

CURRICULUM VITÆ

Pascal NOBLE

Table des matières

1	État civil, adresses	2
2	Parcours universitaire	2
3	Activités de recherche (présentation synthétique)	3
3.1	Thèmes de recherche	3
3.2	Responsabilités collectives, projets financés, encadrement	3
3.3	Liste de publications	4
3.4	Liste de communications	5
3.5	Séjours à l'étranger	7
4	Activités d'enseignement	7
4.1	Fonctions exercées	7
4.2	Récapitulatif des enseignements	7
5	Activités de recherche (présentation détaillée)	9
5.1	Thème 1 : écoulements gravitaires de fluides complexes	9
5.1.1	Description du problème : contexte scientifique, objectifs	9
5.1.2	Description des résultats obtenus	10
5.1.3	Perspectives	12
5.2	Thème 2 : instabilités hydrodynamiques de surface libre (roll-waves)	14
5.2.1	Description du problème : contexte scientifique, objectifs	14
5.2.2	Description des résultats obtenus	15
5.2.3	Perspectives	17
5.3	Autres thèmes de recherche	19
5.3.1	Systemes dynamiques appliqués à la physique	19
5.3.2	Problèmes à frontières libres dans des modèles de combustion/transfert radiatif	21

1 État civil, adresses

Nom : Pascal Noble

Naissance : 26 juin 1976 à Gien (Loiret)

Situation : Marié, sans enfant

Adresse professionnelle : Institut Camille Jordan (UMR 5208 CNRS), Université Claude Bernard Lyon 1, Bâtiment Braconnier bureau 254, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France.

Téléphone : 04-72-44-80-52.

Courrier électronique : noble@math.univ-lyon1.fr

Page personnelle : <http://math.univ-lyon1.fr/~noble>

Adresse personnelle : 28 rue du Doyenné, 69005 Lyon, France

Téléphone portable : 06-65-32-72-11.

2 Parcours universitaire

fév 2005-

Maître de conférences à l'Université Lyon 1.

Habilitation à diriger des recherches de l'Université Lyon 1

Analyse d'écoulements en eaux peu profondes et stabilité de solutions périodiques pour les équations de Saint Venant et des systèmes hamiltoniens discrets

Rapporteurs : D. Lannes, M. Haragus, C.M. Dafermos, soutenue le 4 décembre 2009.

Qualifié en sections 25 (Mathématiques) et 26 (Mathématiques Appliquées)

sept 2004-jan 2005

Stage Post-Doctoral au laboratoire d'Analyse de la Vrije Universiteit d'Amsterdam (Pays Bas) avec J. Hulshof.

sept 2000-déc 2003

Thèse de doctorat de l'Université Toulouse 3

Méthodes de variétés invariantes pour les équations de Saint Venant et les systèmes hamiltoniens discrets.

Thèse dirigée par Jean-Michel Roquejoffre et Jean-Paul Vila, soutenue le 18 décembre 2003. Mention "Très honorable".

Rapporteurs : Sylvie Benzoni, Gérard Iooss.

sept 1997-août 2001

Élève à l'École Normale Supérieure de Lyon, Agrégation de Mathématiques en 2000.

3 Activités de recherche (présentation synthétique)

3.1 Thèmes de recherche

Thème 1 : Écoulements gravitaires de fluides complexes

- Modélisation : dérivation de modèles consistants de type équations de Saint Venant
- Applications : modèles de Saint Venant $2d$ pour des écoulements peu profonds de fluides newtoniens sur des topographies quelconques. Nouveaux modèles de Saint Venant $1d$ pour des fluides non newtoniens (fluides en loi de puissances, fluides de Bingham). Modèles de Saint Venant $1d$ pour l'écoulement sur un plan incliné d'une superposition de 2 fluides newtoniens
- Justification mathématique : obtention rigoureuse des équations de Saint Venant à partir des équations de Navier-Stokes.

Thème 2 : Instabilités hydrodynamiques à surface libre (roll-waves)

- Étude des équations de Saint Venant et de ses perturbations visqueuses (systèmes hyperboliques avec terme source) pour des écoulements stationnaires instables. Etude de l'équation de KdV perturbée par un terme de Kuramoto-Sivashinsky
- Stabilité (spectrale/linéaire/non linéaire) de trains d'ondes périodiques (roll-waves) solutions des équations de Saint Venant : analyse de Bloch, fonctions de Evans, estimations de fonctions de Green.
- Retour à l'équilibre et modulations : obtention et justification des équations de modulation de Whitham (analyse BKW non linéaire).

Autres thèmes de recherche

- **Systèmes dynamiques appliqués à la physique** : Etude mathématique et numérique des oscillations localisées dans des chaînes d'oscillateurs couplés non linéairement. Mappings en dimension infinie, réduction à une variété centrale, limite anticontinue, continuation analytique et numérique.
- **Problèmes à frontière libre en combustion** : étude des ondes progressives et des flammes en boule pour des modèles de combustion à chimie simple en présence de transfert radiatif : existence, stabilité, dérivation de modèles de croissance de flammes en boule.

3.2 Responsabilités collectives, projets financés, encadrement

Responsabilités collectives :

- Responsable du séminaire "Modélisation, EDP et Calcul Scientifique" commun entre l'Institut Camille Jordan (Lyon 1) et l'ENS Lyon (2006/2008).
- Membre du GDR "Équations aux dérivées partielles" (responsable : D. Lannes) et du GDR "Ruissellement et Fluides Cisailés" (responsable : C. Ruyer-Quil).
- Membre du comité d'organisation du congrès hyperbolique HYP2006, (17/21 juillet 2006, Lyon). Co organisation des journées EDP Rhône-Alpes (Nov 2007) et du GdR MOAD à Lyon (Mars 2008). Organisation d'une session "Stabilité de solutions périodiques pour les lois de conservation" de la conférence SIAM Nonlinear waves, Juillet 2008 (Rome). Réunion de lancement de l'ANR JCJC "SWEFCF" (février 2010).
- Membre des commissions de spécialistes de l'ENS Lyon (2006/2008) et de l'Université Blaise Pascal Clermont Ferrand (2006/2008), de la CSE de l'Université Lyon 1 (2008/2010).

Projets financés :

- **BQR 2006 (Lyon 1)** : “Modélisation et analyse mathématique pour les avalanches de neige, les écoulements de boue et de laves torrentielles”.
Participants : Laurent Chupin (ICJ, Université Lyon 1), Didier Bresch (LAMA, Université de Savoie). *Montant obtenu* : 5000 euros.
- **ANR JCJC (2009-2013)** : “Shallow Water Equations for Complex Fluids”.
Participants : S. Delcourte, F. Filbet, D. Le Roux, L.-M. Rodrigues (ICJ Lyon 1), J.-P. Vila (IMT Toulouse), E.-D. Fernandez-Nieto (Univ Séville). *Montant obtenu* : 80.000 euros.

Encadrements de thèse

- **Valérie Le Blanc**. *Stabilité d’ondes périodiques, Schémas numériques pour le chimiotactisme*. Thèse soutenue le 24 juin 2010. Jury : S. Benzoni, T. Goudon, P. Laurençot, F. Rousset (rapporteurs), F. Filbet, P. Noble (directeurs).
- **Amélie Rambaud**. *Approximation d’écoulements à surface libre à l’aide de modèles de Saint Venant multicouches, Schémas numériques pour la limite de relaxation dans les lois de conservations hyperboliques*. Soutenance prévue en décembre 2011.

3.3 Liste de publications

Articles parus ou acceptés

1. P. Noble, S. Travadel : *Non persistence of roll-waves under viscous perturbations*, **DCDS Serie B** 1 (2001), p. 61-70.
2. G. James, P. Noble : *Breathers on diatomic FPU chains with arbitrary masses*, **Localization and Energy Transfer in Nonlinear Systems**, L. Vázquez, R.S. MacKay, M.P. Zorzano Eds., El Escorial, World Scientific (2003).
3. P. Noble : *Existence of breathers in classical ferromagnetic lattices*, **Nonlinearity** 17 (2004), p. 1-15.
4. G. James, P. Noble : *Breathers on diatomic Fermi-Pasta-Ulam lattices*, **Physica. D** 196 (2004), no. 1-2, p. 124-171.
5. P. Noble : *Existence et stabilité de roll-waves pour les équations de Saint Venant*, **C. R. Math. Acad. Sci. Paris** 338 (2004), no. 10, p. 819-824.
6. P. Noble : *On the spectral stability of roll-waves*, **Indiana. Univ. Math. Journal** 55 no. 2 (2006).
7. P. Noble : *Existence of pulsating roll-waves for the Saint Venant equations*, **Archive for Rational Mechanics and Analysis** 186 (2007) no. 1, p. 53-76.
8. P. Noble, V. Guyonne : *On a model of flame ball with radiative transfer*, **SIAM Journal on Applied Mathematics** 67 (2007) no. 3, p. 854-869.
9. P. Noble : *Existence of small amplitude roll-waves in hyperbolic systems with source term*, paru dans **SIAM Journal on Applied Mathematics** 67 (2007) no. 4, p. 1202-1212.
10. P. Noble : *Linear Stability of viscous roll-waves*, **Communications in Partial Differential Equations** 32 (2007) no. 11, p. 1681-1713.
11. D. Bresch, P. Noble : *Mathematical justification of a shallow water model*, **Methods and Applications of Analysis** 14 (2007) no. 2, p. 87-117.

12. P. Noble, J. Hulshof : *Existence of travelling waves for combustion and hyperbolic or anisotropic radiation models*, **DCDS Serie B** 10 (2008) no. 1, p. 73 -90.
13. G. James, P. Noble : *Weak coupling limit and localized oscillations in Euclidian invariant Hamiltonian systems*, **Journal of Nonlinear Sciences** 18 (2008) no. 4, 433-461.
14. M. Boutounet, L. Chupin, P. Noble, J.-P. Vila : *Derivation of Saint Venant Models for viscous shallow water flows and arbitrary topography*, **Comm. Math. Sci.** 6 (2008) no. 1, p. 29-55.
15. G. James, P. Noble, Y. Sire : *Continuation of relative periodic orbits in a class of triatomic Hamiltonian systems*, **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire** 26 (2009), no 4, 1237-1264.
16. P. Noble : *Persistence of roll-waves for shallow water equations*, **SIAM J. Math. Anal.** 41 (2009) no. 1, p. 59-90.
17. E.D. Fernandez-Nieto, P. Noble, J.-P. Vila : *Shallow Water equations for Non Newtonian fluids*, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** 165 (2010) no. 13-14, p. 712-732.
18. M. Johnson, K. Zumbrun, P. Noble : *Nonlinear Stability of Viscous Roll-Waves*, accepté pour publication dans **SIAM J. Math. Anal.** (2010).

Articles soumis ou en préparation
--

1. D. Bresch, P. Noble : *Rigorous derivation of viscous Shallow Water equations without surface tension*, (2010) soumis. **arXiv :1002.2621**
2. P. Noble, L.M. Rodrigues : *Whitham's equations for modulated roll-waves in shallow water equations*, (2010) soumis. **arXiv :1011.2296**
3. B. Barker, M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun : *Whitham averaged equations and modulational stability of periodic traveling waves of a hyperbolic-parabolic balance law*, (2010) soumis **arXiv :1008.4729** (Proceedings de la session 2010 du GdR EDP à Port d'Albret)
4. B. Barker, M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun : *Stability of periodic Kuramoto-Sivashinsky Waves* (2010) soumis **arXiv :1012.1733**
5. P. Noble, L.M. Rodrigues : *Modulated wave trains in a generalized Kuramoto-Sivashinsky equation*, (2010) soumis. **arXiv :1012.1733**
6. M. Boutounet, P. Noble, J.-P. Vila : *Formation of roll-waves in bilayer flows*, (2011) soumis. **hal-00567570**
7. B. Barker, M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun : *Spectral stability of periodic viscous roll-waves*, en préparation.
8. B. Barker, M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun : *Non linear modulational stability of periodic traveling-wave solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation*, en préparation.
9. E.-D. Fernandez-Nieto, P. Noble, J.-P. Vila : *Roll-waves in muds modeled by a Herschel-Bulkley law*, en préparation.

3.4 Liste de communications

1. Congrès internationaux

- Juillet 2001 : Congrès franco-américain de mathématiques (AMS/SMF), Lyon, France.
- Juillet 2002 : Workshop, Intrinsic Localized Modes and Discrete Breathers in Nonlinear lattices, El Escorial, Espagne.

- Juillet 2004 : School and Workshop on Oceanography, Lakes and River, Lisbonne, Portugal.
- Novembre 2004 : Mid Term conference of the RTN Fronts and Singularities, Leiden, Pays Bas.
- Mai 2006 : Conference on Limit problems in analysis, Lorentz Center Leiden
- Juin 2007 : Workshop Environmental problems and Shallow Water equations : efficient numerical modeling , Séville,
- Février 2008 : Workshop on Dispersive nonlinear longwave PDE's and applications in physics, WPI, Vienne.
- Juillet 2008 : SIAM Conference on Nonlinear Waves, Rome.
- Janvier 2010 : Chinese-French Institute : “Stress Tensor Effects on Fluid Mechanics”, MorningSide Center of Mathematics, Beijing.

2. Séminaires

- Avril 2002 : Séminaire du laboratoire UMPA de l'ENS Lyon.
- Septembre 2003 : Exposé au GDR EAPQ (Equations d'Amplitudes et Propriétés Qualitatives), CIRM Marseille.
- Octobre 2003 : Séminaire du laboratoire de mathématiques appliquées de Bordeaux.
- Février 2004 : Séminaire de l'équipe de Physique Mathématique de l'Institut Fourier, Grenoble.
- Avril 2004 : Séminaire du laboratoire MAPLY de l'UCB Lyon I.
- Avril 2004 : Séminaire de l'équipe d'analyse de la Vrije Universiteit, Amsterdam.
- Octobre 2004 : Séminaire du Laboratoire de Mathématiques appliquées de l'Université de Chambéry.
- Octobre 2004 : Séminaire du Laboratoire de Mathématiques appliquées de l'Université de Clermont Ferrand.
- Mars 2005 : Exposé aux Journées fluides compressibles à Grenoble.
- Mai 2005 : Exposé au Workshop de Mathématiques pour l'Océanographie :”Modèles de Nappes de Pétrole”, Calacuccia.
- Juillet 2005 : Séminaire de mathématiques appliquées de l'Université d'Heraklion.
- Novembre 2005 : Journées EDP Rhônes-Alpes à Chambéry.
- Mars 2008 : Justification rigoureuse d'un modèle de Saint Venant, séminaire équipe Mathématiques Appliquées, ENS Paris.
- Décembre 2008 : Obtention de modèles de Saint Venant pour les écoulements de fluides minces soumis à la gravité, exposé au groupe de travail “MathOcéan”, Bordeaux.
- Janvier 2009 : Dérivation of shallow water equations for thin film flows, Séminaire équipe Mathématiques Appliquées de l'Université de Séville.
- Février 2009 : “Dérivation de modèles de Saint Venant pour des fluides non Newtoniens”. Séminaire équipe Modélisation et Calcul Scientifique, Université Bordeaux 1.
- Janvier 2010 : Rigorous derivation of viscous and inviscid shallow water equations, Séminaire à l'“Academy of Mathematics and Science Systems”, Pékin.
- Février 2010 : Justification Mathématique d'un modèle de Saint Venant visqueux, Séminaire Analyse non linéaire et EDP (commun à Paris 6, Paris 7, ENS Paris).
- Mars 2010 : Obtention rigoureuse de modèles de Saint Venant visqueux et non visqueux, Session GDR DYNAMO (Rennes).
- Mars 2010 : Obtention rigoureuse de modèles de Saint Venant visqueux et non visqueux, Séminaire de l'équipe EDP et Mathématique Physique , Université Bordeaux 1.
- Octobre 2010 : Equations de Whitham et stabilité des roll-waves, 2eme session du GdR Ruissellement et Fluides Cisailés (porteur : C. Ruyer-Quil).
- Novembre 2010 : Whitham's equations for modulated wave trains solution to generalized Kuramoto Sivashinski equation, Séminaire de l'équipe EDP de l'Université d'Indiana, Bloo-

mington (USA).

- Février 2010 : Stabilité de trains d'ondes périodiques pour les équations de Saint Venant. Journées ANR MathOcean (Chambéry).

3.5 Séjours à l'étranger

- Mars-Avril 2003 : Contrat pré-doc à l'Institut Max Planck de Dresde, Allemagne (sous la responsabilité de S.Flach).
- Septembre 2004-Janvier 2005 : Stage post-doctoral au Laboratoire d'analyse de la Vrije Universiteit d'Amsterdam (dans l'équipe de J.Hulshof).
- Juin-Juillet 2005 : Invitation dans le cadre du RTN Fronts and Singularities à l'Université de Crète (Stathis Filipas).
- Janvier 2009 : séjour à l'université de Séville (2 semaines) à l'invitation de E.D. Fernandez-Nieto.
- Novembre 2010 : séjour à l'Université d'Indiana (Bloomington, USA) à l'invitation de K. Zumbrun (1 semaine).
- Avril 2010 : séjour à l'Université d'Indiana (Bloomington, USA) à l'invitation de K. Zumbrun (2 semaines).

4 Activités d'enseignement

4.1 Fonctions exercées

2000-2001. Vacations à l'Université Toulouse 1 Capitole

2001-2004. Moniteur à l'Université Paul Sabatier Toulouse 3.

Depuis février 2005. Maître de Conférence à l'Université Claude Bernard Lyon 1

Depuis janvier 2008. Membre du jury de l'Agrégation Externe de Mathématiques.

Note : Délégation CNRS (6 mois) de septembre 2008 à février 2009.

Congé de Recherche et Conversion Thématique (6mois) depuis février 2011.

4.2 Récapitulatif des enseignements

LICENCE

TD L1 maths : analyse 1er semestre (2009-2010).

Programme : \mathbb{R} , bornes supérieures et inférieures. Suites réelles. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (limite, continuité, dérivabilité). Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Équations différentielles : équations linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 à coefficients constants.

Cours L1 maths : analyse 2ème semestre (2010).

Programme : Fonctions élémentaires. Formules de Taylor. Équivalents, développements limités et asymptotiques. Application au calcul de limites. Intégrales de Riemann des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

TD L2 maths : introduction aux EDO/EDP (2010).

Programme : Résolution d'équations et de systèmes différentiels linéaires (variation de la constante, à l'aide de séries) et non linéaires. Tracé de portraits de phase, études qualitatives (pendule, modèles proies/prédateurs). Méthode de Laplace pour les edo et certaines edp (équation des ondes). Résolution d'edp (séparation de variable, changement de variable).

TD L3 maths : calcul différentiel (2007/2010).

Programme : Différentielle dans les espaces normés. Différentielles partielles. Théorème des accroissements finis et applications. Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites. Différentielles d'ordre supérieur. Fonctions de classe C^r sur un ouvert. Formules de Taylor. Extrema libres et liés. Notions de calcul des variations. Équations différentielles : problème de Cauchy ; solutions globales, solutions maximales ; portrait de phase.

TD L3 maths : calcul intégral (automne 2010).

Programme : Dénombrabilité (révisions). Algèbres et tribus. Questions d'engendrement. La tribu borélienne. Mesures positives définies sur les algèbres et sur les tribus. La mesure extérieure. Le prolongement de Lebesgue. Fonctions mesurables. Intégration des fonctions mesurables positives. Intégration des fonctions mesurables réelles. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue et ses conséquences. Mesure produit. Théorème de Fubini. Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n : théorème du changement de variables. Théorème de Radon-Nikodym.

TD L3 mécanique : analyse complexe (2005/2007).

Programme : Nombres complexes, séries de Fourier, Transformée de Fourier, Transformées de Laplace, Calcul d'intégrales à l'aide des résidus, Représentation d'écoulements potentiels de fluides.

TP matlab L3 maths : modélisation mathématique assistée par ordinateur (2005/2007).

Programme : Schémas numériques pour les équations différentielles : convergence, consistance stabilité. Schémas d'Euler explicite/implicite/Runge Kutta. Optimisation.

MASTER

Optimisation : cours/TD M1 à l'Institut de Science Financière et d'Assurance (2006/2008).

Programme : Programmation linéaire (algorithme du simplexe), Optimisation quadratique et résolution (directe ou itérative) de systèmes linéaires, Optimisation sous contrainte (multiplicateurs de Lagrange).

TD M1 Introduction aux équations différentielles (2005/2006/2007).

Programme : Problème de Cauchy : existence, unicité de solutions, solutions maximales, dépendance par rapport aux données initiales/paramètres. Equations linéaires à coefficients constants, périodiques (theorie de Floquet). Equations non linéaires autonomes : étude qualitative, flot, orbites, portraits de phase, solutions périodiques, analyse de stabilité.

Cours M1 Introduction aux équations aux dérivées partielles (2008/2009/2010).

Programme : Modélisation : du problème physique aux équations (transport, diffusion, mécanique des fluides). Equations du 1er ordre : méthode des caractéristiques, théorème de Cauchy-Kowalewsky, équation des ondes. Transformée de Fourier, convolution et résolution de l'équation de la chaleur. Méthode de Laplace et de la phase stationnaire. Solutions faibles/ C^1 par morceaux (chocs) de l'équation de Burgers.

Agrégation : option calcul scientifique (2005/2008).

Programme : programme de l'option calcul scientifique à l'agrégation externe de mathématique : edo, edp, optimisation. TP Matlab. Cours de calcul scientifique (schémas d'Euler, résolution de systèmes linéaires, calcul approché d'intégrales).

5 Activités de recherche (présentation détaillée)

Je fais ici une présentation détaillée de ma recherche : résultat obtenus, projets de recherche (ils sont précisés dans les sections perspectives). J'insiste en particulier sur deux thèmes principaux qui guident ma recherche depuis 2007 : les écoulements gravitaires de fluides complexes et les instabilités hydrodynamiques de surface libre (roll-waves). Ces deux thèmes sont au coeur de mon projet ANR Jeunes Chercheurs "Shallow Water Equations for Complex Fluids". Des contacts avancés avec le Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique de Lyon (V. Botton, F. Rousset de l'INSA de Lyon, B. Pier de l'Ecole Centrale de Lyon) ont été établis très récemment pour développer certains points du projet.

5.1 Thème 1 : écoulements gravitaires de fluides complexes

5.1.1 Description du problème : contexte scientifique, objectifs

Le système d'équations de Saint Venant (noté SV) est un modèle très répandu parmi les physiciens pour modéliser l'écoulement d'un film liquide mince sous l'action de la gravité (et éventuellement d'autres forces : tension de surface, forces de Coriolis, traction du vent).

Les applications concernent l'étude de certains phénomènes naturels : l'écoulement d'un fleuve ou d'une rivière (en particulier les épisodes de crues), les avalanches de neige dense, les coulées de boues ou de laves volcaniques. Ces équations permettent ainsi de construire des systèmes de protection efficaces (digues, paravalanches) et de déterminer des zones à risques (zones d'avalanches, zones inondables). Ce système d'équations est également utilisé dans l'industrie. L'objectif dans ce cas est de comprendre et contrôler certains écoulements de fluides minces : peintures, pâtes alimentaires, huiles, eau, métaux en fusion (applications au BTP, photographie, sidérurgie, industrie automobile).

Le modèle le plus général pour décrire un écoulement de fluide est le système des équations de Navier-Stokes (notées NS) incompressibles¹ à surface libre. Ces équations font intervenir les inconnues de vitesses : $\vec{u} = (u_H, u_V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, n = 1, 2$, une pression p et un domaine fluide $\Omega_t = \{(x, z), x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq z \leq h(x, t)\}$. Ici x désigne une variable curviligne paramétrant la surface sur laquelle a lieu l'écoulement et z la variable *verticale*. La vitesse du fluide est décomposée en une composante horizontale u_H et une composante verticale u_V . C'est un problème difficile à étudier analytiquement et numériquement et on préfère en général utilisé les équations de Saint Venant, plus simples, qui ne font intervenir que la hauteur h du fluide et la vitesse moyenne horizontale $\bar{u} = h^{-1} \int_0^h u_H(\cdot, z) dz$. On voit en particulier qu'on s'est affranchi du problème de la frontière libre.

Les équations (SV) sont obtenues à partir des équations de (NS) en faisant des hypothèses de modélisation basées sur une analyse dimensionnelle des effets physiques pertinents. On introduit en particulier :

- le paramètre d'aspect : $\varepsilon = H/L$ (rapport hauteur caractéristique/longueur d'onde caractéristique),
- le nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho U^2 / L}{\mu U / L^2}$ (rapport forces d'inerties/forces visqueuses),
- le nombre de Froude : $F^2 = \frac{\rho U^2 / L}{\rho g}$ (rapport forces d'inertie/forces de gravité).

D'autres nombres sans dimension peuvent jouer un rôle selon les situations étudiées : le nombre de Bond (rapport forces de gravité/tension de surface), nombre de Rossby (inertie/force de Coriolis). Le modèle de (SV) est utilisé comme approximation de (NS) lorsque l'écoulement est peu profond

1. C'est une hypothèse raisonnable pour les fluides qui nous intéressent

$\varepsilon \ll 1$ et le nombre de Reynolds n'est pas trop grand. Pour définir la qualité de l'approximation de (NS) par (SV), on introduit la notion de *consistance* et de *convergence*. Soit $(\vec{u}_\varepsilon, p_\varepsilon, h_\varepsilon)$ une solution exacte des équations de Navier-Stokes écrites en variables adimensionnées; $NS_\varepsilon(\vec{u}_\varepsilon, p_\varepsilon, h_\varepsilon) = 0$. On définit $\bar{u}_\varepsilon = h_\varepsilon^{-1} \int_0^{h_\varepsilon} u_{H,\varepsilon}(\cdot, z) dz$. Un modèle de Saint Venant (SV_ε) est

- consistant si $SV_\varepsilon(h_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon) = R_\varepsilon$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|R_\varepsilon\| = 0$ (pour une norme bien choisie).
- précis à l'ordre n si $\|R_\varepsilon\| = O(\varepsilon)^n$.

Pour définir la convergence d'un modèle, on choisit $(\vec{u}_\varepsilon, p_\varepsilon, h_\varepsilon)$ solution de (NS_ε) et (h, \bar{u}) solution de (SV_ε) telle que $(h_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon)|_{t=0} = (h, \bar{u})|_{t=0}$. Un modèle de Saint Venant (SV_ε) est

- convergent si $\|(h_\varepsilon - h, \bar{u}_\varepsilon - \bar{u})\| = O(\varepsilon)$.

Jusqu'à la fin des années 1990, les modèles (SV) étaient obtenus de manière heuristique et sans passer par une analyse dimensionnelle : la plupart de ces modèles étaient en général *inconsistants*. A titre d'exemple, les modèles de Saint Venant pour les écoulements de fluides Newtoniens sur un plan incliné ne prédisaient pas le seuil correct d'instabilité au delà duquel un écoulement stationnaire est instable. Les premiers modèles consistants dans ce cadre sont obtenus en 1998 (C. Ruyer Quil, modèles d'ordre 1) et 2000 (J.-F. Gerbeau, B. Perthame, modèles d'ordre 2). L'analyse de convergence de modèles a été très largement développée ces dernières années dans le but de justifier des modèles de propagation de vagues à partir des équations d'Euler incompressibles irrotationnelles : équations de Green-Naghdi, équations de Serre, équations de Saint Venant (fond horizontal). Citons, entre autres, les travaux de D. Lannes (prix Leconte de l'académie des sciences en 2010) qui justifient différents régime de propagation des vagues.

Les résultats présentés ci après concernent les écoulements de fluides complexes visqueux, obéissant à différentes lois de comportements et entraînés sur une pente sous l'effet de la gravités : à la place d'étudier différents régimes de propagation (et donc différents modèles), on étudie différentes situations mais pour un même régime d'écoulement (peu profond $\varepsilon \ll 1$).

5.1.2 Description des résultats obtenus

Modèles (SV) consistants avec (NS), d'ordre 1

1. **Obtention d'un modèle de St Venant consistant pour des topographies quelconques.**

Un premier exemple d'obtention de modèles de Saint Venant à partir des équations de Navier Stokes à surface libre pour un écoulement complexe est l'étude du cas d'une topographie "quelconque" : la plupart des modèles existants étaient obtenus soit en considérant une topographie proche d'un plan incliné (certains modèles de Savage Hutter) soit pour des topographies "quelconques" mais pour des fluides sans viscosité ou faiblement visqueux (dérivation à partir des équations d'Euler avec friction de Navier au fond : voir les travaux de Bouchut [25]). Dans le cas étudié, en collaboration avec J.-P. Vila, M. Boutounet et L. Chupin [3], nous avons considéré un fluide visqueux avec topographie quelconque : une première réduction consiste à écrire les équations dans un repère convenable adapté à la topographie et en découplant l'équation de moments correspondant aux mouvements parallèles à la surface et orthogonale à la surface d'écoulement. Dans la limite du rapport d'aspect $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient une répartition hydrostatique de la pression et un flot quasistationnaire proche d'un flot de Nusselt local. On peut alors suivre la méthode introduite par J.-P. Vila dans le cas plan et en dimension deux. On a écrit ces modèles pour un paramétrage quelconque de la surface d'écoulement et pour un paramétrage dans les coordonnées orthogonales et dite de "pente maximale". Dans ce dernier cas, on obtient un modèle quasiment $1 - d$. Cette approche permet d'obtenir les effets du à la courbure et d'écrire des modèles à une équation sur la hauteur du fluide qui peuvent être intégrés dans des

codes de calculs pour la simulation d'écoulements de fluides sur des ailes d'avion (c'est l'objet d'une partie de la thèse de M. Boutounet).

- 2. Obtention de nouveaux modèles de St Venant pour les fluides en loi de puissance et de Bingham.** Cette méthode de dérivation a également été adaptée pour décrire des écoulements peu profonds de fluides non Newtoniens [4]. L'étude porte en particulier sur les fluides en loi de puissance et de Bingham : l'analyse est proche de celle effectuée pour les fluides newtoniens, à ceci près qu'on doit cette fois tenir compte de zones dans le fluide pour lesquelles la viscosité apparente devient asymptotiquement grande. Dans le cas des fluides en loi de puissance, cette zone est asymptotiquement mince et le résultat obtenu est une généralisation du cas newtonien. Pour les fluides de Bingham, il y'a toute une zone dite "pseudo-plug" (zone en très faible déformation) de taille $O(1)$ qui induit l'apparition de nouveaux termes dans les équations de Saint Venant. On obtient d'une part des modèles de Saint Venant plus généraux, consistants avec les équations de Navier-Stokes à surface libre qui permettent de donner de nouveaux critères de stabilité pour les écoulements de fluides non newtoniens à surface libre.
- 3. Modèles de Saint Venant pour un écoulement bifluide.** C'est un travail en collaboration avec M. Boutounet et J.-P. Vila. L'objectif de cette étude est de compléter une étude de stabilité de l'écoulement d'une superposition de deux fluides newtoniens sur un plan incliné par Kliakhandler. Ce dernier a proposé une modélisation (consistante) à l'aide d'un système d'edp de type Kuramoto Sivashinky portant uniquement sur les hauteurs de fluides. Ces équations ne sont valables au plus que lorsque l'écoulement est faiblement instable. On propose des modèles de Saint Venant consistants à l'ordre 1 qui restent valables même lorsque l'écoulement stationnaire est fortement instable. On utilise ce modèle pour étudier certaines instabilités hydrodynamiques de surface libre et d'interface.

Convergence de modèles (SV)

- 1. Justification d'un modèle de St Venant non visqueux à partir des équations de Navier-Stokes.** Lorsqu'on impose une condition aux limites de type Dirichlet, on obtient ces modèles à l'aide d'une méthode introduite par J.-P. Vila pour l'obtention de modèles de shallow water à partir des équations de Navier Stokes pour un fluide Newtonien incompressible s'écoulant le long d'un plan incliné. Dans la limite du rapport d'aspect $\varepsilon = \frac{H}{L} \rightarrow 0$, le flot est quasi stationnaire et proche de la solution de base de Nusselt alors que la répartition de pression est hydrostatique. Dans cette asymptotique, on peut écrire un développement à tout ordre de la solution en fonction de la hauteur h du fluide et de ces dérivées. On peut alors injecter ce développement dans les équations de Navier Stokes moyennées en hauteur pour obtenir, après troncature, un système de type Saint Venant fermé. L'intérêt d'un tel développement asymptotique est qu'il fournit en même temps un moyen de justifier rigoureusement cette approche : c'est un travail effectué en collaboration avec D. Bresch. Le problème essentiel est d'obtenir des estimations uniformes par rapport à ε sur la solution du problème de Navier Stokes complet : on reprend dans les grandes lignes la preuve de Nishida [26] de stabilité de l'écoulement de Nusselt : réduction à un domaine fixe, régularité du problème de Stokes et estimations d'énergie. Dans l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$, on a une viscosité anisotrope. On a travaillé ici dans un domaine asymptotiquement mince pour récupérer une viscosité isotrope, la difficulté étant alors de déterminer les constantes par rapport à ε dans le problème de Stokes et les injections de Sobolev [18].

2. **Justification mathématique d'un modèle de St Venant visqueux.** Je me suis également intéressé à la dérivation de modèles de Saint Venant lorsqu'on prend en compte une condition de frottement de Navier au fond. Dans ce cas, la littérature est très abondante depuis le premier travail de Gerbeau et Perthame pour les écoulements de fluides newtoniens faiblement visqueux $2d$. Leur approche a depuis été étendue à des écoulements $3d$, des topographies quelconques [25], des écoulements multi couches [31]. La dérivation est, en général, plus simple que dans le cas d'une condition de non glissement au fond, puisque l'hypothèse de (faible) friction au fond rend le profil de vitesse est asymptotiquement plat : la vitesse "horizontale" du fluide et la vitesse moyennée en hauteur sont presque identiques, ce qui rend la procédure de fermeture des équations moyennées plus facile. Cependant, il n'existait pas, à ma connaissance de justification mathématique rigoureuse de ce type de calcul. En collaboration avec D. Bresch, j'ai obtenu un résultat de convergence des solutions des équations de Navier Stokes $3d$ à surface libre vers un système de Saint Venant *visqueux* $2d$ en l'absence de capillarité et en considérant une condition de glissement de type Navier au fond. En fait, le profil de vitesse étant asymptotiquement plat, la procédure de moyennation des équations du mouvement est inutile : on peut directement chercher un développement en série par rapport à la variable verticale du champ de vitesse et pression, solution des équations de Navier-Stokes, comme on pourrait le faire pour le problème des water waves. Le début du développement correspond à un système de St Venant visqueux. Ensuite, les effets visqueux étant prédominants, on peut obtenir une approximation à tout ordre en ε des équations de Navier-Stokes. Ensuite, pour justifier ce calcul, on compare la solution approchée et la vraie solution dans un système de *coordonnées Lagrangiennes* qui permet de fixer le domaine physique. La preuve suit ensuite une démonstration classique du caractère bien posé des équations de Navier-Stokes à surface libre, à ceci près qu'il faut d'une part établir une nouvelle inégalité de Korn en domaine mince et pour une condition de Navier au fond et d'autre part obtenir des bornes uniformes par rapport à ε pour les équations de Navier-Stokes linéarisées au voisinage d'une solution de type Saint Venant [17].

5.1.3 Perspectives

Suite aux premiers résultats obtenus sur la justification d'une asymptotique Saint Venant pour un écoulement de fluide Newtoniens sur un plan incliné et les modèles obtenus pour des topographies générales, je compte utiliser cette approche pour modéliser des écoulements de fluides "complexes" : la complexité pouvant être une rhéologie complexe (fluides à seuil, de puissance,...), la présence de plusieurs phases (écoulements bifluides) ou de prise en compte de force autre que la gravité (force de Coriolis, frottement de Coulomb). Outre la prise en compte des forces de Coriolis ou des frottements au fond pour des écoulements de fluides newtoniens sur lesquels je vais continuer à travailler avec D. Bresch, je détaille deux pistes intéressantes de modélisation : les fluides à seuil et les écoulements à plusieurs couches.

Modèles multicouches

La plupart des modèles bicouches de type Saint Venant connus ne sont pas conservatifs : d'où une difficulté aussi bien mathématique que numérique pour donner un sens aux produits non conservatifs (voir par exemple les travaux de C. Pares [29]). Une manière de donner un sens à ces termes est de considérer des perturbations visqueuses du système. Cependant, la difficulté est d'écrire des perturbations visqueuses cohérente avec la physique du problème. La méthode introduite par J.-P. Vila permet d'obtenir des modèles de Saint Venant à tout ordre, les termes visqueux étant d'ordre 1 par rapport à ε dans le cas d'une couche unique. On souhaite écrire la dérivation complète d'un modèle Saint Venant bicouche jusqu'à un ordre suffisant pour voir les termes visqueux pertinents.

Cette approche doit permettre de donner des conditions d'admissibilité de discontinuités pour les systèmes de Saint Venant hyperboliques et non conservatifs. C'est un travail en cours et mené en collaboration avec J.-P. Vila et M. Boutounet (INSA Toulouse).

Je souhaite également utiliser une approche Saint Venant multicouche pour modéliser des écoulements de fluides lorsque la profondeur de fluide n'est pas petite. L'idée principale est de couper la couche de fluide en plusieurs couches minces : cette méthode a été utilisée par Pedlovskii [30] pour modéliser des écoulements de type géostrophique (circulation des océans) en 3 dimensions avec un densité de fluide variable selon la hauteur à partir de modèles 2-d de couches de fluides de faible épaisseur et densité constante. T. Colin [28] a obtenu un résultat de convergence du modèle discret en hauteur vers le modèle $3 - d$ lorsque le nombre de couches tend vers l'infini. Le but de l'analyse est d'obtenir un résultat analogue pour avoir une approximation avec un modèle Saint Venant multicouche des équations de Navier Stokes à surface libre pour une profondeur arbitraire. Un premier modèle a été obtenu par E. Audusse [31] pour une viscosité de taille ε correspondant au rapport d'aspect du fluide. Cette dérivation présente plusieurs inconvénients : d'une part en négligeant la viscosité dans la direction transverse de l'écoulement, on obtient un système d'EDP du premier ordre qui n'est pas *hyperbolique* : on a donc peu de chances d'obtenir un résultat sur le caractère bien posé de ces équations et donc de justifier un passage à la limite $n \rightarrow \infty$ où n est le nombre de couches. D'autre part, lorsque on fait tendre formellement $n \rightarrow \infty$ dans ce modèle multi couche, on obtient les équations de boundary layer (ou équations primitives). Le point de départ de l'étude est donc de calculer une approximation multicouche des équations primitives (avec une viscosité isotrope et non celle, anisotrope, des équations primitives) dans l'approximation de Boussinesq (on se laisse ainsi un latitude sur la répartition de densité dans le fluide). On fera d'abord une dérivation formelle du modèle multicouche via une approche de type volume fini dans la direction transverse (ce qui correspond vraiment à une approche shallow water). Le fait de garder une viscosité isotrope doit nous permettre d'obtenir une bonne théorie d'existence (solutions fortes/solutions faibles) sur ce modèle et on étudiera alors la limite $n \rightarrow \infty$. On prendra en compte dans cette étude les forces de Coriolis et on écrira également une dérivation de ce modèle Saint Venant vers un modèle géostrophique multicouches (voir papier Bresch/Desjardins). Cette étude sera accompagnée de simulations numériques pour valider cette approche. Une partie de ce travail (dérivation, simulation numérique du modèle) est l'objet de la thèse de A. Rambaud (ICJ Lyon) que je coencadre F. Filbet (ICJ, Lyon). Je compte aborder la partie convergence du modèle n couches avec $n \rightarrow \infty$ vers le système de Navier Stokes (hydrostatique) avec D. Bresch.

Modèles pour des fluides à seuil

Les fluides réels possèdent une rhéologie plus complexe que celle des fluides Newtoniens : dans le but d'obtenir des modèles d'écoulements plus réalistes pour la simulation d'écoulements de type avalanches de neiges, de boues ou de laves torrentielles, on s'intéressera à l'obtention de modèle de type Saint Venant pour des fluides à seuil de type Herschel-Buckley (loi de puissance dans la zone fluide) afin de tenir compte de situations plus physiques que celles considérant les seuls fluides en loi de puissance ou de Bingham. On adaptera à ce type d'écoulements la méthode introduite par J.-P. Vila pour obtenir des équations de shallow water au voisinage d'un écoulement permanent. La caractéristique de ces écoulements est qu'il comprend une zone fluide et une zone sans déformation. Il est clair cependant que ce type d'hypothèse n'est plus valable lorsqu'on est proche du front où la hauteur du fluide s'annule. Au voisinage du front, on peut observer que toute la couche est fluide et on a besoin de mener une asymptotique différente autour du front (voir les travaux de Piau [32]) et de décrire précisément la zone de transition entre le front (entièrement fluide) et l'arrière de l'écoulement (séparé en une zone sans déformation et une zone fluide). Cette analyse

asymptotique sera accompagnée de simulations numériques sur le modèle dans différents régimes (rupture de barrage, front sec, régime d’instabilité,). C’est un travail qui est actuellement en cours et effectué en collaboration avec J.P. Vila (INSA Toulouse) et E.D. Fernandez-Nieto (Université Séville).

Enfin des contacts sont pris avec le Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique de Lyon (V. Botton, F. Rousset) pour adapter les calculs mis en place au sein du projet ANR à des situations étudiées théoriquement et expérimentalement pour d’autres classes de fluides non newtoniens dont l’analyse d’écoulements de fluides visco-élastiques. Un des objectifs est de valider à l’aide d’expériences les modèles de St Venant obtenus théoriquement au sein du projet ANR.

5.2 Thème 2 : instabilités hydrodynamiques de surface libre (roll-waves)

5.2.1 Description du problème : contexte scientifique, objectifs

Les roll-waves sont des instabilités hydrodynamiques apparaissant dans des écoulements de fluides peu profonds dans des canaux inclinés sous l’effet de la gravité et des frottements dus à la paroi. Elles ont la forme d’ondes progressives périodiques. Il est difficile d’analyser cette situation à l’aide des équations de Navier-Stokes : on sait seulement que l’écoulement stationnaire de Nusselt est instable pour les perturbations de grande longueur d’onde lorsque $Re > 5 \cotan(\theta)/6$ et sous certaines hypothèses spectrales, Nishida a démontré l’existence d’ondes progressives de petite amplitude. Cependant les travaux de Yih ne donnent qu’une information *partielle* sur le spectre et, surtout, on ne sait pas montrer le caractère bien posé des équations de Navier-Stokes lorsque l’écoulement stationnaire est instable.

Pour étudier l’apparition et la stabilité des roll-waves, on utilise un modèle de Saint Venant. A titre d’exemple, Dressler [1] a, le premier, montré l’existence de roll-waves pour le modèle :

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ (hu)_t + \left(g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} + hu^2\right)_x &= gh \sin(\theta) - c_f u^2. \end{aligned} \quad (1)$$

L’écoulement uniforme devient instable lorsque $\tan(\theta) > 4c_f$, on peut montrer l’apparition d’ondes progressives périodiques discontinues, les discontinuités vérifiant les conditions de chocs de Rankine Hugoniot et Lax [1]. Pour régulariser ces ondes, on introduit un terme de viscosité :

$$(hu)_t + \left(g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} + hu^2\right)_x = gh \sin(\theta) - c_f u^2 + \nu(hu_x)_x. \quad (2)$$

On obtient aisément l’existence d’ondes progressives de petite amplitude à l’aide d’un argument de bifurcation de Hopf. Les résultats présentés ci après répondent à certaines questions qui se posent naturellement :

Pour les roll-waves “non visqueuses”

- Convergence des roll-waves visqueuses vers les roll-waves non visqueuses de Dressler.
- Etude de la stabilité (persistance) des roll-waves discontinues : la difficulté est de formuler correctement le problème de stabilité en présence d’une infinité de chocs.

Pour les roll-waves visqueuses

- Stabilité spectrale : c’est un problème original qui a été très peu étudié dans le cadre des lois de conservation (alors que cette étude est classique pour l’opérateur de Schrodinger).
- Stabilité linéaire/non linéaire : là encore, il y’a peu de résultats dans le cadre des lois de conservation (le problème a été plus étudié pour les systèmes de réaction-diffusion).

- Equations de modulation de Whitham : ces équations décrivent les modulations basses fréquences des roll-waves. Elles sont très utiles pour simplifier l’étude de stabilité des roll-waves et décrire efficacement le comportement en temps long dans le régime d’instabilité.

Concernant la stabilité des roll-waves, on peut déjà dire, de manière heuristique, que celles issues d’une bifurcation de Hopf et celle de très grande longueur d’onde sont instables, les solutions constantes étant instables. On s’attend donc à obtenir une gamme de périodes pour lesquelles les roll-waves sont stables. Ce phénomène a été (en partie) observé pour les équations de KdV perturbées par un terme de Kuramoto-Sivashinsky :

$$\partial_t u + u \partial_x u + \partial_x^3 u + \delta(\partial_x^2 u + \partial_x^4 u) = 0,$$

et j’ai également commencé à étudier ce problème avec les outils utilisés pour traiter le cas des roll-waves des équations de Saint Venant.

L’objectif est, au final, d’obtenir l’image la plus complète possible du comportement des solutions des équations de Saint Venant lorsque l’écoulement stationnaire est instable. On espère ainsi pouvoir aborder le problème complet des équations de Navier-Stokes et ainsi montrer un résultat de convergence des équations de Saint Venant.

5.2.2 Description des résultats obtenus

Roll-waves non visqueuses

1. **Stabilité spectrale de roll-waves (thèse).** Le problème essentiel est la formulation d’un problème de stabilité en présence d’une infinité de chocs : j’ai adapté à ce cas particulier la méthode introduite par Majda [21] pour l’analyse des chocs. Dans le cas des chocs simples, on travaille dans un espace de fonctions régulières par morceaux avec une discontinuité proche de la discontinuité du choc : un simple changement de référentiel fixe alors cette discontinuité, cette dernière étant déterminée par les conditions de Rankine Hugoniot. On peut alors mener une procédure standard de linéarisation qui est la première étape de l’analyse de stabilité [2]. Dans le cas des roll-waves, on travaille dans un espace de fonctions régulières par morceaux avec des discontinuités proches de celle de la roll-wave de base et déterminées par les conditions de Rankine Hugoniot : dans ce cas, un changement de repère est insuffisant car il ne peut fixer qu’une seule discontinuité. On utilise donc un changement de variable affine par morceaux qui fixe *toutes* les discontinuités : dans ce référentiel, les roll-waves deviennent des solutions stationnaires et on peut linéariser les équations de Saint Venant, ainsi que les conditions de Rankine Hugoniot, au voisinage de ces solutions. J’ai alors montré un résultat partiel de stabilité spectrale : en dehors d’une certaine boîte autour de 0, le problème linéarisé ne possède pas de valeurs propres instables. Lorsque la pente tend vers 0, cette “boîte” de valeurs propres instables possibles devient de plus en plus petite. Du fait du caractère périodique du problème linéarisé, les vecteurs propres sont des vecteurs propres généralisés (i.e. seulement bornés en espace) [9].
2. **Pulsating roll-waves (thèse).** Suite à des discussions avec des chercheurs de l’Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (O. Thual), j’ai étudié le problème des roll-waves pour des écoulements de fluides dans des canaux inclinés non plans à fond périodiques : en utilisant la dérivation d’équations de Burgers avec terme source à partir des équations de shallow water, j’ai pu montrer l’existence de roll-waves de petite amplitude dont la vitesse de propagation oscillait autour d’une valeur moyenne (“pulsating roll-waves” en référence à la terminologie employée

pour qualifiée des ondes progressives solutions d'équations de réaction-diffusion se propageant dans un milieu périodique) [10].

3. **Existence de roll-waves pour des systèmes hyperboliques généraux.** J'ai d'abord montré l'existence de roll-waves discontinues de petite amplitude dans des systèmes hyperboliques généraux avec terme source sous différentes hypothèses de non dégénérescence, les discontinuités étant des chocs de Lax. L'existence est obtenue en faisant apparaître les roll-waves comme les zéros d'une fonction dont on peut montrer que c'est une submersion [11].
4. **Persistence de roll-waves non visqueuses.** J'ai étudié la "stabilité" non linéaire des roll-waves non-visqueuses. Du fait du caractère hyperbolique des équations de Saint Venant, des singularités peuvent se former en temps fini : dans ce cas, prouver la "stabilité" des roll-waves revient à montrer qu'au voisinage des roll-waves et pour des données initiales vérifiant certaines conditions de compatibilité, le problème de Cauchy est bien posé. En utilisant le cadre introduit pour étudier la stabilité spectrale des roll-waves, on peut montrer, en faisant un calcul de type déterminant de Lopatinskii, que les grandes valeurs propres instables du problème sont nécessairement de partie réelle bornée. On montre alors que le problème linéarisé au voisinage d'une solution "approchée" possède une solution faible unique au moyen d'estimations d'énergie et d'un argument de dualité. On peut ensuite montrer un résultat de régularité sur cette solution : le caractère bien posé du système de Saint Venant complet au voisinage des roll-waves est alors obtenu par un argument de point fixe [16].

Roll waves visqueuses

1. **Convergence des roll-waves visqueuses vers les roll-waves non visqueuses (thèse).** J'ai montré qu'en ajoutant une viscosité au système de Saint Venant "non visqueux", il existait des roll-waves visqueuses proches des roll-waves obtenues par Dressler : la preuve est basée sur des arguments de perturbations singulières dans les systèmes d'équations différentielles (existence de variété lente à l'aide des théorèmes de Fenichel et analyse de la dynamique rapide en utilisant les conditions de Rankine Hugoniot) [8].
2. **Stabilité spectrale et linéaire des roll-waves visqueuses.** Je me suis intéressé à la stabilité des roll-waves visqueuses pour un modèle de Saint Venant avec une viscosité physique. La linéarisation des équations au voisinage d'une roll-wave conduit à un problème aux valeurs propres avec coefficients périodiques : le spectre de l'opérateur n'est composé que de spectre continu et les vecteurs propres sont des vecteurs propres généralisés. En suivant la méthodologie introduite par Gardner et développée aussi bien dans le cas des systèmes de réaction diffusion (Doelman, Sanstede, Jones) que dans le cas de lois de conservation (Serre, Zumbrun), les valeurs propres sont les zéros d'une fonction de Evans dont on peut calculer le développement asymptotique au voisinage de 0 et de $+\infty$ ce qui nous permet d'obtenir des conditions nécessaires de stabilité : dans le cas des roll-waves, on peut montrer que celles ci sont stables aux perturbations hautes et basses fréquences. Sous hypothèse de stabilité spectrale, on peut alors montrer la stabilité linéaire des roll-waves. La difficulté du problème tient du fait qu'on est en présence d'un système hyperbolique avec un terme source et une viscosité physique [12].
3. **Stabilité non linéaire des roll-waves visqueuses.** Plus récemment, j'ai obtenu en collaboration avec M. Johnson et K. Zumbrun un résultat de stabilité non linéaire $1d$ sous hypothèse de stabilité spectrale [7] : l'analyse repose sur une analyse détaillée de la fonction de Green. En introduisant une modulation adéquate du profil, on parvient à éliminer le mode en translation

et à améliorer les propriétés de décroissance de la fonction de Green, ce qui permet ensuite d'obtenir un résultat de stabilité non-linéaire sur le problème complet en représentant la solution comme un point fixe d'une certaine fonctionnelle [7]. On traite la perte de dérivée dans les estimations linéaires (dûe à la présence d'une viscosité physique) en utilisant une estimation à la Kawashima (utilisation d'un symétriseur et compensation de dérivées).

4. **Obtention et validation des équations de Whitham pour les roll-waves modulées.** D. Serre a montré dans le cadre des lois de conservation le lien entre stabilité spectrale des trains d'onde périodiques et l'hyperbolicité des équations de Whitham du premier ordre donnant l'évolution des modulations basses fréquences de ces trains d'onde. En collaboration avec L.M. Rodrigues (ICJ Lyon) , j'ai adapté ce cadre de travail à l'étude de stabilité des roll-waves : le système de Whitham est alors un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre donnant l'évolution du nombre d'onde et la hauteur moyenne locale du fluide. On montre l'équivalence entre hyperbolicité de ce système et le fait que les courbes spectrales restent tangentes à l'origine (ce qui est une condition nécessaire de stabilité). Nous avons justifié mathématiquement ce système et construit des solutions proches des roll-waves existant sur des temps d'ordre $O(T/\varepsilon)$ où ε^{-1} désigne la longueur d'onde caractéristique des modulations. En fait dans le cas étudié ici, on peut aller plus loin et obtenir également un système de Whitham "visqueux" dont la parabolicité assure la stabilité spectrale aux basses fréquences. Nous avons également utilisé cette approche pour une équation de Korteweg-de Vries perturbée par un terme de type Kuramoto Sivashinsky : c'est une équation modèle pour décrire la transition vers l'instabilité dans des écoulements de fluide mince sur un plan incliné. C'est également un premier exemple de loi de conservation pour laquelle on a une gamme de trains d'onde périodiques spectralement stable.

5.2.3 Perspectives

Asymptotiques ondes longues et petite viscosité

Je souhaite d'abord poursuivre l'analyse de stabilité des roll-waves visqueuses et dans un premier temps l'analyse de la fonction de Evans. L'analyse de la fonction de Evans se concluait par l'énoncé de critères nécessaires de stabilité pour les roll-waves dont on a vérifié numériquement qu'ils étaient vérifiés. Il y'a deux asymptotiques pour lequel on peut espérer obtenir une information plus complète. D'une part le cas de la limite $L \rightarrow \infty$: dans ce cas, les ondes progressives convergent vers un soliton dont l'étude de stabilité est plus simple. On adaptera au cas "conservatif" l'analyse faite dans le cas des systèmes de réaction diffusion pour obtenir une information plus complète sur le spectre au voisinage de 0. La deuxième asymptotique intéressante est celle d'une viscosité évanescence : dans ce cas, on observe une dynamique lente/rapide et une convergence vers des roll-waves non visqueuses. On essaiera de mettre en évidence une dynamique lente/rapide sur le problème linéarisé pour faire le lien avec le problème non visqueux qui est maintenant bien connu. C'est un problème difficile qui a été abordé dans le cas des ondes de chocs pour des systèmes de lois de conservation par Métivier, Zumbrun, Williams et Gues [20]. Un premier résultat a été établi par V. Le Blanc, que je coencadre en thèse avec F. Filbet, dans le cas $1d$ et pour des solutions périodiques et contenant un nombre fixé de chocs dans un période.

Analyse des modulations ondes longues

La deuxième partie de l'analyse concerne l'analyse de stabilité non-linéaire des roll-waves vis-

queuses. Bien qu'on ait obtenu un résultat de non linéaire stabilité linéaire sous une condition de stabilité spectrale [7], on ne sait pas décrire correctement le comportement asymptotique des solutions dans ce cas. Une direction intéressante est celle de la dynamique des faibles modulations (perturbations basses fréquences). En suivant la stratégie d'homogénéisation introduite par Whitham, les variations des modulations ondes longues sont régies par un système conservatif du premier ordre dont la dimension correspond à la dimension de la variété des ondes progressives périodiques. Dans le cadre des lois de conservation, D. Serre [24] a fait le lien entre le caractère hyperbolique de ce système (et donc le caractère bien posé de ces équations) et le développement de la fonction de Evans associé au voisinage de 0. D'autre part dans le cadre des systèmes de réaction-diffusion, où la variété des solutions d'ondes progressives est de dimension 1 (due à l'invariance par translation) : dans ce cas, on obtient, dans un scaling hyperbolique, une équation de transport : la vitesse de propagation est simplement la vitesse de groupe. Dans ce cas, on peut, en introduisant un scaling diffusif (après s'être placé dans un repère en translation associé à la vitesse de groupe) obtenir une équation de Burgers visqueuse dont on connaît le comportement asymptotique. On peut montrer alors rigoureusement le lien entre le comportement asymptotique des perturbations ondes longues des ondes progressives périodiques et le système de Burgers visqueux via une méthode de type réduction à une variété centrale sur un intervalle $\mathcal{O}(T/\varepsilon^2)$ où $T > 0$ est arbitraire et ε représente l'amplitude des perturbations [27].

Travail en cours. Je travaille actuellement en collaboration avec L.M Rodrigues (ICJ Lyon) et K. Zumbrun (Indiana University) sur l'adaptation du cadre introduit par Doelman et ses coauteurs au cas des roll-waves. Nous avons déjà généralisé le travail de D. Serre en proposant un développement à *tout ordre* de solutions approchées du système de St Venant dans l'asymptotique onde longue. Ceci nous a permis d'écrire un système de Whitham *visqueux* ce qui nous donne une information plus précise sur le spectre des équations de St Venant linéarisées au voisinage d'une roll-wave. Nous avons également démontré l'hyperbolicité du système de Whitham non visqueux dans certains régimes. Ensuite l'analyse du système de Whitham visqueux (travail en cours avec K. Zumbrun) doit nous permettre de détailler la convergence vers 0 des perturbations basses fréquences. En suivant l'approche de Doelman, on espère également être capable de construire de nouvelles solutions pour les équations de St Venant de type chocs visqueux où l'on peut relier asymptotiquement 2 familles de roll-waves visqueuses. Nous pensons que notre approche doit nous permettre d'aborder le cadre plus général des solutions périodiques pour les lois de conservations. Nous travaillons également à la vérification numérique des hypothèses de stabilité spectrale des roll-waves : on a déjà pu identifier des gammes de périodes pour lesquelles les trains d'ondes sont stables. De manière heuristique, on peut justifier que les ondes solitaires sont instables car les roll-waves apparaissent lorsque toutes les solutions constantes sont instables. Cette instabilité est "faible" dans le sens où les courbes spectrales sont tangentes à l'axe imaginaire. On peut espérer construire dans ce cas des solutions proches d'une suite de solitons tronqués et persistant sur des temps grand (cette situation a été traitée en partie pour des perturbations de l'équation de Korteweg-de Vries).

Je suis en contact avec B. Pier (Ecole Centrale de Lyon) pour adapter ce type de techniques mathématiques à l'étude d'instabilités primaires et secondaires dans des couches limites tri-dimensionnelles. Là encore, il y'aura des possibilités de validation expérimentale de l'approche proposée.

Roll-waves en présence de capillarité

Un problème intéressant concerne l'analyse des roll-waves pour les équations de Saint Venant avec capillarité (avec ou sans viscosité). C'est précisément ces modèles qu'on peut justifier à partir des équations de Navier Stokes à surface libre pour des fluides s'écoulant sur un plan incliné. L'analyse du portrait de phase montre qu'en plus de solutions périodiques classiques, il existe des familles

de solutions quasi-périodiques. On rencontre également cette situation pour une équation de Kuramoto Sivashinsky perturbée par un terme KdV. Il serait intéressant d'étudier cette situation à l'aide des équations de Whitham : dans ce cas, les modulations basses fréquences possèdent deux phases [24] ce qui induit une dynamique beaucoup plus riche. Je travaille actuellement avec K. Zumbrun et L.M. Rodrigues sur le cas (plus simple) de l'équation de Kuramoto Sivashinsky sur l'analyse de stabilité des trains d'ondes périodiques (stabilité spectrale/non linéaire, équations de modulations,...).

Stabilité des roll-waves en 2d. Roll-waves pour les équations de Navier-Stokes.

Roll-waves en deux dimensions. Je souhaite également abordé le problème de la stabilité 2d des roll-waves : des observations de Liu et Gollub montre l'apparition dans certains régimes de roll-waves modulées dans la direction transverse à celle de propagation. Ce type de bifurcation a déjà été observé dans les équations de Boussinesq pour le problème des water-waves (cf les travaux de G. Iooss). Il faudrait dans un premier temps effectuer une telle analyse pour le modèle de St Venant 2d et montrer une bifurcation à partir des roll-waves planes puis en étudier la stabilité. Encore une fois, une analyse de stabilité à la Whitham devrait donner des informations intéressantes.

Roll-Waves et équations de Navier-Stokes. L'analyse de stabilité des roll-waves pour les équations est déjà un travail intéressant en soi mais on espère également obtenir plus d'information sur le problème de départ, à savoir les équations de Navier-Stokes à surface libre dans le régime d'apparition des roll-waves. En effet, le résultat d'approximation des équations de Navier-Stokes par les équations de St Venant n'est valable que lorsque le flot uniforme est *stable*. On ne sait rien dire dans le cas instable : le seul résultat connu est l'existence de roll-waves de petite amplitude pour les équations de Navier Stokes *en présence de capillarité* (travaux de Teramoto et coauteurs) mais en aucun cas cela donne un résultat de justification des équations de Navier Stokes dans ce régime d'autant plus qu'on souhaiterait se débarrasser de la capillarité. Le travail sur la description de la dynamique complète au voisinage des roll-waves pour les équations de St Venant constitue donc une première étape de la justification des équations de St Venant dans le régime d'apparition des roll-waves. Une première étape consistera d'abord à construire des roll-waves de grande amplitude solutions des équations de Navier Stokes sans capillarité grâce à un argument de perturbation.

5.3 Autres thèmes de recherche

5.3.1 Systèmes dynamiques appliqués à la physique

1. **Breathers dans des chaînes d'oscillateurs couplés non linéairement (thèse).** C'est un travail en collaboration avec G. James (INSA Toulouse, puis LJK Grenoble) : nous avons démontré l'existence de "breathers" dans des systèmes d'oscillateurs interagissant non linéairement avec leurs plus proches voisins. Le premier modèle étudié est un réseau "FPU" (Fermi-Pasta-Ulam) alternant grandes masses m_2 et petites masses m_1 . Ce système est décrit par

$$m_n \frac{d^2}{dt^2} x_n = V'(x_{n+1} - x_n) - V'(x_n - x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

où $m_{2n+1} = m_1$ et $m_{2n} = m_2$, x_n représente le déplacement par rapport à une position d'équilibre et V est un potentiel d'interaction régulier tel que $V'(0) = 0$ et $V''(0) > 0$. On peut formuler le problème sous la forme d'un mapping dans des espaces de fonctions périodiques et on utilise une technique de réduction à une variété centrale pour des mappings quasilineaires en dimension infinie (méthode introduite par G. James dans le cas mono-atomique $m_1 = m_2$

[19]). Les solutions du système linéarisé possèdent des fréquences dans une bande “acoustique” et une bande “optique” : lorsqu’on choisit une fréquence proche de ces bandes, les solutions bornées de (3) appartiennent à une variété de dimension finie ce qui réduit l’étude à celle d’un mapping en dimension finie. L’intérêt de cette méthode est qu’on possède alors une description très précise de la géométrie des breathers : c’est un point important car des études numériques sur ce type de système ont montré une forte corrélation entre la stabilité de ces oscillations et leur géométrie. Le deuxième modèle étudié est un réseau de chaînes de spins classiques ferromagnétiques avec une anisotropie locale. J’ai réalisé cette étude à l’Institut Max Planck de Dresde (à l’invitation de S. Flach) : j’ai obtenu l’existence de breathers de grande amplitude par une technique de limite anticontinue. Dans l’asymptotique où tous les oscillateurs sont découplés, on peut construire une solution breather triviale où un spin est en mouvement et les autres sont au repos : on “continue” cette solution lorsque le couplage est faible en utilisant le théorème des fonctions implicites. J’ai pu également montrer l’existence de breathers de petite amplitude pour des couplages quelconques en utilisant la technique de réduction à une variété centrale introduite par G. James [13].

2. Un cadre général pour l’existence de breathers réversibles dans des molécules confinées dans un plan.

La localisation d’énergie vibrationnelle dans des molécules simples est un phénomène qui est observé expérimentalement mais mal compris. Deux questions se posent : quelles sont les conditions d’existence de ces modes localisés (vibrations localisées au voisinage d’une liaison) et comment peut-on les exciter ? On s’est d’abord intéressé à l’existence d’oscillations périodiques localisées en espace dans une classe de systèmes Hamiltoniens plans invariants par transformations euclidiennes et composés d’un ensemble de particules en interaction. Le résultat est obtenu dans le cas de la limite “anticontinue” où les masses se séparent en deux groupes de masses distinctes (le rapport de masse tendant vers l’infini) : dans cette limite, les petites masses bougent dans un champ de potentiel créé par les masses lourdes dont la répartition est donnée par des conditions d’admissibilité. On peut alors montrer l’existence de breathers discrets réversibles en appliquant un théorème des fonctions implicites après avoir éliminé les degrés de liberté liés aux invariances euclidiennes (rotations et translation en temps et espace). C’est un travail réalisé en collaboration avec G. James [5].

3. Existence de breathers non réversibles dans un modèle de molécule triatomique.

On s’est ensuite intéressé à l’existence de solutions breathers non réversibles lorsque le théorème d’existence obtenu précédemment ne s’applique pas : on a choisi de traiter, en collaboration avec G. James et Y. Sire le cas d’une molécule triatomique composée de deux atomes lourds et une masse légère. Dans la limite anticontinue, on obtient deux familles de solutions périodiques paramétrées par ρ la distance entre les deux masses lourdes et E l’énergie du système. La première famille correspond à des modes normaux non linéaires où la molécule de petite masse oscille autour d’une position moyenne correspondant à une solution d’équilibre triangulaire. La deuxième famille est un mode dit d’inversion où la petite masse oscille de part et d’autre de la liaison entre les masses lourdes. Ces deux familles se rencontrant lorsque $T \rightarrow \infty$ (i.e. la petite masse passe de plus en plus de temps autour de l’équilibre instable où la petite masse est au milieu des deux autres). On se pose alors la question de savoir si cette famille persiste lorsque le rapport de masse $1/\varepsilon$ devient fini et si on se place dans un repère tournant à vitesse constante $\Omega \neq 0$: dans ce cas là le système n’est plus réversible. On obtient un résultat de persistance par rapport à ces deux paramètres : on montre d’abord que les solutions périodiques du système complet sont les zéros d’une fonction (qu’on pénalise de manière Hamiltonienne à la manière de la preuve du théorème du centre de Lyapounov à l’aide d’un argument de bifurcation

de Hopf) dont on montre qu'elle est une submersion pour $\varepsilon = \Omega = 0$ et au voisinage des solutions périodiques obtenues. On obtient ainsi une famille de solutions périodiques à quatre paramètres $(\rho, E, \varepsilon, \Omega)$. Nous avons implémenté numériquement cette méthode pour obtenir la continuation des solutions périodiques de base pour $\varepsilon \in (0, 1)$ et une large gamme de valeurs de Ω : les solutions obtenues sont des solutions périodiques *dans le repère en rotation*. Nous avons également étudié leur stabilité linéaire (via le spectre de Floquet) et mis en évidence dans des cas d'instabilités une dynamique de dissociation : soit les trois atomes se séparent complètement soit la petite masse se sépare du groupe des deux atomes lourds [6].

Perspectives. Concernant l'analyse des oscillations localisées dans des petites molécules, je vais continuer à travailler avec G. James (INSA Toulouse) et Y. Sire (Université Aix-Marseille) sur l'existence de breathers et leur stabilité pour obtenir plusieurs généralisations. Tout d'abord les résultats obtenus l'étaient dans un cas plan dans un repère en rotation, l'axe de rotation étant perpendiculaire au plan où le mouvement a lieu. D'une manière générale, il serait intéressant de regarder la situation pour des mouvements en 3 dimensions. On souhaite également obtenir des résultats dans le cas d'une molécule à quatre ou cinq atomes pour faire le lien avec des résultats expérimentaux (par exemple SnD4). Alors que dans le cas triatomique, les coordonnées de Jacobi permettaient une analyse simple de la situation, il faut dans ces cas introduire des systèmes de coordonnées adaptées aux problèmes permettant de séparer les variables internes du mouvement des variables "collectives". On essaiera de partir d'une limite anti-continue simple pour pouvoir faire une analyse analogue à celle du cas plan. Une des difficultés principales ici est que le groupe des transformations euclidiennes par laquelle le système est invariant est de dimension supérieure au cas plan (il contient au moins toutes les translations et les rotations de \mathbb{R}^3). Dans le cas de persistance de solutions de type breathers, on fera des simulations numériques pour obtenir des solutions dans une large gamme de paramètre et on étudiera numériquement leurs propriétés de stabilité.

5.3.2 Problèmes à frontières libres dans des modèles de combustion/transfert radiatif

A l'issue de ma thèse, j'ai effectué un stage post doctoral de six mois dans l'équipe d'analyse de la Vrije Universiteit d'Amsterdam à l'invitation de Joost Hulshof : j'ai travaillé alors sur des problèmes de combustion couplés au transfert radiatif. En collaboration avec Joost Hulshof, j'ai prouvé l'existence d'ondes progressives pour un modèle de combustion avec chimie simple et modèle de radiation type M_1 qui est un système hyperbolique avec terme source. La méthode de preuve est basée sur l'utilisation du théorème de point fixe de Schauder : on formule d'abord le problème sur un intervalle borné $[-L, L]$ sur lequel on peut appliquer le théorème. Le point fixe obtenu vérifie des estimations uniformes par rapport à L et on peut alors passer à la limite $L \rightarrow \infty$ pour obtenir une solution de type onde progressive sur \mathbb{R} [14]. J'ai également travaillé en collaboration avec un étudiant en thèse de J. Hulshof (V. Guyonne) sur la dynamique de flammes en boules en présence de transfert radiatif : le but était d'obtenir un résultat de stabilité sur les flammes en boules stationnaires d'un modèle de combustion simple couplé à une équation d'Eddington. En suivant la méthode introduite par G. Joulin (et justifiée rigoureusement par J.-M. Roquejoffre dans un cas adiabatique), nous avons obtenu un modèle de croissance de flamme en boule sur le rayon au moyen d'une équation intégrale différentielle dont on peut décrire le comportement asymptotique. On montre alors que dans un certain régime de paramètres où deux flammes en boules coexistent, la flamme de plus grand rayon est stable [15].

Références

- [1] R. Dressler, *Mathematical solutions of the problem of roll waves in inclined open channel*, Comm. Pure Appl. Maths. (1949).
- [2] S. Benzoni-Gavage, D. Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations. First-order systems and applications*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [3] M. Boutounet, L. Chupin, P. Noble, J.-P. Vila, *Shallow water viscous flows for arbitrary topography*. Commun. Math. Sci. 6 (2008), no. 1, 29–55.
- [4] E.D. Fernandez-Nieto, P. Noble, J.-P. Vila, *Shallow water equations for some non Newtonian fluids*, accepté pour publication dans Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics (2010).
- [5] G. James, P. Noble, *Weak coupling limit and localized oscillations in Euclidian invariant Hamiltonian systems*, Journal of Nonlinear Sciences 18 (2008) no. 4, p. 433-461.
- [6] G. James, P. Noble, Y. Sire, *Continuation of relative periodic orbits in a class of triatomic Hamiltonian systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 4, 1237–1264.
- [7] M. Johnson, K. Zumbrun, P. Noble *Nonlinear stability of viscous roll-waves*, en préparation.
- [8] P. Noble, *Invariant manifold methods for the shallow water equations and infinite dimensional Hamiltonian systems*, Thèse Université Paul Sabatier Toulouse III (2003)
- [9] P. Noble, *On the spectral stability of roll-waves*, Indiana. Univ. Math. Journal 55 (2006) no. 2, p. 795-848.
- [10] P. Noble, *Existence of pulsating roll-waves for the Saint Venant equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 186 (2007) no. 1, p. 53-76..
- [11] P. Noble, *Existence of small amplitude roll-waves in general hyperbolic systems*, SIAM Journal of Applied Mathematics 67 (2007) no. 4, p. 1202-1212.
- [12] P. Noble, *Linear stability of viscous roll-waves* Comm. Part. Diff. Eq. 32 (2007) no. 11, p. 1681-1713.
- [13] P. Noble, *Existence of breathers in classical ferromagnetic lattices*, Nonlinearity 17 (2004) no. 3, p. 1-15.
- [14] J. Hulshof, P. Noble *Existence of travelling waves for combustion and hyperbolic or anisotropic radiation models*, DCDS Série B 10 (2008) no. 1, p. 73-90.
- [15] P. Noble, V. Guyonne, *On a model of flame ball with radiative transfer*, SIAM Journal of Applied Mathematics 67 (2007) no. 3, p. 854-869.
- [16] P. Noble, *Persistence of roll-waves for the Saint Venant equations*, SIAM J. Math. Anal. 41 (2009) no. 1, p. 59-90.
- [17] D. Bresch, P. Noble, *Rigorous derivation of viscous shallow water equations with no surface tension*, soumis.
- [18] D. Bresch, P. Noble, *Mathematical Justification of a shallow water model*, Methods and Applications of Analysis 14 (2007) no. 2, p. 87-117.
- [19] G. James, *Existence of breathers on FPU lattices*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Serie I (2001), p. 581-586.
- [20] O. Guès, G. Métivier, M. Williams, K. Zumbrun, *Existence and stability of multidimensional shock fronts in the vanishing viscosity limit*. Arch. Ration. Mech. Anal. 175 (2005), no. 2, 151–244.

- [21] A. Majda, *The stability of multidimensional shock fronts*, Memoirs Amer Math Soc, vol. 275, 1983.
- [22] M. Oh, K. Zumbrun : *Stability of periodic solutions of conservation laws with viscosity : analysis of the Evans function*, Arch. Ration. Mech. Anal. 166 (2003), no. 2, p. p. 99-166.
- [23] M. Oh, K. Zumbrun : *Stability of periodic solutions of conservation laws with viscosity : pointwise bounds on the Green function*, Arch. Ration. Mech. Anal. 166 (2003), no. 2, p. 167-196.
- [24] D. Serre : *Spectral stability of periodic solutions of viscous conservation laws : large wavelength analysis*,
- [25] F. Bouchut, M. Westdickenberg, *Gravity driven shallow water models for arbitrary topography* Comm. Math. Sci. 2 (2004), no. 3, p. 359-389. Differential Equations 30 (2005), no. 1-3, p. 259-282.
- [26] T. Nishida, Y. Teramoto, H.A. Win, *Navier-Stokes flows down an inclined plane : downward periodic motion*, J. Math. Kyoto Univ. 33-3 (1993), p. 787-801.
- [27] A. Doelman, B. Sandstede , A. Scheel , G. Schneider *The dynamics of modulated wave trains*, Memoirs of the AMS (2005).
- [28] T. Colin *Modèles stratifiés en mécanique des fluides géophysique*, Annales Mathématiques Blaise Pascal 9 (2002) 229–243.
- [29] C. Parés *Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems : a theoretical framework*. SIAM J. Numer. Anal. 44 (2006), no. 1, 300–321
- [30] J. Pedlovsky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, (1979).
- [31] E. Audusse, *A multilayer Saint-Venant System : Derivation and Numerical Validation*, DCDS-B, Vol. 5 (2005), no. 2, 189-214.
- [32] J.M. Piau, *Flow of a yield stress fluid in a long domain, Application to flow on an inclined plane*, J. Rheol. 40 (1996) no. 4, 711-723.