$. *Pour* $3 < r < \frac{2}{\log 3/2} = 4{,}93$ *on peut choisir* $\delta < r \log(3/2) - 1$; *pour* $r > \frac{2}{\log 3/2}$, *on peut choisir* $\delta < 1$.

REFERENCES

[Del] H. DELANGE. Sur des formules de Atle Selberg. Acta Arithmetica, XIX 1971, p. 105-146.

[Ell] P.D.T.A. ELLIOTT. Probabilistic number theory I et II. Springer Verlag 1980, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, n° 239-240.

[Erd] P. ERDÖS. On the integers having exactly K prime factors. Ann. of Math. (2), 49, 1948, p. 53-66.

[Hal] H. HALBERSTAM and K.F. ROTH. Sequences. Oxford 1966.

[Kol] G. KOLESNIK and E.G. STRAUSS. On the distribution of integers with a given number of prime factors. Acta Arithmetica, 37, 1980, p. 181-199.

[Lan] E. LANDAU. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Chelsea Publishing Company, 1953.

[Nic] P. ERDÖS et J.L. NICOLAS. Sur la fonction : nombre de facteurs premiers de n. L'Enseignement Mathématique, t. 27, 1981, p. 3-27.

[Nor 1] K.K. NORTON. On the number of restricted prime factors of an integer. I, Illinois J. Math. 20, 1976, p. 681-705.

[Nor 3] K.K. NORTON. On the number of restricted prime factors of an integer. III, à paraître à l'Enseignement Mathématique.

[Ram] S. RAMANUJAN. Collected Papers. Chelsea publishing Company, 1962.

[Sar] P. ERDÖS and A. SARKÖZY. On the number of prime factors of integers. Acta Sci. Math. 42, 1980, p. 237-246.

[Sat] L. G. SATHE. On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. J. Indian Math. Soc. 17, 1953, p. 63-141 ; 18, 1954 ; p. 27-81.

[Sel] A. SELBERG. Note on a paper by L.G. SATHE. J. Indian Math. Soc. 18, 1954, p. 83-87.

J.L. NICOLAS
Département de Mathématiques
Université de Limoges
123, Avenue Albert Thomas

87060 LIMOGES Cedex