Symbolic Computational Methods
and Applications
Colloque de St-Maximin
Mars 1977

PROBLEMES D'OPTIMISATION NON LINEAIRE EN NOMBRES ENTIERS ET NOMBRES HAUTEMENT COMPOSES

PAR

JEAN-LOUIS NICOLAS

1) *NOMBRES HAUTEMENT COMPOSES* -

Ramanujan ([9]) dit qu'un nombre n est hautement composé (h. c.) si tout nombre m inférieur à n a strictement moins de diviseurs que n.

On peut écrire pour tout entier, sa décomposition en facteurs premiers :

$$n = 2^{x_1} 3^{x_2} \dots p_k^{x_k} \dots \quad \text{avec} \quad x_i \geq 0$$

en désignant par p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n; on a alors

$$d(n) = \prod_i (x_i + 1).$$

Pour a fixé, cherchons : $\max_{n \leq a} d(n)$. Soit n^* le plus petit entier où $d(n)$ atteint ce maximum. Le nombre n^* est hautement composé; et il est solution du problème de programmation mathématique :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \dots + x_k \log p_k + \dots \leq A = \log a \\ \max \log(x_1 + 1) + \log(x_2 + 1) + \dots + \log(x_k + 1) + \dots \end{cases}$$

On trouvera dans ([5]) un rappel des propriétés des nombres h. c., en particulier les diverses estimations de :

$Q(x) = \text{card } \{n \leq X;\ n \ \text{ h. c.}\}$.

L'idée principale est d'utiliser les méthodes d'étude des nombres h. c. pour résoudre des problèmes de programmation mathématique voisins du problème (1).

2) <u>*LES METHODES*</u> - (Voir (7) et (8))

Soit le problème

$$(2)\quad \begin{cases} g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \leq A & a_i > 0 \\ \max f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) & f_i \text{ croissante} \end{cases}$$

Les nombres h. c. nous invitent à le considérer pour tout A réel, alors que dans un problème précis, A est fixé. On dira qu'une borne A du problème (2) est *intéressante*, s'il existe une solution x_A^* du problème 2 telle que $g(x_A^*) = A$ et telle que

$$g(x) < g(x_A^*) \Longrightarrow f(x) < f(x_A^*)$$

Dans le problème 1, les bornes intéressantes sont les logarithmes des nombres h. c. . La connaissance des bornes intéressantes permet de résoudre le problème (2) pour toutes les valeurs de A.

Ramanujan a défini les nombres hautement composés supérieurs (h. c. s.). Soit $\varepsilon > 0$, on peut montrer que $\lim_{n\to\infty} d(n)/n^{\varepsilon} = 0$ et donc la fonction $d(n)/n^{\varepsilon}$ a un maximum qu'elle atteint en un (ou plusieurs) points N_ε. Il existe une infinité de tels nombres h. c. s. et ils sont tous h. c. : pour tout m on a : $\frac{d(m)}{m^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\ \varepsilon}}$ et

$$m < n \Longrightarrow d(m) \leq \left(\frac{m}{N_\varepsilon}\right)^{\varepsilon} d(N_\varepsilon) < d(N_\varepsilon).$$

Ces nombres sont très faciles à calculer : L'exposant x_k de p_k dans la décomposition en facteurs premiers de N_ε doit maximiser $(x_k + 1)/p_k^{\ \varepsilon\, x_k}$, et on trouve :

$$x_k = \left[\frac{1}{p_k^{\ \varepsilon} - 1}\right]$$

où $[u]$ désigne la partie entière de u.

Cette méthode se généralise au problème (2) (si les fonctions f_i sont concaves). On se donne ρ réel positif; pour chaque i on recherche l'abscisse x_i^* du maximum de $a_i\, x_i - \rho\, f_i(x_i)$, et

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots)$, qui maximise $f(x) - \rho\, g(x)$; est une solution du problème (2) pour une certaine borne intéressante, que l'on appelle borne de Lagrange relative à ρ. En effet, ρ joue le rôle du multiplicateur de Lagrange. Cette propriété est connue sous le nom de : " Everett's theorem " ([2] et [10] p. 42).

Malheureusement, toutes les bornes intéressantes ne sont pas des bornes de Lagrange : Pour obtenir des renseignements sur la solution x_A du problème (2) avec une borne A quelconque, on détermine la borne de Lagrange C_ρ immédiatement inférieure à A (et la solution x^* correspondante) puis une solution possible x du problème 2. Le " bénéfice " de cette solution est défini par :

$$\text{bén}(x) = f(x^*) - \rho\, g(x^*) - (f(x) - \rho\, g(x)).$$

On peut alors majorer le bénéfice de la solution exacte x_A et en déduire que pour plusieurs indices i, les composantes de x^* et x_A coïncident (cf. [8]).

3) *DES EXEMPLES* -

a) Désignons par $g(n)$ l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique S_n. On a :

$$g(n) = \max_{\sigma \in S_n} (\text{ordre de } \sigma) = \max_{n_1+n_2+\ldots+n_k=m} \text{p.p.c.m.}(n_1, \ldots, n_k)$$

$$= \max_{\ell(j) \leq n} j$$

où $\ell(n)$ est définie comme la somme des facteurs dans la décomposition en facteurs premiers de n (ainsi $\ell(315) = \ell(3^2.5.7) = 3^2 + 5 + 7 = 21$) et $\ell(1) = 0$. Le problème de calculer $g(n)$ est un problème de programmation mathématique :

$$\begin{cases} \ell(2^{x_1}) + \ell(3^{x_2}) + \ldots + \ell(p_k^{x_k}) \leq n \\ \max j = x_1 \log 2 + \ldots + x_k \log p_k \end{cases}$$

et les méthodes précédentes s'y adaptent (cf. [4]).

b) Dans son livre ([10]) T.L. Saaty pose le problème suivant : Etant donné un entier C, trouver un entier n et des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant la contrainte

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$$

et maximisant $\sum_{i=1}^{n} i \log x_i$.

Les méthodes précédentes résolvent ce problème complètement. En fait comme les coefficients de la contrainte linéaire sont tous égaux à 1, toutes les bornes intéressantes sont des bornes de Lagrange (cf. [6]).

c) Dans le livre de Hadley ([3] p. 362) un problème de stokage des pièces de rechange pour un sous-marin et traité par la programmation dynamique, revient à minimiser une fonction séparable et convexe de 3 variables soumises à une contrainte linéaire. On peut lui appliquer la méthode des bornes de Lagrange et des bénéfices (cf. [8]).

d) Etant donnés 3 nombres réels positifs a, b, c, résoudre en nombres entiers x et y positifs :

$$(3) \quad \begin{cases} a\,x + b\,y \leq c \\ \max x\,y \end{cases}$$

Lorsque $a = \log 2$ et $b = \log 3$, ce problème est lié à l'étude des nombres 2-hautement composés (2-h. c.) : Soit $\mathcal{N}_2$ l'ensemble des entiers n'ayant pas d'autres facteurs premiers que 2 et 3. On dit que n est 2-h. c. si $n \in \mathcal{N}_2$ et si pour tout m, $m \in \mathcal{N}_2$, $m < n \Rightarrow d(m) < d(n)$.

Le développement en fraction continue de b/a permet de calculer la solution du problème (3). La solution en nombre entier peut être très différente de la solution réelle : On a pour une infinité de c, (cf. [1]) :

$$|x_{\text{entier}} - x_{\text{réel}}| > \sqrt[3]{x_{\text{réel}}}$$

e) Etant donné C, trouver des entiers n et x_1, x_2, .. x_n tels que

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots\dots + n x_n \leqslant C \\ \max \log(x_1 + 1) + \log(x_2 + 1) + \dots + \log(x_n + 1) \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, G. ROBIN (Limoges) a construit un algorithme qui, en quelques minutes d'ordinateur IRIS 80, calcule les solutions pour $999000 \leqslant C \leqslant 1001000$. Il a utilisé pour cela les bornes de Lagrange et la méthode des bénéfices. De plus il obtient des propriétés théoriques des solutions.

REFERENCES

(1) *G. BESSI & J.L. NICOLAS* — Nombres 2-hautement composés.- à paraître au Journal de Math. pures et appliquées.

(2) *H. EVERETT* — Generalized Lagrange Multiplier method for solving problems of optimum allocation of ressources.- Operations Research.- 11, (1963).- p. 399-417.

(3) *G. HADLEY* — Non linear and dynamic programming.- Reading, Palo Aldo London Addison-Wesley publishing Company.- (1964) (Addison-Wesley series in management science and economics).

(4) *J.L. NICOLAS* — Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et hyghly composite numbers.- Bull. Soc. math. France, 97.- (1969) p. 129-191.

(5) *J.L. NICOLAS* — Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan.- Can. J. Maths.- vol. XXIII, n° 1.- (1971) p. 116-130.

(6) *J.L. NICOLAS* — Sur un problème d'optimisation en nombres entiers de T.L. Saaty.- R.A.I.R.O.- 9e année, (1975) vol. 2.- p. 67-82.

(7) *J.L. NICOLAS* — Problèmes d'optimisation en nombres entiers.- Astérisque 24-25.- (1975) p. 325-333.

(8) *J.L. NICOLAS* Algorithmes d'optimisaiton en nombres entiers.- Astérisque 38-39.- (1976) p. 169-182.

(9) *S. RAMANUJAN* Highly composite numbers.- Proc. London Math. Soc.-Series 2, t. 14.- (1915), p. 347-400 and Collected papers.- p. 78-128.- Cambridge at the University Press.- (1927).

(10) *T.L. SAATY* Optimization in integers and related extremal problems.- Mc Graw-Hill.- (1970).

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématiques
U.E.R. des SCIENCES
123, rue Albert Thomas
87100 - LIMOGES