

**GRANDES VALEURS D'UNE CERTAINE CLASSE
DE FONCTIONS ARITHMÉTIQUES**

par

J. L. NICOLAS

Abstract

Let $f(n)$ be a multiplicative function such that $f(p^\alpha) = g(\alpha)$ does not depend on p . This paper improves a theorem of HEPPNER about the maximal order of $f(n)$. Let us define n to be f -highly composite if $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$. Some properties of such an n are given according to the values of the function g .

§ 1. Introduction

Soit $f(n)$ une fonction arithmétique multiplicative, i.e. $(m, n) \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$. On suppose de plus que pour p premier, et $\alpha \in \mathbb{N}$, $f(p^\alpha) = g(\alpha)$ ne dépend pas de p . La fonction $d(n)$, nombre de diviseurs de n , vérifie cette hypothèse, avec $d(p^\alpha) = \alpha + 1$.

S. RAMANUJAN a démontré [7] que l'on avait pour tout N :

$$(1) \quad \log d(N) \cong \log 2 \operatorname{li}(\log N) + o(\log N \exp(-c\sqrt{\log \log N}))$$

où

$$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

désigne le logarithme intégral de x , et que l'égalité avait lieu pour une infinité de N , notamment pour les nombres hautement composés.

Plusieurs auteurs ont donné des formules ressemblant à (1), pour diverses fonctions (cf. [9], [8], [6], [5]) et E. HEPPNER [3], a démontré le résultat suivant:

THÉORÈME 1 (Heppner). *Soit f une fonction multiplicative vérifiant:*

- (i) $f(p^\alpha) = g(\alpha)$
- (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}, g(\alpha) \cong 1$ et $\exists \beta \in \mathbb{N}, g(\beta) > 1$
- (iii) $\log g(\alpha) = o\left(\frac{\alpha}{\log \alpha}\right)$.

Alors il existe A tel que, pour tout n on ait:

$$(2) \quad \log f(n) \cong \log g(A) \operatorname{li}\left(\frac{\log n}{A}\right) + O(\log n \exp(-c\sqrt{\log \log n}))$$

où c est une constante positive. L'égalité a lieu pour une infinité de valeurs de n .

1980 Mathematics Subject Classification. Primary 10H15.

Key words and phrases. Multiplicative functions, highly composite numbers.

REMARQUE. On peut avoir $0 < g(\alpha) < 1$. En imposant $g(\alpha) \geq 1$, on évite d'avoir de grandes valeurs négatives pour $\log g(\alpha)$. On notera $F(n) = \log f(n)$ et $G(\alpha) = \log g(\alpha)$.

On se propose de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. Soit f une fonction multiplicative vérifiant (i) et (ii) du Théorème 1 et de plus:

$$(iii) \quad \overline{\lim} \frac{G(\alpha)}{\alpha / \log \alpha} < t_1 \log 2 \quad \text{avec} \quad t_1 = \max_{\alpha \geq 1} G(\alpha) / \alpha.$$

Alors, si A est le plus grand α pour lequel $t_1 = G(\alpha) / \alpha$, on a pour tout n l'inégalité (2). L'égalité a lieu pour une infinité de valeurs de n .

Comme l'a montré RAMANUJAN [7], le problème des grandes valeurs d'une fonction arithmétique f est lié à celui des nombres f -hautement composés (f -h.c.) et f -hautement composés supérieurs (f -h.c.s.). On dit que n est f -h.c. si:

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n).$$

On dit que N est f -h.c.s. s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout M on ait

$$\frac{f(M)}{M^\varepsilon} \leq \frac{f(N)}{N^\varepsilon}.$$

Un tel nombre N est f -h.c.; en effet: $m < N$ entraîne

$$f(m) \leq \left(\frac{m}{N}\right)^\varepsilon f(N) < f(N).$$

Désignons par $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n et posons:

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1 \quad \text{et} \quad \Omega(n) = \sum_{p|n} v_p(n).$$

Les nombres ω -h.c. sont les nombres $2.3 \dots p_k$, produit des premiers nombres premiers consécutifs, tandis que les nombres Ω -h.c. sont les puissances de 2. Le théorème suivant montre qu'essentiellement, les fonctions qui nous intéressent se répartissent entre ces deux types.

THÉORÈME 3. Soit f une fonction multiplicative vérifiant (i) et (ii) du Théorème 1.

1° Si $\lim G(\alpha) / \alpha = 0$, il y a une infinité de nombres f -h.c.s. N .

a) Si $\overline{\lim} \frac{G(\alpha)}{\alpha / \log \alpha} < t_1 \log 2$, la fonction f est du „type ω ” et $\log N \sim AP(N)$, où $P(N)$ est le plus grand facteur premier de N . Les nombres t_1 et A ont le même sens que dans le théorème 2.

b) Si $\underline{\lim} (G(\alpha+1) - G(\alpha)) \log \alpha > t_1 \log 2$, la fonction f est du „type Ω ” et l'on a: $\log N \sim v_2(N) \log 2$.

2° Si $\overline{\lim} G(\alpha)/\alpha = +\infty$, il existe une suite r_i telle que 2^{r_i} soit f-h.c. Si, de plus, G est croissante et convexe, l'ensemble des nombres f-h.c. coïncide avec les puissances de 2.

3° Si $\overline{\lim} G(\alpha)/\alpha = C > 0$, il existe m_1 tel que pour une infinité de r , $2^r m_1$ soit f-h.c.

J'ai plaisir à remercier le rapporteur pour plusieurs remarques intéressantes et pour une démonstration plus simple du théorème 3, 3°.

§ 2. Enveloppe inférieure convexe de $\log g$ et nombres f-h.c.s

Soit dans \mathbb{R}^2 , le graphe Γ de la fonction $\alpha \mapsto \log g(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour toute droite $y = ax + b$, on définit le demi-plan inférieur fermé $P_{a,b}$. L'enveloppe inférieure convexe de Γ est l'intersection de tous les demi-plans $P_{a,b}$ contenant Γ . La frontière de cette enveloppe est une ligne polygonale.

Si l'on a $\log g(\alpha) = o(\alpha)$, il existe une enveloppe inférieure convexe. Plus précisément, on définit par récurrence la suite des sommets (s_i) et des pentes (t_i) par

$$s_0 = 0; \quad t_0 = +\infty; \quad t_1 = \max_{\alpha \geq 1} (G(\alpha)/\alpha)$$

et s_1 est le plus petit α où ce maximum est atteint. Et pour $i \geq 2$,

$$t_{i+1} = \sup_{\alpha > s_i} \frac{G(\alpha) - G(s_i)}{\alpha - s_i}.$$

Lorsque la borne supérieure est atteinte, s_{i+1} est le plus petit α tel que $t_{i+1} = \frac{G(\alpha) - G(s_i)}{\alpha - s_i}$. Si la borne supérieure n'est pas atteinte, on a $t_{i+1} = 0$ et on pose $s_{i+1} = +\infty$; il n'y a qu'un nombre fini de sommets.

On observe que la suite (t_i) est décroissante.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Le maximum de $f(n)/n^\varepsilon$ est atteint en un (ou plusieurs) points N_ε , qui sont f-h.c.s. Il est facile de voir (cf. [5]) que pour p premier, la relation

$$(3) \quad t_{k+1} < \varepsilon \log p < t_k$$

entraîne

$$v_p(N_\varepsilon) = s_k.$$

Lorsque la suite (t_i) est strictement décroissante, on peut préciser (3) de la façon suivante: Si l'on a $\varepsilon \log p = t_k$ on peut choisir $v_p(N_\varepsilon) = s_k$ ou s_{k-1} . La fonction $f(n)/n^\varepsilon$ atteint son maximum en au moins deux points.

Il est commode de poser

$$\varepsilon \log x_{s_i} = t_i; \quad x = x_{s_1} = \exp(t_1/\varepsilon)$$

ce qui donne

$$x_{s_i} = x^{t_i/t_1}.$$

On a alors:

$$\begin{aligned} &\text{pour } p < x^{t_i/t_1}, \quad v_p(N_\varepsilon) \geq s_i \\ &\text{pour } p > x^{t_i/t_1}, \quad v_p(N_\varepsilon) \leq s_{i-1} \end{aligned}$$

et

$$(4) \quad \log N_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} (s_i - s_{i-1}) \hat{\theta}(x^{t_i/t_1})$$

$$(5) \quad \log f(N_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\pi}(x^{t_i/t_1}) [G(s_i) - G(s_{i-1})]$$

avec

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{et} \quad \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

$\hat{\theta}(x)$ est égal à $\theta(x)$ si x est différent d'un nombre premier; si $x=p$, deux choix sont possibles, on prend ou on ne prend pas $\log p$. On obtient ainsi tous les points N_ε où $f(n)/n^\varepsilon$ atteint son maximum. De même pour $\hat{\pi}(x)$. S'il n'y a qu'un nombre fini de sommets (s_i) les sommes figurant dans (4) et (5) sont finies. Cela ne peut se produire que si la fonction g est bornée.

§ 3. Démonstration du théorème 2

On va supposer, pour ne pas alourdir l'écriture, que la suite t_i est strictement décroissante. On a alors $A=s_1$. En raison de la convexité, pour k assez grand, on aura:

$$t_k \leq G(s_k)/s_k \leq \frac{\eta}{\log s_k}$$

pour un η fixé, $\eta < t_1 \log 2$. Un des nombres N_ε vérifie

$$\log N_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} (s_i - s_{i-1}) \theta(x^{t_i/t_1})$$

et en raison de (3)

$$\log v_p(N_\varepsilon) \leq \frac{\eta}{\varepsilon \log p} = \frac{\eta}{t_1 \log p} \log x.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow \infty} t_i = 0$, soit K un indice tel que

$$t_K/t_1 + \eta/t_1 \log 2 < 1 - \xi$$

avec $\xi > 0$. On a alors:

$$\log N_\varepsilon = s_1 \theta(x) + \sum_{i=2}^K (s_i - s_{i-1}) \theta(x^{t_i/t_1}) + R_K.$$

Le deuxième terme est $O(x^{t_2/t_1})$. Le reste R_K vérifie:

$$R_K \leq v_2(N_\varepsilon) (\log x) x^{t_K/t_1} = O(x^{1-\xi})$$

on a donc:

$$\log N_\varepsilon = s_1 x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

On montre de même à l'aide de (5):

$$\log f(N_\varepsilon) = G(s_1) \pi(x) + O(x^{1-\xi}).$$

On en déduit la relation:

$$\log f(N_\varepsilon) = G(s_1) \operatorname{li} \left(\frac{\log N_\varepsilon}{s_1} \right) + O(\log N_\varepsilon \exp(-c\sqrt{\log \log N_\varepsilon})).$$

Soit maintenant n quelconque et N et N' deux nombres f -h.c.s. encadrant n .
On a:

$$N'/N \leq \max_p p^{v_p(N')}$$

c'est-à-dire:

$$\log N' - \log N \leq v_p(N') \log p = O(\log N')^{1-\xi} \log x.$$

On en déduit l'inégalité (2) pour tout n .

§ 4. Démonstration du théorème 3

La démonstration du 1° a) découle du paragraphe précédent. Celle du 1° b) est du même modèle. Cette fois le terme prépondérant dans N_ε , c'est la puissance de 2. On a:

$$\log N_\varepsilon = v_2(N_\varepsilon) \log 2 + O(\log N_\varepsilon)^\gamma$$

avec $\gamma < 1$. Si la fonction g est croissante, on a pour tout n

$$\log f(n) \leq G\left(\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]\right) + O(\log n)^\gamma$$

avec égalité pour une infinité de n .

Signalons un cas intermédiaire entre 1° a) et 1° b): On pose $G(1) = \frac{1}{\log 2}$ et pour α assez grand, $G(\alpha) = m \operatorname{li} \frac{\alpha}{m}$ où m est un paramètre. L'ordre maximum de $\log f(n)$ est:

$$\left(m + \frac{1}{\log 2}\right) \operatorname{li} \left(\frac{\log n}{m \log 2 + 1}\right) + O(\log n \exp(-c\sqrt{\log \log n}))$$

et l'on a:

$$\log N_\varepsilon \sim v_2(N_\varepsilon) \log 2 + P(N_\varepsilon).$$

Démonstration de 2°.

Appelons *exposant extraordinaire* un entier r tel que $\forall \alpha \leq r, G(\alpha)/\alpha \leq G(r)/r$. Si $G(\alpha)/\alpha$ n'est pas borné, il existe une infinité d'exposants extraordinaires. Montrons que pour un tel exposant r , 2^r est f -h.c.

Soit $n \leq 2^r$. On a:

$$n = 2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_k^{a_k} \leq 2^{a_1 + a_2 + \dots + a_k}$$

et donc $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq r$ avec inégalité stricte si $n \neq 2^r$. Maintenant,

$$\log f(n) = G(a_1) + \dots + G(a_k) \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{r} G(r) < G(r) = F(2^r).$$

La même démonstration montre que si $r-1$ et r sont deux exposants extraordinaires; il n'y a pas d'autres nombres f -h.c. entre 2^{r-1} et 2^r . Et si la fonction $\alpha \mapsto G(\alpha)$ est croissante et convexe, tous les exposants sont extraordinaires.

Démonstration de 3°.

Supposons que $\overline{\lim} G(\alpha)/\alpha = C$. Soit $\delta > 0$. Il existe α_0 tel que, pour $\alpha \geq \alpha_0$, on ait:

$$G(\alpha) \leq (C + \delta)\alpha$$

ce qui entraîne,

$$\forall \alpha \geq \alpha_0, \forall p \geq 3, F(p^\alpha) \leq (C + \delta) \frac{\log p^\alpha}{\log p} \leq (C + \delta) \frac{\log p^\alpha}{\log 3}.$$

On a de plus $M = \sup_{\alpha \geq 1} \frac{G(\alpha)}{\alpha} < +\infty$ et pour $\log p > \frac{M \log 3}{C + \delta}$, on a:

$$F(p^\alpha) \leq (C + \delta) \frac{\log p^\alpha}{\log 3}.$$

Il y a donc seulement un nombre fini de puissances de nombres premiers p^α vérifiant

$$F(p^\alpha) > \frac{C + \delta}{\log 3} \log p^\alpha, p \geq 3.$$

On en déduit que pour un certain $B = B(\delta)$, on a pour tout m impair:

$$F(m) \leq \frac{C + \delta}{\log 3} \log m + B.$$

Maintenant comme $\overline{\lim} G(k) - (C - \delta)k = +\infty$, il existe pour cette quantité une infinité de nombres hautement composés k vérifiant:

$$\forall j \leq k, G(j) + (C - \delta)(k - j) \leq G(k).$$

La fonction $F(n)$ atteint son maximum sur $[1, 2^k]$ en un nombre F -hautement composé $n = 2^{k-r}m$, m impair, $m \leq 2^r$. On a:

$$\begin{aligned} F(2^k) = G(k) &\leq F(n) = G(k-r) + F(m) \leq \\ &\leq G(k) - (C - \delta)r + \frac{(C + \delta) \log 2}{\log 3} r + B. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{r}{\log 3} (\delta \log 6 - C \log 3/2) + B \geq 0.$$

Si l'on choisit $\delta \leq C \frac{\log 3/2}{\log 6}$, on obtient:

$$r \leq \frac{B \log 3}{C \log 3/2 - \delta \log 6}.$$

Comme r est borné, il y a donc seulement un nombre fini de choix possibles pour m . Il y a donc un m_1 qui apparaît une infinité de fois.

On trouvera dans les comptes rendus des journées de théorie additive des nombres (mars 1977, publications mathématiques de l'Université de Bordeaux) une autre démonstration plus technique, mais donnant une construction effective de m_1 à partir des nombres f -h.c.s.

§ 5. Quelques questions

Un des problèmes difficiles qui se pose sur les grandes valeurs des fonctions arithmétiques est celui de la répartition des nombres f -h.c. Posons

$$Q_f(X) = \text{Card} \{n \leq X, n \text{ f-h.c.}\}.$$

Lorsque $f(n) = d(n) = \text{nombre de diviseurs de } n$, on sait démontrer que

$$Q_d(X) = O(\log X)^c$$

pour une certaine constante c (cf. [4]). Ce résultat a été étendu à des fonctions voisines (cf. [10]). Il semble difficile de montrer que pour toute fonction telle que $f(p^\alpha) = g(\alpha)$ on a

$$Q_f(X) = O(\log X)^c$$

avec une constante c absolue. La seule majoration que l'on connaisse est donnée par RAMANUJAN ([7], § 34) qui a étudié les nombres n vérifiant $p < q \Rightarrow v_p(n) \geq v_q(n)$. La quantité de tels nombres $\leq X$ est:

$$\exp \left(\{1 + o(1)\} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\log X}{\log \log X}} \right);$$

l'étude des grandes valeurs des fonctions arithmétiques les plus générales est moins simple. Avec $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, il existe des nombres σ -h.c.s. (cf. [1] et [2]) qui ressemblent aux nombres d -h.c.s. Mais la fonction multiplicative $n \rightarrow n$; pour laquelle tout nombre est hautement composé, ne ressemble ni à ω , ni à Ω .

RÉFÉRENCES

- [1] ALAOGU, L. et ERDŐS, P., On highly composite and similar numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **56** (1944), 448—469. MR 6—117.
- [2] ERDŐS, P. et NICOLAS, J. L., Répartition des nombres superabondants, *Bull. Soc. Math. France* **103** (1975), 65—90. MR 54 #257.
- [3] HEPPNER, E., Die maximale Ordnung Primzahl-unabhängiger multiplikativer Funktionen, *Arch. Math. (Basel)* **24** (1973), 63—66. MR 47 #8462.
- [4] NICOLAS, J. L., Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, *Canad. J. Math.* **23** (1971), 116—130. MR 43 #165.
- [5] NICOLAS, J. L., Sur les entiers N pour lesquels il y a beaucoup de groupes abéliens d'ordre N , *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **28** (1978), 1—16. MR 80b: 10063.
- [6] POSTNIKOV, A. G., *Introduction à la théorie analytique des nombres*, Izdat. „Nauka”, Moscou, 1971 (en russe). MR 55 #7895.
- [7] RAMANUJAN, S., Highly composite numbers, *Proc. London Math. Soc. (2)* **14** (1915), 347—409; *Collected papers*, Chelsea, 1927, 78—128.
- [8] SCHWARZ, W. et WIRSING, E., The maximal number of non-isomorphic abelian groups of order n , *Arch. Math. (Basel)* **24** (1973), 59—62. MR 47 #4953.
- [9] SHIU, P., The maximum orders of multiplicative functions, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **31** (1980), 247—252. MR 81i: 10059.
- [10] TRAN, T. H., Nombres hautement composés de Ramanujan généralisés, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B* **282** (1976), no. 17, A939—A942. MR 53 #7923.

(Reçu le 19 novembre 1980)

UNIVERSITÉ DE LIMOGES
U.E.R. DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
123, RUE ALBERT THOMAS
F—87060 LIMOGES Cedex
FRANCE