Les nombres de nombres premiers

Le calcul de grandes valeurs de la fonction $\pi(x)$.

x	$\pi(x)$	$Li(x) - \pi(x)$	$R(x) - \pi(x)$
1.10^{15}	29 844 570 422 669	1 052 619	73 218
2.10^{15}	58 478 215 681 891	1 317 791	–37 631
3.10^{15}	86 688 602 810 119	1 872 580	+ 233 047
4.10^{15}	114 630 988 904 000	1 364 039	–512 689
5.10^{15}	142 377 417 196 364	2 277 608	+ 193 397
6.10^{15}	169 969 662 554 551	1 886 041	–384 694
7.10^{15}	197 434 994 078 331	1 297 328	–144 134
8.10^{15}	224 792 606 318 600	2 727 671	+127 929
9.10^{15}	252 056 733 453 928	1 956 031	–791 857
1.10^{16}	279 238 341 033 925	3 214 632	327 052
2.10^{16}	547 863 431 950 008	3 776 488	–225 875
3.10^{16}	812 760 276 789 503	4 651 601	–193 899
4.10^{16}	1 075 292 778 753 150	5 538 861	–10 980
5.10^{16}	1 336 094 767 763 971	6 977 890	811 655
7.10^{16}	1 853 851 099 626 620	8 225 687	997 606
10^{17}	2 623 557 157 654 233	7 956 589	–598 255
2.10^{17}	5 153 329 362 645 908	10 857 072	–1 016 134

Marc Deléglise, de l'Université Claude Bernard (Lyon 1) vient de calculer exactement le nombre de nombres premiers inférieurs à $2 . 10^{17}$ (c'est-à-dire qui s'écrivent avec au plus 18 chiffres).

Traditionnellement, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x est appelé $\pi(x)$. On sait depuis le siècle dernier que $x / \ln x$ est une première approximation de $\pi(x)$ (théorème de Hadamard et De La Vallée Poussin) et que la fonction logarithme intégral, notée Li :

$$Li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} = 0,577... + \ln(\ln x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n!n}$$

est une meilleure approximation de $\pi(x)$. Riemann a observé que $Li(x)$ est, en fait, une très bonne approximation non pas pour $\pi(x)$, mais pour $\Pi(x)$ qui compte le nombre des nombres inférieurs à x qui sont soit premiers, soit une puissance de nombre premier. Il en conjecture que la fonction :

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\zeta(n+1)} \frac{(\ln x)^n}{n!}$$

où ζ est la fonction de Riemann définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

est une approximation meilleure encore que $Li(x)$. On peut en juger sur le tableau.

Le moyen le plus simple pour compter les nombres premiers compris entre 1 et n est le crible d'Ératosthène. On écrit tous les entiers entre 2 et n. 2 est le premier nombre premier, on supprime tous les multiples de 2 ; le premier nombre non rayé est 3 ; c'est le deuxième nombre premier ; on supprime tous les multiples de 3 ; le premier nombre qui reste est 5 ; c'est le troisième non premier ; on supprime tous les multiples de 5 et on continue. Comment varie la durée de ce calcul quand n augmente?

L'essentiel du temps est passé à rayer les multiples des nombres premiers inférieurs à n, ce qui nécessite $n/2 + n/3 + ... n/p$ opérations (p étant le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n). La somme des inverses des nombres premiers jusqu'à n est équivalente à ln(ln). Le temps de calcul du crible d'Ératosthène est donc proportionnel à $n \ln(\ln n)$. On dit que le coût du crible est en $O(n \ln(\ln n))$.

Cette méthode permet de compter à la main en un temps raisonnable tous les nombres premiers jusqu'à quelques centaines, et, à l'aide d'un ordinateur, tous les nombres premiers jusqu'à quelques milliards.

La première tentative de calcul de $\pi(x)$ sans énumération de tous les nombres premiers jusqu'à x remonte à Legendre qui donne la formule suivante :

$$\pi(x) = \pi(x^{1/2}) - 1 + [x] - \sum \left[\frac{x}{p}\right] + \sum \left[\frac{x}{q_1 q_2}\right] - \sum \left[\frac{x}{q_1 q_2 q_3}\right] \dots$$

Elle fait intervenir tous les nombres primaires inférieurs à x, dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à $x^{1/2}$ (le terme $\sum [x / q_1 q_2 q_3]$ indique une somme portant sur tous les produits possibles de trois nombres premiers distincts). Exemple :

$\pi(100) = \pi(10) - 1 + 100 - 100/2 - 100/3 - 100/5 - 100/7 + 100/6 + 100/10 + 100/14 + 100/15 + 100/21 + 100/35 - 100/30 - 100/42 - 100/70 = 25$

La première amélioration sérieuse est due à l'astronome allemand Meissel qui a calculé, en 1870, $\pi(10^8) = 5\,761\,455$, et qui après 15 ans de calculs a annoncé en 1885 la valeur $\pi(10^9) = 50\,847\,478$, valeur inférieure de 56 unités à la valeur exacte 50 847 534 calculée en 1958 par D. Lehner.

L'idée de Meissel est de considérer la fonction $\Phi(x, a)$ qui compte le nombre des entiers inférieurs ou égaux à x dont tous les facteurs premiers sont plus grands que le $a^{\text{ème}}$ nombre premier p_a. En classant ces nombres selon le nombre de leurs facteurs premiers on obtient :

$\Phi(x, a) = \Phi_0(x, a) + \Phi_1(x, a) + ... + \Phi_n(x, a)...$

où $\Phi_k(x, a)$ est le nombre des n plus petits que x qui sont le produit d'exactement k facteurs premiers tous plus grands que p_a. Si p_a est plus grand que $x^{1/3}$, cette formule se réduit à :

$$\Phi(x, a) = \Phi_0(x, a) + \Phi_1(x, a) + \Phi_2(x, a)$$

En remarquant que $\Phi_1(x, a) = \pi(x) - a$, on obtient la formule de Meissel :

$$\pi(x) = \Phi(x, a) + a - 1 - \Phi_2(x, a)$$

Le calcul de $\pi(x)$ est donc ramené au calcul des deux quantités $\Phi_2(x, a)$ et $\Phi(x, a)$. Il est assez facile de voir que le calcul de $\Phi_2(x, a)$ peut se faire en un temps $O(x/p_a)$.

La partie plus difficile est le calcul de $\Phi(x, a)$. Cette fonction vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\Phi(x, a) = \Phi(x, a - 1) - \Phi(x/p_a, a - 1)$$

Le calcul d'une valeur $\Phi(x, a)$ peut se faire en exploitant jusqu'au bout de la relation de récurrence. Une autre méthode consiste à cribler l'intervalle $[1...x]$ par tous les nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_a$, c'est-à-dire à supprimer dans cet intervalle tous les multiples de l'un des a premiers nombres premiers et compter les nombres qui restent, ce qui est aussi long que le crible d'Ératosthène. Ces deux méthodes sont inefficaces, mais, en les combinant au mieux Lagarias, Miller et Odlyzko ont imaginé un algorithme de calcul de $\pi(x)$ où on peut se contenter de ne cribler que l'intervalle $[1, x^{2/3}]$ et dont le coût en temps est $O(x^{2/3+\varepsilon})$ pour tout ε positif. Et ils ont calculé, en 1985, $\pi(4.10^{16})$ qui était la plus grande valeur de $\pi(x)$ connue à ce jour.

J.-L. Nicolas et M. Deléglise ont repris la méthode de Lagarias, Miller et Odlyzko, en la modifiant légèrement et ont calculé de nouvelles valeurs de $\pi(x)$, dont la plus grande est $\pi(2.10^{17})$. Toutes ces valeurs apparaissent dans le tableau. □