PETITES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

ET HYPOTHESE DE RIEMANN

J.-L. NICOLAS

I. Introduction.

Soit $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1-1/p)$ la fonction d'Euler. L'ordre maximum de la fonction $n/\varphi(n)$ est connu depuis Landau, qui en 1903 a démontré :

Théorème 1.

$$\overline{\lim} \frac{n}{\varphi(n) \log \log n} = e^{\gamma}$$

où γ est la constante d'Euler.

La démonstration du théorème 1 est essentiellement basée sur la formule de Mertens

$$\prod_{p \leqslant x} (1-1/p) \sim e^{-\gamma}/\log x .$$

Nous allons donner du théorème 1 une démonstration un peu plus simple que la démonstration classique, (cf. [Lan], [Har], ch. XXII, [Par], p. 24), et qui met en évidence le fait que les nombres hautement composés pour la fonction $n/\varphi(n)$ sont les nombres $N_k = 2 \ldots p_k$, produit des k premiers nombres premiers ; ce qui veut dire que ces nombres N_k sont caractérisés par la propriété

$$n < N_k \Longrightarrow n/\varphi(n) < N_k/\varphi(N_k) .$$

Pour démontrer cette propriété on observe d'abord que la suite $N_k/\varphi(N_k)$ est croissante en k. Ensuite soit $N_{k-1} \leqslant n < N_k$, et soit $n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_j^{\alpha_j}$ la décomposition en facteurs premiers de n, avec $q_1 < q_2 < \ldots < q_j$. On a $q_i \geqslant p_i$ et si $j \geqslant k$, cela entrainerait $n \geqslant N_k$. On a donc $j < k$ et

$$(1) \quad n/\varphi(n) = \prod_{i=1}^{j} (1-1/q_i)^{-1} \leqslant \prod_{i=1}^{k-1} (1-1/p_i)^{-1} \leqslant N_{k-1}/\varphi(N_{k-1}) .$$

On achève alors la démonstration du théorème 1 de la façon suivante : soit n vérifiant $N_{k-1} \leqslant n < N_k$, on a :

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leqslant \frac{N_{k-1}}{\varphi(N_{k-1})} = \prod_{i=1}^{k-1} (1-1/p_i)^{-1} \sim e^{\gamma} \log p_{k-1} .$$

D'autre part, soit $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ la fonction de Tchebycheff. On a :

$$\log n \geqslant \log N_{k-1} = \theta(p_{k-1}) \sim p_{k-1}$$

ce qui entraîne

$$\log \log n \geqslant (1+o(1)) \log p_{k-1} .$$

Si l'on utilise la formule de Mertens avec reste (cf. [Pra])

$$\prod_{p \leqslant x} (1-1/p) = e^{-\gamma}/\log x + O(\exp(-c\sqrt{\log x}))$$

et le théorème des nombres premiers sous la forme : ([Ell], p. 141)

$$\theta(x) = x + O(x \exp(-c\sqrt{\log X}))$$

la démonstration ci-dessus permet d'obtenir une meilleure majoration de $n/\varphi(n)$ que la démonstration classique de Landau ; on obtient :

Théorème 2. On a :

$$n/\varphi(n) \leqslant e^{\gamma} \log \log n + O(\exp(-c\sqrt{\log \log n})) .$$

J.-B. ROSSER et L. SCHOENFELD ont démontré dans [Ros 62] que pour $n \geqslant 3$, on a :

(2) $$n/\varphi(n) \leqslant e^{\gamma} \log\log n + 5/(2 \log\log n)$$

excepté pour $n = 2230\,92870 = 2.3.5.7.11.13.17.19.23$ pour lequel $5/2$ doit être remplacé par $2{,}50637$. Par ailleurs avec les résultats de [Ros 75], il est possible d'expliciter la constante c et le "O" du théorème 2.

Nous démontrerons ensuite ; au paragraphe 2 :

<u>Théorème</u> 3. Il existe une infinité de n pour lesquels

$$n/\varphi(n) > e^{\gamma} \log\log n .$$

Ce théorème répond à une question posée dans [Ros 62], après l'énoncé de la formule (2).

Ce théorème peut être précisé par le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 4. Soit $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ la première fonction de Tchebycheff. On définit pour $x \geqslant 2$:

$$f(x) = e^{\gamma} \log \theta(x) \prod_{p \leqslant x} (1-1/p) .$$

a) On a pour $2 \leqslant x \leqslant 10^8$, $f(x) < 1$.

b) Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) < 1$; de plus on a :

$$\underline{\lim}(\log f(x)) \sqrt{x} \log x = -2-a$$

$$\overline{\lim}(\log f(x)) \sqrt{x} \log x \leqslant -2+a$$

avec $a = 2 + \gamma - \log 4\pi = 0{,}046$.

c) Si l'hypothèse de Riemann est fausse, il existe une suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$ pour lesquelles $f(x) > 1$ et une autre suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$ pour lesquelles $f(x) < 1$. Et si l'on désigne par Θ la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction ζ de Riemann, alors, pour tout b vérifiant $1-\Theta < b < 1/2$,

on a $\log f(x) = \Omega_{\pm}(x^{-b})$, c'est-à-dire $\overline{\lim}\, x^{b} \log f(x) > 0$ et $\underline{\lim}\, x^{b} \log f(x) < 0$.

On trouvera la démonstration du théorème 4 dans [Nic].

<u>Corollaire</u> 1. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a pour tout $k \geqslant 1$:

(2) $$N_k/\varphi(N_k) > e^{\gamma} \log\log N_k .$$

Si l'hypothèse de Riemann est fausse, il existe une infinité de k pour lesquels (2) est vraie et une infinité de k pour lesquels (2) est faux.

La démonstration du corollaire 1 résulte de ce que pour $p_k \leqslant x < p_{k+1}$, on a

(3) $$f(x) = e^{\gamma} \log\log N_k \left(\frac{\varphi(N_k)}{N_k}\right) .$$

<u>Corollaire</u> 2. Sous l'hypothèse de Riemann, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_o tel que, pour $n > n_o$ on ait :

$$n/\varphi(n) \leqslant e^{\gamma}\left(\log\log n + \frac{2+a+\varepsilon}{\sqrt{\log n}}\right)$$

et il existe une infinité de n vérifiant

$$n/\varphi(n) \geqslant e^{\gamma}\left(\log\log n + \frac{2-a-\varepsilon}{\sqrt{\log n}}\right) .$$

<u>Démonstration</u>. Soit k tel que $N_k \leqslant n < N_{k+1}$, on a d'après (1)

$$n/\varphi(n) - e^{\gamma} \log\log n \leqslant N_k/\varphi(N_k) - e^{\gamma} \log\log N_k$$
$$= e^{\gamma} \log\log N_k \left(\frac{1}{f(p_k)} - 1\right) .$$

Le théorème 4 donne alors le résultat en observant que $\log n \sim \log N_k \sim p_k$.

<u>Théorème</u> 5. La suite

$$f(p_k) = e^{\gamma} \log\log N_k \frac{\varphi(N_k)}{N_k}$$

n'est monotone sur aucun invervalle $[k_o, +\infty[$.

La démonstration du théorème 5 fera l'objet du paragraphe III.

II. Démonstration du théorème 3.

D'après la relation (3), il suffit de démontrer qu'il existe une suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$ pour lesquelles $f(x) < 1$.

Proposition 1. On pose $S(x) = \theta(x)-x$ et

$$K(x) = \int_x^{\infty} \frac{S(t)}{t^2} \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t}\right)dt .$$

On a, pour tout $x \geqslant 3$,

$$\log f(x) \leqslant K(x) + 1/(2(x-1)) .$$

Démonstration. L'intégrale définissant $K(x)$ est convergente, puisque, d'après le théorème des nombres premiers, $S(x) = O(x/\log x)$. On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction $t \longrightarrow \log\log t$ entre les points x et $\theta(x)$. La dérivée seconde est négative. On obtient :

$$\log\log\theta(x) \leqslant \log\log x + S(x)/(x\log x) , \quad x \geqslant 3 .$$

Il vient ensuite :

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \int_{2^-}^{x} \frac{d[\theta(t)]}{t\log t} = \frac{\theta(x)}{x\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)(\log t+1)}{t^2\log^2 t}$$

$$= \frac{S(x)}{x\log x} + \log\log x + B_1 - K(x)$$

en posant $B_1 = \dfrac{1}{\log 2} - \log\log 2 + K(2)$.

En comparant avec la formule classique (cf. [Har], ch. 22)

$$\sum_{p\leqslant x} 1/p = \log\log x + B_1 + o(1)$$

on sait que

$$B_1 = \gamma + \sum_p (\log(1-1/p) + 1/p) .$$

On définit

$$U(x) = \log\log\theta(x) - \sum_{p\leqslant x} 1/p + B_1 .$$

On a d'une part : $U(x) \leqslant K(x)$, et d'autre part :

$$\log F(x) = U(x) + u(x)$$

avec

$$u(x) = \sum_{p\leqslant x} \log(1-1/p) + \sum_{p\leqslant x} 1/p + \gamma - B_1$$

$$= -\sum_{p>x} (1/p + \log(1-1/p)) .$$

La proposition 1 se déduit alors de la majoration de $u(x)$:

$$u(x) \leqslant \sum_{p>x} \frac{1}{2p^2}(1 + 1/p + 1/p^2 + \ldots)$$

$$\leqslant \sum_{p>x} \frac{1}{2p(p-1)} \leqslant \sum_{n>x} \frac{1}{2n(n-1)} \leqslant \frac{1}{2(x-1)} .$$

On observe ensuite, qu'en posant $R(x) = \Psi(x)-x$ où $\Psi(x) = \sum_{p^m\leqslant x} \log p$ est la deuxième fonction de Tchebycheff, on a $K(x) = J(x) - L(x)$, avec

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t^2} \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t}\right)dt$$

et

$$L(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\Psi(t)-\theta(t)}{t^2} \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t}\right)dt .$$

Comme la fonction $\Psi-\theta$ est croissante, on a

$$L(x) \geqslant (\Psi(x)-\theta(x)) \int_x^{\infty} d\left(\frac{-1}{t\log t}\right) \geqslant \frac{\theta(\sqrt{x})}{x\log x} .$$

On a donc, pour x assez grand $L(x) \geqslant 1/(2(x-1))$ et d'après la proposition 1,

$$\log f(x) \leqslant J(x)$$

pour x assez grand. Le théorème 3 résulte alors de :

<u>Proposition</u> 2. Pour tout $x_o \geqslant 2$, la fonction J change de signe dans l'intervalle $[x_o, +\infty[$.

La démonstration de la proposition 2 repose sur le lemme suivant, dû à Landau :

<u>Lemme</u> 1 (cf. [Ing] ou [Ell] ou [Wid]). Soit $h : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit

$$H(s) = \int_1^\infty \frac{h(x)}{x^s}\, dx$$

la transformée de Mellin de h . Soit σ_o l'abscisse de convergence de $H(s)$; on sait que $H(s)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\ s > \sigma_o$. S'il existe $x_o \geqslant 1$, tel que pour $x \geqslant x_o$ $h(x)$ soit de signe constant, alors la fonction $H(s)$ ne peut pas se prolonger en une fonction holomorphe au voisinage de $s = \sigma_o$.

On va appliquer ce lemme avec $h(x) = J(x)$ si $x \geqslant 2$ et $h(x) = 0$ pour $1 \leqslant x < 2$. On pose, pour $\mathrm{Re}\ s > 1$:

$$G(s) = \int_2^\infty \frac{J(x)}{x^s}\, dx .$$

En intégrant par parties, on obtient

$$(4) \qquad G(s) = \frac{1}{s-1}\left(2^{1-s} J(2) - \int_2^\infty \frac{R(t)}{t^{s+1}} \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t}\right) dt\right)$$

et l'expression dans la parenthèse s'annule pour $s = 1$.

Du résultat classique (cf. [Ing] p. 18) :

$$\int_1^\infty \frac{\Psi(t)}{t^{s+1}}\, dt = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \qquad \mathrm{Re}\ s > 1$$

on déduit :

$$\int_2^\infty \frac{R(t)}{t^{s+1}}\, dt = \int_2^\infty \frac{\Psi(t)}{t^{s+1}}\, dt - \int_1^\infty \frac{dt}{t^s} + \int_1^2 \frac{dt}{t^s} .$$

La troisième intégrale est une fonction entière $E_1(s)$: on peut soit appliquer le théorème de dérivation d'une fonction

définie par une intégrale, soit observer que l'abscisse de convergence de cette transformée de Mellin particulière est $-\infty$. Et l'on a :

$$(5) \qquad \int_2^\infty \frac{R(t)}{t^{s+1}}\, dt = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} + E_1(s) \qquad \mathrm{Re}\ s > 1 .$$

On sait à partir de la relation

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + \dots$$

que la fonction ζ n'a pas de zéros sur l'axe réel, $0 < s < 1$ et donc aussi dans un ouvert simplement connexe

$$W = \{s\ ;\ \mathrm{Re}\ s > 1\} \cup \{s\ ;\ 0 < \mathrm{Re}\ s \leqslant 1 \ \text{ et } \ |\mathrm{Im}\ s| < \delta\}$$

pour un certain δ (les calculs des zéros de la fonction ζ autorisent $\delta = 14$). Le 2e membre de (5) est holomorphe au voisinage de $s = 1$ et dans W , et donc admet dans W une primitive $G_1(s)$ et une primitive seconde $G_2(s)$.

On a donc :

$$\int_2^\infty \frac{R(t)}{t^{s+1}} \frac{1}{\log t}\, dt = -G_1(s) + \lambda \qquad \mathrm{Re}\ s > 1$$

et

$$\int_2^\infty \frac{R(t)}{t^{s+1}} \frac{1}{\log^2 t}\, dt = G_2(s) + \lambda s + \mu \qquad \mathrm{Re}\ s > 1$$

La formule (4) devient alors :

$$(6) \qquad G(s) = \frac{1}{s-1}(G_1(s) - G_2(s) + E_2(s)) , \qquad \mathrm{Re}\ s > 1$$

où $E_2(s)$ est une fonction entière de s . La parenthèse est une fonction holomorphe dans W , nulle en $s = 1$, donc le second membre de (6) est holomorphe dans W , et $G(s)$ se prolonge en une fonction sans singularité pour $0 < s \leqslant 1$.

Si $J(x)$ gardait un signe constant pour x assez grand, le lemme 1 nous dirait que l'abscisse de convergence σ_o de $G(s)$ vérifierait $\sigma_o \leqslant 0$ et donc $G(s)$ se prolongerait en une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}\ s > 0$. Or ceci est impossible, car (6) entrainerait que $G_1(s) - G_2(s)$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\ s > 0$, et aussi $G_1''(s) - G_2''(s)$. Et au voisinage d'un zéro ρ de multiplicite m de la fonction ζ , on a :

$$G_2''(s) \sim -\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \sim -\frac{1}{\rho}\frac{m}{s-\rho}$$

et

$$G_1''(s) \sim \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \sim \frac{m}{\rho(s-\rho)^2}$$

et $G_1''-G_2''$ aurait un pôle d'ordre 2 en $s=\rho$. On sait par ailleurs que la fonction ζ a des zéros de partie réelle 1/2 .

III. Démonstration du théorème 5.

Lemme 2. Il existe une infinité de valeurs de k pour lesquelles on a : $\theta(p_k) < p_k$.

Démonstration. On sait d'après Littlewood (cf. [Ell], p. 200) qu'il existe une suite de valeurs de x tendant vers l'infini pour lesquelles on a :

$$\theta(x) < x-\sqrt{x} .$$

Pour un tel x , on définit p_k par $p_{k-1} < x \leqslant p_k$. On a :

$$p_k - \theta(p_k) = (p_k - \log p_k) - \theta(x) \geqslant x - \log x - (x-\sqrt{x}) > 0$$

pour x assez grand.

Lemme 3. Il existe une infinité de valeurs de k pour lesquelles on a : $\theta(p_k) > p_{k+1}$.

Démonstration. Littlewood a également démontré qu'il existe une suite de valeurs de x tendant vers l'infini pour lesquelles on a :

$$\theta(x) > x+\sqrt{x} .$$

Pour un tel x , on définit k par $p_{k+1} \leqslant x < p_{k+2}$. On a :

$$\theta(p_k) - p_{k+1} = \theta(x) - \log p_{k+1} - p_{k+1} > \sqrt{x} - \log x > 0 .$$

Démontrons maintenant le théorème 5. On a :

$$f(p_{k+1}) - f(p_k) = e^{\gamma} \prod_{p \leqslant p_k} (1-1/p)\, A_k$$

avec :

$$A_k = \log \theta(p_{k+1})(1-1/p_{k+1}) - \log \theta(p_k) .$$

Supposons d'abord $\theta(p_{k+1}) < p_{k+1}$. On a :

$$\begin{aligned} \log \theta(p_k) &= \log(\theta(p_{k+1}) - \log p_{k+1}) \\ &< \log \theta(p_{k+1}) - \frac{\log p_{k+1}}{\theta(p_{k+1})} \\ &= \log \theta(p_{k+1})\left(1 - \frac{\log p_{k+1}}{\theta(p_{k+1})\log \theta(p_{k+1})}\right) \\ &\leqslant \log \theta(p_{k+1})\left(1 - \frac{1}{p_{k+1}}\right) \end{aligned}$$

en utilisant la croissance de la fonction $u \longmapsto u \log u$. Ce qui nous donne $A_k > 0$, c'est-à-dire $f(p_{k+1}) > f(p_k)$. Observons ici, que d'après Rosser et Schoenfeld (cf. [SCH], p. 360), on a $\theta(x) < x$ pour $x \leqslant 10^{11}$. Ceci entraîne que $f(x)$ est croissante pour $x \leqslant 10^{11}$.

Supposons maintenant $\theta(p_k) > p_{k+1}$. On a alors

$$\log \theta(p_{k+1}) - \log \theta(p_k) = \log\left(1 + \frac{\log p_{k+1}}{\theta(p_k)}\right)$$
$$\leqslant \frac{\log p_{k+1}}{\theta(p_k)} < \frac{\log \theta(p_k)}{p_{k+1}} < \frac{\log \theta(p_{k+1})}{p_{k+1}}$$

ce qui entraîne $A_k < 0$, c'est-à-dire $f(p_{k+1}) < f(p_k)$.

Bibliographie

[Ala] ALAOGLU (L) and ERDÖS (P).- On highly composite and similar numbers. Trans. Amer. Math. Soc. t. 56 (1944), p. 448-469.

[Edw] EDWARDS (H.M).- Riemann's zeta function. Academic Press, New-York and London 1974.

[Ell] ELLISON (W.J) et MENDES-FRANCE (M). Les nombres premiers. Hermann, Paris 1975. Actualités Scientifiques et Industrielles n° 1366.

[Gro] GROSSWALD (E.).- Oscillation theorems of arithmetical functions. Trans. Amer. Math. Soc. t. 126, n° 1 (1967), p. 1-28.

[Har] HARDY (G.H) and WRIGHT (E.M).- An introduction to the theory of numbers. 4th edition. Oxford, The Clarendon Press 1960.

[Ing] INGHAM (A.E).- The distribution of prime numbers. Cambridge tracts in Mathematics and Mathematical Physics. N° 30 (1932), reprinted by Hafner, New-York, 1964.

[Lan] LANDAU (E).- Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig und Berlin, B.G. Teubner 1909.

[Nic] NICOLAS (J.L).- Petites valeurs de la fonction d'Euler. A paraître, Journal of Number Theory.

[Par] PARENT (D.P).- Exercices de théorie des nombres. Gauthier-Villars. Paris 1978, Collection μ.

[Pra] PRACHAR (K.).- Primizahlverteilung. Berlin, Springer Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen wissenschaft, 91).

[Rob] ROBIN (G).- Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann (à paraître).

[Ros 62] ROSSER (J.B) and SCHOENFELD (L).- Approximate formulas for fome functions of prime numbers. Ill. J. of Maths 6 (1962), p. 64-94.

[Ros 75] ROSSER (J.B) and SCHOENFELD (L).- Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. Math. of Comp. 29, n° 129 (1975), p. 243-269.

[Sch] SCHOENFELD (L.).- Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II. Math. of Comp. 30, n° 134 (1976), p. 337-360.

[Wid] WIDDER (D.V).- The Laplace transform. Princeton University Press, 1946.