

Contenu du dossier:

-1- Curriculum Vitae

-2-Listes complètes des travaux et publications

-3-Liste et résumé des 5 publications les plus significatives

-4-Travaux et Projet de recherche

-5-Description des activités d'enseignement,pédagogiques, administratives

-1- CURRICULUM VITAE

Pascal NOBLE

Né le 26 juin 1976. Marié, un enfant.

Maître de Conférences, Section 26

Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan, UMR 5208

1. Déroulement de carrière :

février 2005-.....*Maître de Conférences*, Université Lyon 1
décembre 2009.....*Habilitation à diriger des recherches*; Université Lyon 1
septembre 2004-février 2005.....*Post Doctorant*, Vrije Universiteit (Amsterdam)
décembre 2003.....*Thèse*; Université Toulouse 3 (directeurs : J.-M. Roquejoffre, J.-P. Vila)
septembre 2000-décembre 2003....*Doctorant*; Université Toulouse 3
2000.....*Agrégation externe de Mathématiques*
septembre 1997-août 2001.....*Elève de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon*

Titulaire de la PEDR puis de la PES depuis septembre 2006.

2. Activités de recherche :

2.1 Thèmes de recherche

⤴ **Thème 1: Ecoulements gravitaires de fluides complexes**

Obtention (formelle) de modèles de Saint Venant à partir de Navier-Stokes: écoulements newtoniens sur topographie quelconque, écoulements non newtoniens (Bingham, loi de puissance, viscoélastique), écoulements bi-fluide. Preuve de convergence et consistance de certains modèles pour les fluides newtoniens

⤴ **Thème 2: Roll-waves et ondes périodiques**

Instabilités de surface libre (roll-waves). Ondes progressives périodiques: stabilité spectrale (analyse de Bloch), modulationnelle (non linéaire), comportement asymptotique (équations de Whitham : obtention et justification). Applications aux équations de Saint Venant, Korteweg-de Vries/Kuramoto-Sivashinsky (roll-waves), Swift-Hohenberg, réaction diffusion (instabilité de convection).

⤴ **Autres thèmes: Systèmes dynamiques appliqués à la physique:** mappings en dimension infinie, réduction à une variété centrale, formes normales, techniques de perturbations singulières, continuation numérique, analytique. Applications aux oscillations localisées dans des chaînes d'oscillateurs (breathers).

Problèmes à frontières libre en combustion: ondes progressives et flammes en boules pour des modèles couplés combustion/transfert radiatif.

2.2 Encadrements de thèse

⤴ **Valérie Le Blanc.** *Stabilité d'ondes périodiques, Schémas numériques pour le chimiotactisme*, soutenue le 24 juin 2010 (co-direction avec F. Filbet). V. L B est professeur en CPGE.

⤴ **Amélie Rambaud.** *Analyse d'écoulements à surface libre à l'aide de modèles de Saint Venant multicouches ; Schémas numériques pour la limite de relaxation dans les lois de conservations hyperboliques*, soutenue le 5 décembre 2011 (co-direction F. Filbet).

3. Principales responsabilités:

3.1. Projets de recherches financés

⤴ **BQR 2006 (Lyon 1):** *Modélisation et analyse mathématique pour les avalanches de neige, les écoulements de boues et laves torrentielles*. Porteur du Projet. Dotation : 5000euros. Participants : L. Chupin (INSA Lyon), D. Bresch (Univ. Savoie).

⤴ **ANR JCJC (2009-2013) :** *Shallow Water Equations for Complex Fluids*. Porteur du Projet. Dotation : 80.000euros. Participants : L.-M. Rodrigues, S. Delcourte, D. Le Roux, F. Filbet (Lyon 1), J.-P. Vila (INSA Toulouse), E.D. Fernandez-Nieto (Univ Séville).

3.2 Expertises

- ▲ **Membre des commissions de spécialistes:** *ENS Lyon (2006-2008), Université Blaise Pascal (Clermont Ferrand : 2006/2008), Université Lyon 1 (2008/2010), Université Marseille 3 (2012-), Université Bordeaux 1 (2012-).*
- ▲ **Jury de l'agrégation externe de mathématique:** *analyse, option B (calcul scientifique) (2008-)*
- ▲ **Jury de Thèse :** *V. Guyonne, H. Elrofay (Vrije Universiteit, Amsterdam), M. Fraisse, M. Boutounet (Université Toulouse 3).*
- ▲ **Expertises de projet pour le compte de l'ANR:** *Programme Blanc.*
- ▲ **Expertises d'articles :** *Nonlinearity, SIAM Math Analysis, Journal of Fluid Mechanics, SIAM Appl. Math, Comm. Math. Sciences.*

3.3 Responsabilités collectives

- ▲ Responsable du séminaire de l'équipe MMCS commun entre l'ICJ et l'ENS Lyon (2006/2008)
- ▲ Membre du GDR "Equations aux dérivées partielles" (Responsable : David Lannes) et du GDR "Ruissellement et Fluides Cisailés" (Responsable : C. Ruyer-Quil)
- ▲ Membre du comité d'organisation du congrès HYP2006 (17/21 juillet 2006, Lyon), Co-organisation des journées EDP Rhône-Alpes (Nov 2007) et du GDR MOAD (mars 2008, Lyon). Organisation d'une session "Stabilité de solutions périodiques pour les lois de conservation" de la conférence SIAM Nonlinear waves (Juillet 2008, Rome). Réunion de lancement de l'ANR JCJC SWEFC (février 2010, Lyon)

4. Conférences, Séminaires, Invitations à l'étranger

4.1 Congrès internationaux

Congrès AMS/SMF (Lyon, juillet 2001), Workshop Intrinsic Localized Modes and Discrete Breathers in Nonlinear Lattices (El Escorial, Espagne, juillet 2002), School and Workshop on Oceanography, Lakes and River (Lisbonne, Portugal, juillet 2004), Mid Term conference of the RTN Fronts and Singularities (Leiden, Hollande, novembre 2004), Conference on limit problems in analysis (Leiden, mai 2006), Workshop on Environment problems and Shallow water equations (Séville, juin 2007), Workshop on dispersive nonlinear waves (Vienna, février 2008), SIAM Nonlinear waves (Rome, juillet 2008), Chinese-French Institute : "Stress tensor Effects on Fluid Mechanics" (Morningside Center of Mathematics, Pékin, janvier 2011).

4.2 Séminaires

ENS Lyon (avril 2002), Exposé au GDR EAPQ (Marseille, septembre 2003), Université Bordeaux 1 (octobre 2003), Université Grenoble 1 (février 2004), Université Lyon 1 (avril 2004), Vrije Universiteit (avril 2004), Université de Savoie (octobre 2004), Université de Clermont Ferrand (octobre 2004), Exposé aux Journées Compressibles (Grenoble, mars 2005), Exposé aux Journées Mathématiques pour l'Océanographie (Calacuccia, mai 2005), Université d'Héraklion (Juillet 2005), ENS Paris (mars 2008), Groupe de Travail MathOcéan (Bordeaux, décembre 2008), Université de Séville (janvier 2009), Séminaire à l'Academy of Mathematics and Science Systems (Pékin, janvier 2010), Séminaire Analyse non linéaire Paris6/Paris7/ENS Paris (février 2010), Exposé au GDR DYNAMO (Rennes, mars 2010), Université Bordeaux 1 (Mars 2010), Université d'Indiana (novembre 2010), Exposé aux journées MathOcéan (Chambéry, février 2011), Université de Pau (avril 2011), Exposé aux journées (Grenoble, septembre 2011), Exposé aux journées du GdR "Ruissellements et Films Cisailés" (, septembre 2011), Conférence NumHyp 2011 (Roscoff, septembre 2011), Université Marseille 3 (septembre 2011), Université Montpellier 2 (octobre 2011), Mini Cours aux journées EDP (Bilbao, janvier 2012).

4.3 Invitations à l'étranger

Mars-Avril 2003: Contrat pré-doc à l'Institut Max Planck de Dresde (à l'invitation de S. Flach),
Septembre 2004-Janvier 2005: Post Doc au sein de l'équipe Analyse de la Vrije Universiteit (Amsterdam)
Juin-Juillet 2005: Invitation dans le cadre du RTN Fronts and Singularities à l'Université de Crète (Héraklion)
Janvier 2009 : séjour à l'université de Séville (2 semaines) à l'invitation de E.D. Fernandez-Nieto
Novembre 2010, Avril 2010, Novembre 2011 : séjour à l'université d'Indiana (Bloomington, USA) à l'invitation de K. Zumbrun (périodes de une à deux semaines) .

-2- LISTE DES TRAVAUX ET PUBLICATIONS

- [1] P. Noble, S. Travadel: *Non persistence of roll-waves under viscous perturbations*, **DCDS Serie B** 1 (2001) 61--70.
- [2] P. Noble: *Existence of breathers in classical ferromagnetic lattices*, **Nonlinearity** 17 (2004) 1--15.
- [3] G. James, P Noble : *Breathers on diatomic Fermi-Pasta-Ulam lattices*, **Physica. D** 196 (2004) no. 1-2, 124--171.
- [4] P. Noble: *On the spectral stability of roll-waves*, **Indiana. Univ. Math. Journal** 55 (2006) no. 2.
- [5] P. Noble: *Existence of pulsating roll-waves for the Saint Venant equations*, **Archive for Rational Mechanics and Analysis** 186 (2007) no. 1, 53--76.
- [6] P. Noble, V. Guyonne: *On a model of flame ball with radiative transfer*, **SIAM Journal on Applied Mathematics** 67 (2007) no. 3, 854--869.
- [7] P. Noble: *Existence of small amplitude roll-waves in hyperbolic systems with source term*, **SIAM Journal on Applied Mathematics** 67 (2007) no. 4, 1202--1212.
- [8] P. Noble: *Linear Stability of viscous roll-waves*, **Communications in Partial Differential Equations** 32 (2007) no. 11, 1681--1713.
- [9] D. Bresch, P. Noble: *Mathematical justification of a shallow water model*, **Methods and Applications of Analysis** 14 (2007) no. 2, 87--117.
- [10] P. Noble, J. Hulshof: *Existence of travelling waves for combustion and hyperbolic or anisotropic radiation models*, **DCDS Serie B** 10 (2008) no. 1, 73--90.
- [11] G. James, P. Noble: *Weak coupling limit and localized oscillations in Euclidian invariant Hamiltonian systems*, **Journal of Nonlinear Sciences** 18 (2008) no. 4, 433--461.
- [12] M. Boutounet, L. Chupin, P. Noble, J.-P. Vila: *Derivation of Saint Venant Models for viscous shallow water flows and arbitrary topography*, **Communications in Math. Sciences** 6 (2008) no. 1, 29--55.
- [13] G. James, P. Noble, Y. Sire: *Continuation of relative periodic orbits in a class of triatomic Hamiltonian systems*, **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire** 26 (2009) no 4, 1237--1264.
- [14] P. Noble: *Persistence of roll-waves for shallow water equations*, **SIAM J. Math. Anal.** 41 (2009) no. 1, 59--90.
- [15] E.D. Fernandez-Nieto, P. Noble, J.-P. Vila: *Shallow Water equations for Non Newtonian fluids*, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** 165 (2010) no. 13-14, p. 712-732.
- [16] M. Johnson, K. Zumbrun, P. Noble: *Nonlinear Stability of Viscous Roll-Waves*, **SIAM J. Math. Anal.** (2010).
- [17] M. Boutounet, P. Noble, J.-P. Vila: *Formation of roll-waves in bilayer flows*, (2011) accepté pour publication in **Mathematical. Models and Methods in Applied Sciences**.
- [18] D. Bresch, P. Noble: *Rigorous derivation of viscous Shallow Water equations without surface tension*, (2011) accepté pour publication in **Indiana Univ. Math. Journal**.

Notes et proceedings :

[N1] G. James, P. Noble: *Breathers on diatomic FPU chains with arbitrary masses*, Localization and Energy Transfer in Nonlinear Systems, L. Vazquez, R.S. MacKay, M.P. Zorzano Eds., El Escorial, World Scientific (2003).

[N2] P. Noble : *Existence et stabilité de roll-waves pour les équations de Saint Venant*, **C. R. Math. Acad. Sci.** Paris 338 (2004) no. 10, 819--824.

[N3] B. Barker, M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun: *Whitham averaged equations and modulational stability of periodic traveling waves of a hyperbolic-parabolic balance laws* (2010) Proceedings de la session 2010 du GdR EDP à Port d'Albret.

[N4] B. Barker, M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun: *Stability of periodic Kuramoto-Sivashinsky Waves* (2011) accepted pour publication in **Appl. Math. Letters**.

Articles soumis ou en préparation:

[S1] P. Noble, L.M. Rodrigues: *Whitham's modulation equations and Stability of Periodic Wave Solutions of the Generalized Kuramoto-Sivashinsky equations* (2011) submitted.

[S2] P. Noble, L.M. Rodrigues: *Whitham's equations for modulated roll-waves in shallow flows*, en collaboration avec L.-M. Rodrigues (ICJ Lyon), (2010) submitted, **arXiv:1011.2296**.

[S3] M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun: *Nonlocalized modulation of periodic reaction diffusion waves: Nonlinear stability* (2011) submitted, **arXiv:1105.5040**.

[S4] M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun: *Nonlocalized modulation of periodic reaction diffusion waves: The Whitham equation* (2011) submitted, **arXiv :1105.5044**.

[S6] B. Barker, M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun: *Non linear modulational stability of periodic traveling-wave solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation*, **in preparation**.

[S7] M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun: *Spectral stability of periodic wavetrains of the Korteweg-de Vries/Kuramoto-Sivashinsky equation*, **in preparation**.

[S8] M. Johnson, P. Noble, L.M. Rodrigues, K. Zumbrun: *Behaviour of periodic solutions of viscous conservation laws under localized and non localized perturbations*, **in preparation**.

Autres publications:

Article dans images des mathématiques: De la goutte d'eau aux tsunamis : des films liquides minces partout

Thèse: Méthodes de variétés invariantes pour les équations de Saint Venant et les systèmes hamiltoniens discrets (Univ. Toulouse 3, soutenue le 18 décembre 2003)

Habilitation à diriger des recherches: Analyse d'écoulement en eaux peu profondes et stabilité d'ondes périodiques des équations de Saint Venant et de systèmes hamiltoniens discrets (Université Lyon 1, soutenue le 04 décembre 2009)

3– LISTE DES 5 PUBLICATIONS LES PLUS SIGNIFICATIVES

Publication 1: P. Noble: *On the spectral stability of roll-waves*, *Indiana. Univ. Math. Journal* 55 (2006) no. 2.

Résumé: Dans cet article, j'étudie la stabilité spectrale des roll-waves de Dressler [D49]. Ce sont des instabilités hydrodynamiques apparaissant à la surface d'un écoulement mince de fluide sur un plan incliné lorsque l'écoulement stationnaire est instable. Mathématiquement, les roll-waves sont des ondes progressives périodiques discontinues, solutions entropiques des équations de (SV) avec un terme source prenant en compte la gravité et la friction au fond. L'analyse de stabilité de ce type d'ondes périodiques est très originale puisqu'il n'existait pas de cadre mathématique adéquate pour mener à bien cette étude.

La difficulté principale est de formuler correctement le problème de stabilité en présence d'une infinité de chocs. On travaille dans un espace de perturbations régulières par morceaux avec des discontinuités proches des discontinuités de la roll-wave et régies par les conditions de saut de Rankine-Hugoniot. Pour fixer les chocs, on utilise un changement de variable affine par morceaux : si la perturbation est co-périodique, cela correspond à un simple changement de repère. Les inconnues du problème sont la hauteur et la vitesse dans les zones régulières et les positions des chocs. Dans ce cadre, les roll-waves deviennent des solutions stationnaires. En linéarisant les équations, on obtient alors un problème spectral formé d'un système différentiel à coefficients périodiques dans la zone régulière couplé aux conditions de Rankine-Hugoniot linéarisées. Le problème étant périodique, le spectre est continu, paramétré par un nombre de Bloch et les vecteurs propres sont bornés. A cause d'un point sonique dans la zone régulière (dans cette zone, le profil relie un point supersonique et un point subsonique), l'opérateur différentiel est singulier ; la singularité étant de première espèce.

J'ai d'abord étudié le cas, plus simple, de la stabilité des ondes progressives périodiques discontinues d'une équation de Burgers avec un terme source $u_t + uu_x = u$. C'est une équation qu'on obtient à partir des équations de (SV) lorsque l'écoulement stationnaire est instable dans la limite petite amplitude/haute fréquence [JK00]. Les calculs sont explicites et on montre que 1 est une valeur propre instable associée aux perturbations de moyenne non nulle. J'ai ensuite démontré un résultat partiel de stabilité des roll-waves de Dressler: les valeurs propres instables sont nécessairement bornées. La difficulté essentielle est de calculer un développement asymptotique (lorsque le module de la valeur propre tend vers l'infini) d'une base de solutions du système différentiel singulier sur une période. Les coefficients du problème étant périodique, la solution est une combinaison linéaire de cette base dont les coefficients dépendent de l'intervalle où on se situe. En insérant ces solutions dans les conditions de transmission, on montre alors que les vecteurs propres ne peuvent être bornés sur tout \mathbb{R} lorsque la norme de la valeur propre instable est suffisamment grande, ce qui conduit à la contradiction. J'ai ensuite montré que dans la limite d'une pente faible ou d'une grande longueur d'onde, la boîte de valeurs propres instables s'écrasent sur l'origine. Ce résultat est la première étude rigoureuse de stabilité des roll-waves et une première étape dans la démonstration du caractère bien posé des équations de (SV) au voisinage des roll-waves.

Publication 2: P. Noble: *Persistence of roll-waves for shallow water equations*, *SIAM J. Math. Anal.* 41 (2009) no. 1, 59--90.

Résumé: Dans cet article je poursuis l'analyse de stabilité des roll-waves de Dressler. Avant de montrer un résultat de stabilité non-linéaire, je commence par prouver que les équations de Saint Venant sont localement bien posées au voisinage des roll-waves. C'est un problème déjà difficile, qui n'a été résolu que dans le cas des chocs simples multidimensionnels pour les lois de conservation hyperboliques [M83]. On démontre un résultat similaire pour les roll-waves de Dressler. Une difficulté supplémentaire est de traiter la présence d'une infinité de chocs. On travaille donc dans un espace de perturbations régulières par morceaux, les discontinuités étant proches de celles d'une roll-wave et vérifiant les conditions de saut de Rankine Hugoniot (notées RH) et de Lax. Les discontinuités sont fixées à l'aide d'un changement de variable affine par morceaux: un changement de repère, comme pour les chocs simples, ne fixerait qu'un seul choc, restreignant l'espace des perturbations.

On montre que le problème de Cauchy est bien posé à l'aide d'un schéma itératif : on définit une suite de fonctions qui converge vers la solution exacte pour un intervalle de temps assez petit. Chaque élément de la suite est définie comme l'unique solution du système de (SV) couplé aux conditions de saut linéarisées au voisinage d'une fonction proche de la roll-wave. La preuve se réduit donc essentiellement à montrer le caractère bien posé du système (SV/RH) linéarisé au voisinage d'une solution approchée.

On cherche d'abord à obtenir des estimations a priori sur les solutions du problème linéarisé au voisinage d'une solution approchée (il suffit de le faire au voisinage d'une solution exacte puis d'utiliser un argument de perturbation). La procédure est classique pour un système strictement hyperbolique posé dans tout l'espace et repose sur la construction d'un symétriseur. Si on veut tenir compte des conditions aux limites, on doit obtenir des estimations sur les traces des solutions aux points de discontinuités. Lorsque le nombre de Reynolds ne dépasse pas un seuil critique, les conditions de (RH) sont dissipatives et on peut alors construire un symétriseur adapté. L'obtention d'estimations sur les dérivées d'ordre supérieur nécessite de tenir compte de la présence d'un point sonique. On décompose donc la solution entre une partie intérieure contenant le point sonique et une partie proche des bords alors qu'on étudie la partie non caractéristique comme pour un choc simple.

La fin de la preuve est proche du cas des chocs simples [M83]: à l'aide d'un argument de dualité, on montre l'existence de solutions faibles sur un intervalle de temps donné pour des conditions initiales homogènes. Les estimations sur les dérivées d'ordre supérieur montrent ensuite que la solution faible est régulière et unique. Pour une donnée initiale quelconque, on montre que, sous certaines conditions de compatibilité, il existe une solution approchée du système complet sur un intervalle de temps petit et on conclut à l'aide d'un schéma d'itération successives au voisinage de cette solution approchée. Ce résultat met en avant un fait particulièrement intéressant : pour que le problème soit bien posé (et donc avoir stabilité des roll-waves), il faut que le nombre de Reynolds ne dépasse pas un seuil critique, signe d'une possible bifurcation secondaire.

Publication 3: M. Johnson, K. Zumbrun, P. Noble: *Nonlinear Stability of Viscous Roll-Waves*, **SIAM J. Math. Anal.** (2010).

Résumé: Dans cet article, on démontre la stabilité non-linéaire des ondes périodiques d'un système de Saint Venant avec viscosité sous certaines hypothèses spectrales "naturelles". Ce système constitue le premier exemple de lois de conservation visqueuses (et avec un terme source) qui possède une famille d'ondes périodiques stables [N3]. Jusqu'à présent, les seuls exemples connus d'ondes périodiques stables étaient solutions de systèmes de réaction diffusion [S96].

L'opérateur différentiel associé à la linéarisation des équations de (SV) a des coefficients périodiques: le spectre de l'opérateur est continu, réunion dénombrable de courbes spectrales paramétrées par le nombre de Bloch. La transformée de Bloch est analogue à la transformée de Fourier pour les opérateurs différentiels à coefficients constants : elle consiste à regrouper les fréquences de la transformée de Fourier d'une fonction par multiple de la période. C'est un opérateur linéaire par rapport à la multiplication par une fonction périodique. Les calculs sont formellement similaires à ceux de la transformée de Fourier et en particulier la représentation des semi groupes.

Les équations étant invariantes par translation, 0 est nécessairement valeur propre (associée à la dérivée du profil). De plus, le débit relatif étant conservé, 0 est nécessairement une valeur propre double non semi simple de multiplicité supérieure à 2. Les hypothèses spectrales sont les suivantes :

1. La multiplicité de la valeur propre 0 est exactement 2, de multiplicité algébrique 2, géométrique 1.
2. Le spectre est contenu dans le demi plan stable.
3. Les deux valeurs propres bifurquant de l'origine $(\lambda, \xi) = (0, 0)$ s'écrivent $\lambda_j(\xi) = ia_j \xi - b_j \xi^2 + O(\xi^3)$, $j=1, 2$ avec $\text{Re}(b_j) > 0$, $j=1, 2$.

L'hypothèse 1 est une hypothèse géométrique sur la famille des ondes périodiques. L'hypothèse 2 est une hypothèse classique de stabilité et la dernière hypothèse est une condition d'hyperbolicité au premier ordre (lié à l'hyperbolicité du système de modulation de Whitham: [S05, S2]) et une condition de dissipativité à l'ordre suivant.

On déduit de ces hypothèses spectrales des estimations L^p de semi groupe à l'aide de l'analyse de Bloch. Celles ci sont basées sur des estimations ponctuelles de la fonction de Green : on la sépare entre le mode en translation qui ne décroît pas au cours du temps et une partie qui décroît plus vite, algébriquement en temps. Pour monter en régularité, il faut faire des estimations à la Kawashima tenant compte du caractère mixte hyperbolique/parabolique du système. A cause du mode en translation qui ne décroît pas en temps, on ne peut montrer un résultat classique de stabilité asymptotique. Pour obtenir un résultat de stabilité non-linéaire, on s'est inspiré des preuves de stabilité de chocs multidimensionnels pour les lois de conservation visqueuses : on décompose la solution comme la somme d'un profil modulé et d'une perturbation. Pour un choix adéquate de la phase, on montre que la perturbation décroît au cours du temps.

On montre également que le gradient de la phase décroît au cours du temps alors que la phase reste bornée, ce qui établit le résultat de stabilité modulationnelle : la solution converge vers un profil modulé. Cette étude est accompagnée d'une vérification numérique des hypothèses spectrales [N3]. Comme pour les roll-waves non visqueuses [14], ce résultat est valable pour un nombre de Reynolds en dessous d'un seuil critique, ce qui laisse encore penser à l'apparition de bifurcations secondaires qui semblent être une étape vers un écoulement plus turbulent.

Publication 4 : E.D. Fernandez-Nieto, P. Noble, J.-P. Vila: *Shallow Water equations for Non Newtonian fluids*, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** 165 (2010) no. 13-14, p. 712-732.

Résumé en français: Dans cet article, le but est d'obtenir des modèles de Saint Venant pour des écoulements minces de fluides non newtoniens, en loi de puissance et pour les fluides de Bingham, s'écoulant sur un plan incliné. C'est une situation idéalisée qui a vocation à modéliser une avalanche de neige dense ou un écoulement de boue. Les équations de Navier-Stokes à surface libre sont difficiles à étudier tant du point de vue analytique que numérique et on préfère considérer les équations de Saint Venant sur la hauteur de fluide h et la vitesse horizontale (parallèle à la pente) moyenne u . Pour obtenir ces équations, on intègre en hauteur la condition d'incompressibilité (conservation de la masse) et l'équation sur la vitesse horizontale et de faire des hypothèses de modélisation pour fermer ce système.

Alors qu'il existe une littérature importante sur le sujet, les modèles de Saint Venant proposés ne sont pas consistants avec les équations de Navier Stokes correspondantes dans le régime des eaux peu profondes. On suppose en général que la pression est hydrostatique et le champ de vitesse proche d'un équilibre local mais cette approximation n'est pas assez précise. Pour obtenir un modèle consistant, il faut une approximation du champ de vitesse précise à l'ordre suivant lorsque ε , le rapport d'aspect (=hauteur moyenne du fluide/longueur d'onde caractéristique de l'écoulement) tend vers 0: si le fluide est newtonien et dans le régime eaux peu profondes, les forces de viscosité et de gravité s'équilibrent et on calcule aisément un développement de la solution exacte à tout ordre (voir [BN] pour les détails).

Pour les fluides non newtoniens considérés, le développement du champ de vitesse est plus difficile à obtenir. Dans les deux cas, la viscosité apparente du fluide devient asymptotiquement grande. Pour les fluides en loi de puissance, cette singularité se produit dans une zone asymptotiquement mince et on peut procéder comme pour les fluides newtoniens. Le problème est plus difficile pour les fluides à seuil de Bingham. On a longtemps postulé de manière erronée qu'il y avait une zone sans déformation proche de la surface libre. Cette difficulté a été résolue en introduisant la notion de "pseudo plug": la zone sans déformation est en fait une zone avec une déformation asymptotiquement faible où la viscosité est asymptotiquement grande. A l'aide de cette notion, nous avons calculé un développement asymptotique rigoureux du champ de vitesse, ce qui nous a permis d'obtenir les premiers modèles de Saint Venant consistants pour les fluides de Bingham. On obtient des termes nouveaux que l'approche heuristique ne pouvait prédire et créés par la zone de pseudo plug. Une application intéressante du modèle obtenu est le calcul des premiers critères de stabilité des écoulements de films non newtoniens, difficilement accessibles autrement puisque on ne peut pas linéariser de manière classique les équations de Navier Stokes au voisinage des états d'équilibre.

Publication 5: D. Bresch, P. Noble: *Rigorous derivation of viscous Shallow Water equations without surface tension*, (2011) accepté for publication dans **Indiana Univ. Math. Journal**.

Résumé en français: Dans cet article, on justifie mathématiquement un modèle de Saint Venant 2d visqueux à partir des équations de Navier-Stokes incompressibles 3d à surface libre avec une condition de glissement de Navier au fond. Une version 1d de ce modèle a été obtenue formellement par Gerbeau et Perthame [GP01]. On souhaite obtenir un système d'équations pour la hauteur du fluide et la vitesse horizontale moyenne qui soit consistant avec les équations de Navier-Stokes : on intègre donc en hauteur la condition d'incompressibilité (qui donne l'équation de conservation de la masse) et l'équation sur la vitesse horizontale. Cette dernière équation n'est pas fermée et il faut faire des hypothèses de modélisation. Ici, les hypothèses (glissement au fond, faible viscosité) sont telles que, dans le régime eaux peu profondes, l'approximation originale de Saint Venant est valable: la vitesse horizontale est constante le long de la couche de fluide et la pression est hydrostatique. On peut alors fermer le système des équations intégrées et obtenir le système de Saint Venant. Cette approche a depuis utilisée pour obtenir (formellement) des modèles de Saint Venant dans un grand nombre de situations (films sur une topographie quelconque [BW05], films de Bingham [BNV10] pour modéliser des avalanches, films viscoélastiques [BB11]) sans

que le calcul original n'ait été justifié rigoureusement.

La première étape de la preuve consiste, partant d'une solution (h,u) des équations de Saint Venant visqueuses, à construire une solution approchée du système de Navier-Stokes à tout ordre par rapport à ε , le rapport d'aspect. Pour cela, on développe la solution en série par rapport à la variable verticale z , les coefficients du développement dépendants de ε et (h,u) . A l'ordre principal, la vitesse horizontale est u , la hauteur de fluide h . L'ordre suivant correspond au calcul de [GP01] nécessaire pour fermer le système d'équations intégrées mais insuffisant pour obtenir une justification rigoureuse. Nous avons poussé le développement à l'ordre 3 : il faut pour cela imposer suffisamment de régularité sur (h,u) car on perd des dérivées en temps et en espace à chaque étape du calcul.

La deuxième étape consiste à montrer qu'il existe une solution exacte des équations de Navier-Stokes proche de la solution approchée. La méthode est semblable à celle utilisée pour montrer que les équations de Navier-Stokes à surface libre sont bien posées : on commence donc par fixer le domaine fluide à l'aide d'un changement de variable lagrangien. On écrit la solution exacte comme une perturbation de la solution approchée construite au préalable. Cette perturbation vérifie un système de Stokes linéarisé au voisinage de la solution approchée, écrit en variables lagrangiennes approchées et perturbé par des termes quadratiques en la perturbation et un reste dépendant de la solution approchée. On montre que les équations linéarisées avec un second membre sont bien posées à l'aide d'une méthode de Galerkin puis on fait l'étude de régularité. La difficulté principale est de tracer précisément la dépendance des constantes impliquées dans les différentes inégalités fonctionnelles utilisées. En particulier, on démontre une nouvelle inégalité de Korn pour des champs de fluides incompressibles vérifiant une condition de Navier. On obtient alors l'existence locale d'une solution exacte à l'aide d'une méthode de point fixe sur l'intervalle d'existence de la solution du système de Saint Venant. Pour boucler le schéma itératif, il faut que le reste issu de la solution approchée soit suffisamment petit. Outre la justification du modèle Saint Venant visqueux, on a aussi montré que les équations de Navier Stokes à surface libre avec conditions de glissement au fond étaient bien posées. Ce travail ouvre la voie à la justification mathématique d'un grand nombre de modèles de Saint Venant dans des cas plus complexes (films viscoélastiques/films viscoplastiques).

THÈME 1: Equations de Saint Venant pour des fluides complexes

1.1 Description du problème: contexte scientifique et objectifs

Le mascaret est une vague remontant un fleuve ou une rivière sur plusieurs kilomètres : c'est un exemple parmi d'autres d'une onde se propageant à la surface d'un film liquide "peu profond". Cette notion de profondeur est relative. Pour la définir, on mesure le rapport entre la hauteur moyenne du film liquide et une longueur caractéristique sur laquelle varie l'écoulement. Ce dernier est "peu profond" ou "mince" lorsque le rapport est petit : typiquement un fleuve ayant une profondeur maximale de quelques mètres et s'écoulant sur plusieurs kilomètres peut être considéré peu profond. Un grand nombre d'exemples d'écoulements de films minces viennent de la nature: un océan, vu à l'échelle planétaire, une coulée de boue ou une inondation après de fortes averses, une coulée de lave après une éruption volcanique, un tsunami ou les "mers" de glace.



Figure 1: deux exemples d'écoulements peu profonds issus de la nature

À gauche: une coulée de lave au piton de la fournaise. À droite: un mascaret en Indonésie

Le système d'équations de Saint Venant (notées SV) est un modèle très populaire parmi les physiciens pour décrire l'écoulement d'un film liquide mince sous l'action de la gravité (et éventuellement d'autres forces comme la tension de surface, la force de Coriolis ou la traction du vent). Il décrit l'évolution de la hauteur de fluide, h , et celle de la vitesse "horizontale" (parallèle à la pente) moyenne u , au cours du temps. Les applications concernent l'étude de certains phénomènes naturels: l'écoulement d'un fleuve ou d'une rivière (en particulier les épisodes de crues), les avalanches de neige dense, les coulées de boues ou de laves volcaniques. Ces équations sont ainsi utilisées pour concevoir des systèmes de protection efficaces (digues, paravalanches) et déterminer des zones à risques (zones d'avalanches, zones inondables). Ces équations permettent également de modéliser un grand nombre d'écoulements rencontrés dans l'industrie: peintures, pâtes alimentaires, huiles, eau, métal en fusion (applications au BTP, photographie, sidérurgie, industrie automobile). La plupart des fluides en question ont un comportement complexe "non newtonien": la déformation du fluide n'est pas proportionnelle à la contrainte qui lui est appliquée.

En général, on décrit un écoulement de fluide à l'aide des équations de Navier-Stokes incompressibles à surface libre (notées NS). Ces équations font intervenir les inconnues de vitesses : $\mathbf{U} = (\mathbf{u1}, \mathbf{u2})$ où $\mathbf{u1}$ désigne la vitesse horizontale (parallèle à la pente) et $\mathbf{u2}$ la vitesse verticale (perpendiculaire à la pente), la pression p et un domaine fluide variable $\Omega(\mathbf{t}) = \{(\mathbf{x}, z), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, 0 \leq z \leq h(\mathbf{x}, \mathbf{t})\}$ où h est la hauteur de fluide. Ici \mathbf{x} désigne une variable curviligne paramétrant la surface sur laquelle a lieu l'écoulement et z la variable verticale. A cause de la surface libre, le système (NS) est difficile à étudier tant analytiquement que numériquement et on préfère en général utiliser le système (SV), plus simple, qui ne fait intervenir que la hauteur h du fluide et la vitesse moyenne horizontale $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u1} \rangle$. L'avantage de ce modèle est qu'on s'affranchit du problème de la surface libre et qu'on réduit la dimension le problème : il n'y a plus de variable z , ni d'inconnue $\mathbf{u2}$ et on a remplacé $\mathbf{u1}$ par sa moyenne. Les équations (SV) sont une approximation des équations (NS) et sont obtenues en faisant des hypothèses de modélisation basées sur une analyse dimensionnelle des effets physiques pertinents. Ceux ci sont mesurés à l'aide de nombres sans dimensions:

- ⤴ **le paramètre d'aspect ε** , qui est le rapport entre la hauteur caractéristique du fluide et la longueur d'onde caractéristique du phénomène étudié (par exemple l'intervalle moyen entre deux vagues, les dimensions de l'ouvrage où a lieu l'écoulement,
- ⤴ **le nombre de Reynolds Re** , représentant le rapport entre les forces d'inerties et les forces visqueuses. Le nombre de Reynolds indique si un écoulement est turbulent (présence d'un grand nombre de tourbillons comme dans le sillage d'un avion ou dans une rivière) ou non (coulée de lave, écoulement d'un fleuve),
- ⤴ **et le nombre de Froude F** , pour les écoulements gravitaires, qui représente le rapport entre les forces d'inertie et la pesanteur.

D'autres nombres sans dimension peuvent jouer un rôle selon les situations étudiées comme le nombre de Bond (le rapport entre les forces de gravité et les effets de tension de surface) ou encore le nombre de Rossby (le rapport entre forces d'inertie et la force de Coriolis).

Les équations (SV) sont utilisées comme une approximation des équations (NS) lorsque l'écoulement est peu profond, ce qui signifie que $\varepsilon \ll 1$ et le nombre de Reynolds n'est pas trop grand. C'est une hypothèse de modélisation raisonnable pour les situations que l'on veut considérer. Ces modèles permettent par exemple d'obtenir des critères simples de stabilité des écoulements de fluides minces pour des perturbations de grande longueur d'onde et d'étudier les ondes non-linéaires de ces écoulements, surtout lorsque le fluide est non newtonien et que l'analyse du système complet se révèle trop complexe (par exemple pour les fluides à seuil).

Pour définir la qualité de l'approximation des équations (NS) par un modèle (SV), on utilise les notions de consistance et de convergence introduite pour définir la qualité d'un schéma numérique approchant un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles. On part des équations de (NS_ε) et (SV_ε) écrites en variables sans dimension, les seuls paramètres intervenant dans les équations étant le paramètre d'aspect, les nombres de Reynolds et de Froude (ou tout autre nombre sans dimension selon la situation). On note $(u_\varepsilon, p_\varepsilon, h_\varepsilon)$ une solution exacte des équations de (NS_ε) qu'on peut noter $NS(u_\varepsilon, p_\varepsilon, h_\varepsilon, \varepsilon) = 0$. On introduit également la vitesse horizontale moyenne $v_\varepsilon = \langle u1_\varepsilon \rangle$. Un modèle de (SV_ε) est

- ⤴ **consistant** si $SV(h_\varepsilon, v_\varepsilon, \varepsilon) = R_\varepsilon$ et $\|R_\varepsilon\|$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 (pour une norme bien choisie).
- ⤴ **précis à l'ordre n** si $\|R_\varepsilon\| = O(\varepsilon^n)$.

Pour définir la convergence d'un modèle, on choisit $(u_\varepsilon, p_\varepsilon, h_\varepsilon)$ solution de (NS_ε) et (h, v) une solution de (SV_ε) telle que $(h_\varepsilon, \langle u1_\varepsilon \rangle)|_{t=0} = (h, v)|_{t=0}$. Un modèle de (SV_ε) est

- ⤴ **convergeant** si $\|(h_\varepsilon - h, \langle u1_\varepsilon \rangle - v)\| = O(\varepsilon)$.

Alors qu'il existe une importante littérature sur l'obtention et l'analyse théorique et numérique des équations de (SV), les modèles obtenus jusqu'à la fin des années 1990 étaient obtenus de manière heuristique et sans passer par une analyse dimensionnelle: sauf cas très particuliers, la plupart de ces modèles sont donc en général inconsistants. Ainsi, les modèles de (SV) pour les écoulements de fluides newtoniens sur un plan incliné ne prédisent pas le seuil correct au delà duquel un écoulement stationnaire est instable.

Les premiers modèles consistants dans ce cadre sont obtenus formellement en 1998 [RM98] et 2000 [GP01]. L'obtention du modèle dépend fortement des conditions au fond. Dans [RM98], on considère un écoulement mince de fluide avec conditions et non glissement au fond et Reynolds d'ordre 1 reproduisant certaines des données expérimentales de [LSG95]: la solution des équations de (NS) sont approchées à l'aide d'une méthode de Galerkin (polynômes en la variable verticale) et les équations de (SV) sont ensuite obtenues à l'aide d'une méthode de projection. Les modèles obtenus dépendent donc des procédés d'approximation et de projection. Dans [GP01], on considère un fluide mince s'écoule sur un fond plat avec un nombre de Reynolds asymptotiquement grand, $Re = C/\varepsilon$, et une condition de glissement de Navier: les hypothèses de modélisation sont choisies pour que l'hypothèse originale de Saint Venant soit vérifiée. Ainsi, le profil de vitesse est plat et $u1 = \langle u1 \rangle + O(\varepsilon)$. Bien que mathématiquement correct, certaines des hypothèses de modélisation de [GP01] peuvent être discutables: le nombre de Reynolds est grand, ce qui correspond souvent à un écoulement turbulent, alors que l'écoulement est supposé laminaire. De plus, cette approche a été étendue à d'autres types d'écoulements (fluides viscoplastiques, viscoélastiques, écoulement à topographie quelconque, avalanches de neige) pour lesquelles ces hypothèses ne sont plus valables (écoulement de lave, mers de glace).

La preuve de la convergence de certains modèles d'écoulements minces de fluides est assez récente. Les résultats les plus récents portent sur la justification d'une famille de modèles de propagation de vagues (équations de Boussinesq, équations de Serre, équations de Green Naghdi) à partir des équations d'Euler incompressibles et irrotationnelles [AL08]. En contrepartie, il n'y a pas de justification mathématique de modèles (SV) pour des fluides visqueux, newtoniens ou non newtoniens.

1.2 Contributions principales

J'ai d'une part obtenu de nouveaux modèles de Saint Venant consistants et d'ordre 1 pour différents écoulements et d'autre part montré la convergence de certains de ces modèles pour les fluides newtoniens.

Obtention de modèles de Saint Venant consistants d'ordre 1: [12,15,17] (*Collaborations avec M. Boutounet, L. Chupin, E.D. Fernandez Nieto et J.-P. Vila*) J'ai d'abord considéré les modèles de Saint Venant à partir des équations de (NS) pour un écoulement de film mince sur une topographie quelconque. La plupart des modèles existants étaient obtenus soit en considérant une topographie proche d'un plan incliné (certains modèles de Savage Hutter) soit pour des topographies à courbure petite et pour des fluides sans viscosité ou faiblement visqueux (avec condition de glissement de Navier) [BW04, MBV05]. Le cas étudié ici est celui d'un fluide visqueux (Reynolds d'ordre 1) et une topographie quelconque (courbure arbitraire et paramétrage quelconque). Dans ce régime quasi-stationnaire, la viscosité et la gravité s'équilibrent, donnant lieu à un profil de vitesse parabolique à l'ordre principal, alors que la pression est hydrostatique. On peut en fait calculer un développement asymptotique de la solution à tout ordre en ϵ . Pour obtenir un modèle de (SV), on intègre en hauteur la condition d'incompressibilité et celle sur la vitesse parallèle au fond, ce qui donne un système d'évolution non fermé sur la hauteur h et la vitesse horizontale moyenne u . On utilise alors le développement asymptotique de la solution exacte pour donner un développement asymptotique des quantités intégrées en fonction de ϵ , h et u . En tronquant ces développements à un ordre donné, on obtient un modèle de (SV) [12]. En plus d'obtenir les effets dus à la courbure, notre approche permet de déterminer des critères de stabilité d'écoulements stationnaires sur une topographie quelconque ce qui est très difficile si on part directement des équations (NS) [EJL11].

La méthode d'obtention des équations (SV) décrite au dessus est très robuste et permet d'obtenir des modèles de Saint Venant pour certains fluides non newtoniens. J'ai par exemple obtenu les premiers modèles (SV) consistants pour les fluides en loi de puissance et de Bingham [15]: l'analyse est proche de celle effectuée pour les fluides newtoniens, à ceci près qu'on doit tenir compte de zones dans la couche de fluide pour lesquelles la viscosité apparente devient asymptotiquement grande. Dans le cas des fluides en loi de puissance, cette zone est asymptotiquement mince et le résultat obtenu est une généralisation du cas newtonien. Pour les fluides de Bingham, il y'a une zone dite "pseudo-plug" (zone en très faible déformation) de taille $O(1)$ [BC99] qui induit l'apparition de nouveaux termes dans les équations (SV). Ces nouveaux modèles fournissent en retour de nouveaux critères de stabilité pour les écoulements stationnaires, en particulier pour les fluides de Bingham pour lesquels aucune procédure de linéarisation standard n'est possible puisque l'écoulement uniforme possède une couche plastique sans déformation dans laquelle la viscosité est infinie.

Récemment, j'ai obtenu récemment de nouveaux modèles de (SV) pour un écoulement de fluides newtoniens superposés le long d'un plan incliné [17]. Il existe une littérature importante sur l'analyse de stabilité de cette classe d'écoulements, ou bien en partant des équations (NS) et dans le régime ondes longues [Y67, H85] ou bien à l'aide d'équations réduites [K99]. Dans [K99], l'auteur propose un modèle consistant composé d'un système d'équations de Kuramoto-Sivashinky (notées KS) portant uniquement sur les hauteurs de fluides. Ces équations ne sont valables qu'au voisinage du seuil d'instabilité des états constants et ne peuvent décrire une dynamique complètement non-linéaire. De plus les effets physiques impliqués dans la stabilité de ces écoulements (flottabilité, inertie, tension de surface) sont traités indépendamment les uns des autres ce qui ne fournit pas des critères corrects de stabilité. Les modèles de Saint Venant obtenus [17] sont d'ordre 1 et permettent aussi bien d'étudier la stabilité des écoulements que les ondes non linéaires : on montre par exemple l'existence de roll-waves (voir partie 2).

Convergence de modèles de Saint Venant pour les fluides newtoniens: [9,18] (*Collaboration avec D. Bresch*). J'ai dans un premier temps considéré un cas particulier de [12]: l'écoulement est 2d et sur un plan incliné avec une condition de non glissement au fond. Dans ce cas, on montre que le modèle (SV) d'ordre 1 est convergent si l'écoulement est asymptotiquement proche d'une solution d'équilibre de Nusselt stable et lorsque la tension de surface est suffisamment importante [9]. C'est aussi le régime de validité d'une équation

de Burgers visqueuse sur la hauteur qui gouverne l'évolution des perturbations grandes longueurs d'ondes. On obtient ainsi une démonstration alternative de [U] où cette équation était justifiée directement. L'intérêt du modèle (SV) est qu'il reste bien posé au delà du seuil critique de stabilité, contrairement à l'équation de Burgers, même s'il n'est pas encore justifié mathématiquement.

J'ai récemment obtenu un résultat de convergence d'un modèle de (SV) visqueux 2d à partir des équations de (NS) 3d avec friction au fond et en l'absence de capillarité. C'est un cas particulier où l'hypothèse originale de Saint Venant est vérifiée: la vitesse du fluide est proche de sa vitesse moyenne. Une version 1d de ce modèle a été obtenue à partir de (NS) 2d [GP01] et donne la forme correcte des termes visqueux alors que diverses viscosités étaient considérées jusqu'à maintenant. Il existe une littérature abondante étendant ce premier calcul à différentes situations: topographies quelconques [BW04], écoulements viscoélastiques [BB11] ou viscoplastiques [BNV10] sans qu'une justification rigoureuse du modèle initial ne soit proposée. Les deux points clés de la justification étaient de montrer qu'on pouvait calculer une solution approchée du système (NS) à tout ordre en ε , l'ordre principal étant donné par une solution (h,u) du modèle (SV) visqueux puis de montrer que les équations (NS) écrites en variable lagrangiennes (ce qui fixe le domaine fluide) et linéarisées au voisinage de la solution approchée étaient localement bien posées. Pour ce deuxième point, la difficulté principale était de traquer la dépendance en ε des différentes constantes intervenant dans les estimations a priori (inégalités de Poincaré, d'Agmon-Ladyzenskaia) : en particulier, on a montré une nouvelle inégalité de Korn dans des domaines minces.

2.3 Projet de recherche

Convergence de modèles de Saint Venant: Les justifications de modèles (SV) obtenues laissent certaines questions ouvertes. Le verrou le plus important concerne à mon avis le cas où la hauteur de fluide s'annule. Les modèles (SV) proposés sont justifiés formellement ou mathématiquement tant que la hauteur de fluide est minorée par une constante strictement positive: c'est une restriction qu'on rencontre aussi pour le problème des water waves [AL08]. Un cas modèle particulièrement intéressant en terme d'applications est celui du front sec comme lors d'une rupture de barrage, une avalanche ou un front d'inondation. Deux cas sont généralement admis : soit la zone en avant du front est sèche soit il y a un film précurseur. On distingue alors deux échelles horizontales caractéristiques: une au front et une derrière le front. Il faut alors reprendre la dérivation de modèles de (SV) depuis le départ et considérer une méthode de développements raccordés entre la zone derrière le front qu'on peut décrire à l'aide des modèles de (SV) déjà obtenus et la zone de front qu'il faut étudier séparément à l'aide des équations de (NS) (ou considérer par exemple un modèle de lubrification). La résolution de ce problème est une première étape dans la compréhension de fronts secs plus complexes, en particulier pour les fluides à seuils où on ne sait pas décrire (même formellement) ce qui se passe au front.

En termes d'applications, une autre limitation des modèles justifiés concerne la nature du fluide: il n'y a pas de justification mathématique de modèles (SV) pour des fluides non newtoniens comme les fluides en loi de puissance ou les fluides à seuil qu'on rencontre pourtant dans un grand nombre d'expériences en laboratoire [LSG95, BL04]. En fait, on ne sait pas montrer que les équations (NS) sont bien posées ni même étudier la stabilité des écoulements stationnaires: la résolution de ce dernier point est sans doute la clé pour montrer que les équations (NS) sont bien posées au voisinage d'un écoulement stationnaire et par suite justifier certains modèles (SV).

Enfin, les modèles (SV) obtenus pour des films sur plan incliné ne sont justifiés que lorsque l'écoulement stationnaire est stable alors qu'ils restent bien posés. Dans ce régime d'écoulements, les instabilités saturent en des ondes non-linéaire appelées roll-waves. L'étude de la stabilité de ces ondes est la première étape qui permettra de valider les modèles de (SV) lorsque les écoulements stationnaires sont instables: c'est un problème difficile qui est mon deuxième thème de recherche (voir la partie 2).

Modèles de (SV) pour des fluides viscoplastiques/viscoélastiques: Le problème principal dans la modélisation d'écoulements de films liquides à seuil est de comprendre la transition entre comportement fluide et comportement plastique. La notion de zone pseudo plastique [BC99], où la déformation est faible, a permis de comprendre ces écoulements lorsque la surface libre est déformée et les points critiques sont isolés. C'est dans ce cadre qu'on a obtenu des modèles (SV) consistants [15]. Cette hypothèse est très restrictive car elle suppose que le fluide est toujours en écoulement et se comporte comme un fluide newtonien généralisé. Pour tenir compte du comportement plastique du fluide et ainsi étudier des écoulements ayant des zones sans déformation (comme les écoulements stationnaires), on partira d'une

formulation variationnelle des équations (NS) comme dans [BNV10] (glissement au fond). La compréhension de ce problème de transition fluide/plastique pour un film mince sur un plan incliné est une étape indispensable avant d'étudier des situations plus complexes.

Une modélisation plus réaliste des écoulements de films minces comme les avalanches de neige dense ou les écoulements de boue, requiert de traiter de front les divers difficultés abordées jusqu'à maintenant comme la complexité de la topographie ou celle du fluide. L'obtention de modèles de (SV) pour des fluides à seuil de type Herschel Bukley (combinaison d'un fluide à seuil et en loi de puissance) pour une topographie quelconque doit permettre une meilleure compréhension des dynamiques de déclenchement et d'arrêt d'avalanches. Ces modèles doivent également fournir de nouveaux critères de stabilité d'écoulements uniformes qui sont importants pour mettre en place certaines expériences en laboratoire.

La loi de Bingham pour les fluides viscoplastiques est extrapolée à partir de certaines données expérimentales alors que l'on ne sait pas mesurer ce qui se passe aux faibles déformations. En introduisant un seuil, on introduit une singularité dans le comportement du fluide (transition fluide/plastique). Certaines expériences menées en laboratoire (G. Chambon, CEMAGREF Grenoble) montrent que des effets élastiques dans des écoulements de films "à seuil".

Pour tenir compte de cet effets, on remplace l'équation "d'état" reliant le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations par une équation d'évolution avec un terme source. Ces fluides, appelés viscoélastiques, exhibent un comportement statique/dynamique complexe : en particulier, à une contrainte donnée, le fluide se déforme différemment, entraînant des effets d'hysteresis (certaines configurations d'équilibre sont stables, d'autres instables). Il y a actuellement très peu d'études de films viscoélastiques à l'aide de modèles de (SV) [BB11] (pur glissement, profil plat). Je souhaite d'abord obtenir un modèle de type (SV) pour un film mince sur un plan incliné à partir du modèle de Olroyd (relaxation vers un fluide newtonien): pour reproduire les effets d'hysteresis, il faudra introduire des modèles de (SV) augmentés avec une équation d'évolution sur le tenseur moyenné en hauteur. La compréhension des effets viscoélastiques dans ce cas modèle me permettra ensuite d'étudier des films minces avec une rhéologie plus réalistes (modèle de fluides viscoplastiques/viscoélastiques [S08]).

Modèles de Saint Venant multicouches: Alors qu'il possède de nombreux avantages (dimension réduite, absence de surface libre, simplicité d'implémentation), le modèle de Saint Venant ne permet pas d'étudier un écoulement de films liquides de profondeur arbitraire. On perd en plus une information sur la stratification en vitesse dans la couche de fluide. Pour contourner ce problème, on a cherché à "empiler" des couches minces de fluides modélisée par un système de Saint Venant multicouches. Pour obtenir ce modèle, l'idée est de couper la couche de fluide en plusieurs couches minces : c'est ainsi qu'on modélise un écoulement quasi géostrophique 3d (circulation océanique) avec une densité de fluide variable selon la hauteur à partir de modèles 2d de couches de fluides de faible épaisseur et de densité constante [P79]. Si on applique cette méthode à une couche de fluide homogène, le modèle obtenu n'est pas hyperbolique [A05] : on a en fait introduit artificiellement une distinction entre les couches composées d'un même fluide. En considérant des modèles avec échange de masses, on obtient un modèle multicouche hyperbolique portant sur la hauteur totale et sur la vitesse dans chaque couche [ABPS11]. Je souhaite ici obtenir un résultat de convergence du modèle multicouche vers les équations primitives lorsque le nombre de couche temps vers l'infini. En effet, on ne peut espérer converger vers le système de Navier-Stokes complète mais plutôt vers l'approximation hydrostatique de ce dernier. On prendra également en compte dans cette étude les forces de Coriolis et on fera le lien avec les modèles quasi-géostrophique dans la limite d'un faible nombre de Rossby.

La prise en compte de l'échange de masse entre deux couches de fluides est un élément important de la modélisation du transport de sédiment par une rivière ou d'une avalanche de neige. Pour cet exemple, on peut considérer qu'une couche de neige poudreuse s'écoule sur un manteau neigeux: celui ci est érodé en avant de l'avalanche, alimentant cette dernière tandis que la neige est redeposée en queue d'avalanche, réduisant sa masse et provoquant au final l'arrêt. Même si les notions d'érosion et de sédimentation sont assez naturelles, ce sont des phénomènes difficiles à modéliser (on a peu de données expérimentales). Il existe pourtant dans la littérature des modèles phénoménologiques comme BCRE/BRDG ou certains modèles de Saint Venant avec érosion de type Savage Hutter (le fluide vérifie une loi de Mohr Coulomb) en partant des équations d'Euler pour la zone fluide. Ici, on considérera des fluides visqueux newtoniens et non newtoniens s'écoulant sur une couche de sédiments. Le principe est de généraliser les modèles à topographies quelconques en considérant des fonds variants au cours du temps et de modéliser la variation de la couche de sédiments à l'aide de BCRE/BDRG : l'objectif est de déterminer les nouveaux termes dûs à l'érosion et la sédimentation dans le modèle de (SV) pour la couche de fluide.

THÈME 2: Roll-waves (instabilités de surface libre)

2.1 Description du problème: contexte scientifique, objectifs

Les ondes périodiques forment, avec les ondes solitaires et les fronts, une famille d'ondes non linéaires à la base de structures plus complexes. Elles représentent souvent un premier stade d'une transition vers la turbulence. Ces ondes apparaissent typiquement dans certains systèmes physiques au voisinage du seuil critique d'instabilité des états stationnaires et d'une longueur d'onde critique et peuvent être décrites par certaines équations canoniques. On s'intéresse ici à des instabilités hydrodynamiques de surface libre connues sous le nom de "roll-waves".



Figure 2: Instabilité de surface libre (roll-waves).

A gauche: roll-waves régulières 1D (à la courbure du front près). Au centre: l'écoulement est plus "turbulent", avec des perturbations transverses du front. A droite: ondes périodiques à la surface de la mer de Glace.

Les roll-waves apparaissent dans des écoulements minces de fluides soumis à la gravité (par exemple le long d'un plan incliné): voir figure 2. L'instabilité résulte de la compétition entre l'inertie et les forces de viscosité, lorsque le nombre de Reynolds dépasse un seuil critique : $Re > 5/6 \cotan(\Theta)$ où Θ représente l'angle de la pente [Y63]. On a en général recours à un modèle plus simple que les équations de Navier-Stokes pour décrire ces ondes non-linéaires. Une première description est due à Dressler à l'aide d'un modèle de Saint Venant avec un terme de friction empirique [D49]. Les roll-waves sont alors des ondes périodiques nécessairement discontinues, solutions entropiques des équations de (SV), ce qui pose évidemment une difficulté pour en étudier la stabilité. Pour régulariser les profils des trains d'ondes périodiques, on peut utiliser un modèle de Saint Venant en y insérant une viscosité [NM84,1]. Dans ce cas, la famille des roll-waves est localement une variété de dimension 3, paramétrée par la phase, la longueur d'onde et la hauteur moyenne. Dans certains régimes, une approche plus rigoureuse, bien que formelle, consiste à étudier la dynamique au voisinage du seuil d'instabilité: on obtient dans ce cas une équation de Korteweg-de Vries (notée KdV) perturbée par un terme de Kuramoto-Sivashinsky (noté KS). La famille des ondes périodiques reste une variété de dimension 3.

L'analyse mathématique de stabilité des ondes périodiques est un sujet assez récent, les premières études rigoureuses portant sur certaines instabilités hydrodynamiques très connues comme les rouleaux se formant dans un écoulement de Couette Taylor (écoulement entre deux cylindres coaxiaux), pour la convection de Rayleigh-Bénard (un fluide entre deux plans parallèles est chauffé par en dessous) : voir la figure 3. Ces rouleaux forment en général une variété de dimension 2, paramétrée par la longueur d'onde et la phase et, comme les roll-waves, apparaissent lorsqu'on dépasse le seuil de stabilité de l'état stationnaire.

Outre les équations de (NS) (dans l'approximation de Boussinesq), l'équation de Swift-Hohenberg (notée SH) ou encore l'équation de Ginzburg-Landau (notée GL) sont des modèles standards pour décrire ce type de formation au voisinage du seuil d'instabilité. Pour cette dernière équation, il est très simple d'étudier la stabilité des ondes périodiques: en effet si on représente les solutions en coordonnées polaires, on obtient une équation sur la phase et une équation sur l'amplitude. On observe alors que l'amplitude est toujours amortie exponentiellement vite alors que la phase vérifie une équation de Hamilton Jacobi: en dérivant, on obtient en fait une équation donc la partie principale est une équation de Burgers visqueuse. En cas de stabilité, les

perturbations décroissent donc au plus de manière polynomiale (comme les solutions d'une équation de la chaleur).

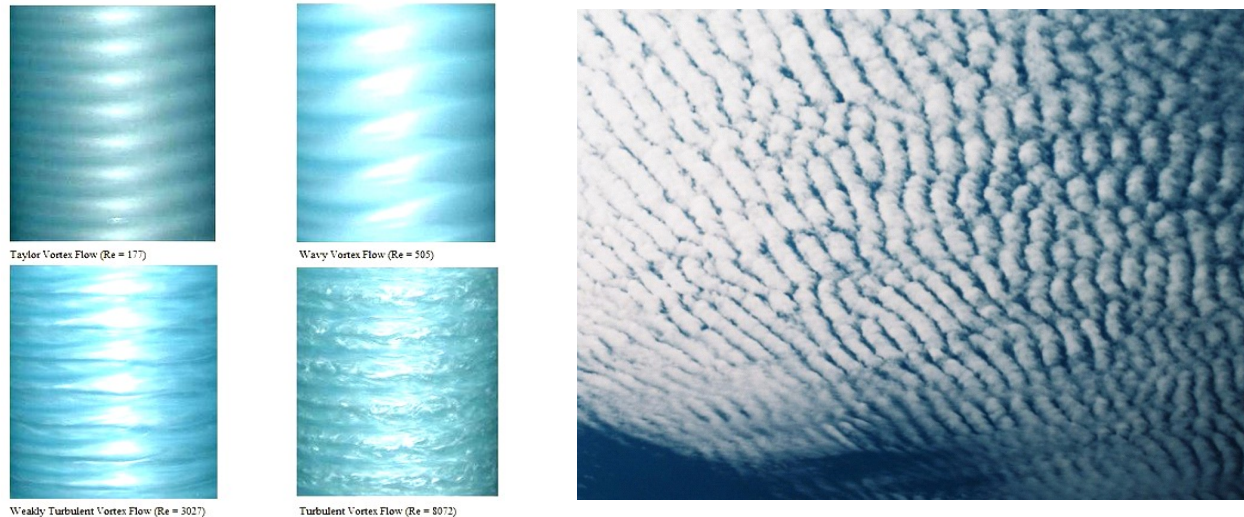


Figure 3: Instabilités de convection.

A gauche: rouleaux de convection dans un écoulement de Couette Taylor. A faible nombre de Reynolds ($Re=177$) les rouleaux sont réguliers et se déstabilisent à mesure que le nombre de Reynolds augmente ($Re=8072$). *A droite*: des "rues de nuages" résultats de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Pour le problème complet, (SH ou NS), l'analyse est beaucoup plus difficile car on ne peut plus découpler le problème : il faut alors utiliser une méthode plus robuste, à savoir étudier la stabilité spectrale, en déduire des estimations de semi-groupe et finalement étudier la stabilité non linéaire. A cause de la nature périodique du problème, le spectre est continu et il faut avoir recours à une analyse de Bloch. Bien que connue depuis les années 60 (Eckhaus, Busse), les premiers résultats de stabilité spectrale rigoureux n'ont été obtenu que 30 ans après et au voisinage de la transition vers l'instabilité [M97s, M97r]. L'analyse de stabilité non linéaire est encore plus délicate. Schneider [S96] a obtenu un premier résultat de stabilité non-linéaire pour les rouleaux de petite amplitude pour l'équation de Swift Hohenberg: il utilise pour cela le fait que le problème peut être approché par une équation de Ginzburg-Landau. En utilisant l'invariance d'échelle de cette équation, il montre que la dynamique complète du problème est décrite complètement par l'équation sur la phase dans Ginzburg-Landau. Ce résultat a depuis été étendu aux rouleaux de Couette Taylor [S98] et aux systèmes de réaction diffusion [DSSS09].

Contrairement aux instabilités convectives mentionnées, il n'y avait pas jusqu'aux années 2000 d'analyse mathématique de stabilité des roll-waves. Pour les ondes discontinues, la difficulté essentielle était de formuler correctement le problème de stabilité alors que pour les ondes continues, la structure plus riche de la famille des ondes périodiques induit une dynamique autour des ondes périodiques plus complexes et rendent les techniques d'invariance d'échelle utilisées par Schneider [S96,S98] inopérantes .

2.2 Contributions principales

Mon travail de recherche sur les instabilités hydrodynamiques de type roll-waves s'est articulé autour de deux axes principaux: d'une part les ondes périodiques non visqueuses et discontinues, solutions du système de Saint Venant considéré par Dressler [D45] et d'autre part les ondes périodiques régulières solutions d'un système de Saint Venant visqueux ou de l'équation de Korteweg-de Vries/Kuramoto-Sivashinsky (notée KdV/KS). Dans le cas des ondes périodiques continues, j'ai été amené à revisiter le problème de stabilité pour les systèmes de réaction diffusion.

✧ Axe 1: Roll-waves non visqueuses.

Stabilité des roll-waves de Dressler: [4,14] Durant ma thèse, j'ai commencé par étudier la stabilité spectrale des roll-waves discontinues de Dressler. Le problème essentiel est de formuler correctement la notion de stabilité en présence d'une infinité de chocs: j'ai essentiellement adapté la méthode introduite par Majda pour l'analyse des chocs simples dans les lois de conservation hyperboliques. Pour un choc simple, on travaille dans un espace de fonctions régulières par morceaux avec une discontinuité proche du choc : un changement de référentiel fixe la discontinuité, régie par les conditions de saut de Rankine Hugoniot. On

peut alors linéariser les équations: l'analyse de stabilité spectrale se réduit au calcul d'un déterminant (de Lopatinskiï). Sous hypothèse de stabilité spectrale, on peut alors montrer que le problème de Cauchy est bien posé au voisinage d'un choc: c'est la notion de persistance, une version plus faible que la stabilité et qui tient compte du caractère hyperbolique des équations.

Dans le cas des roll-waves de Dressler, on travaille dans un espace de fonctions régulières par morceaux avec des discontinuités proches de celle de la roll-wave de base et vérifiant les conditions de Rankine Hugoniot : dans ce cas, on utilise un changement de variable affine par morceaux qui fixe toutes les discontinuités. Dans ce référentiel, les roll-waves deviennent des solutions stationnaires et on peut linéariser les équations de Saint Venant et les conditions de Rankine Hugoniot, au voisinage des roll-waves. J'ai d'abord montré un résultat partiel de stabilité spectrale : en dehors d'une certaine boîte autour de 0, le problème linéarisé ne possède pas de valeurs propres instables. Lorsque la pente tend vers 0, cette "boîte" de valeurs propres instables possibles devient de plus en plus petite [4]. De cette analyse, j'ai pu déduire un résultat de persistance de roll-waves en adaptant l'approche utilisée pour les chocs simples [14]. Avant cela, les seuls résultats de stabilité de roll-waves connus concernaient les solutions d'une équation de Burgers et la preuve reposait sur des arguments de comparaison, valable uniquement dans le cas scalaire [L92]. La question de la stabilité asymptotique des roll-waves de Dressler reste donc un sujet ouvert très intéressant.

Généralisations du résultat d'existence de roll-waves de Dressler: [5,7,17] Suite à des discussions avec des chercheurs de l'IMFT (Olivier Thual), je me suis intéressé à l'existence de roll-waves pour des écoulements à fond périodique. J'ai démontré l'existence de roll-waves de petite amplitude dont la vitesse oscillait périodiquement autour d'une valeur moyenne. La preuve repose sur le fait qu'on peut obtenir une équation de Burgers "instable" à partir des équations de Saint Venant dans une limite petite amplitude/grand nombre d'onde [Jin, Katsoulakis] et l'équation de Burgers possède trivialement une famille de roll-waves [5]. J'ai étendu ce résultat à des systèmes de lois de conservation avec terme source en utilisant une méthode analogue [7]: ceci montre par exemple l'existence de roll-waves dans des systèmes de Saint Venant multicouches [17].

✦ **Axe 2: Stabilité de roll-waves continues**

Collaboration avec L.M. Rodrigues (Univ. Lyon 1), M. Johnson (Kansas Univ.) et K. Zumbrun (Indiana Univ.).

Stabilité de roll-waves visqueuses: [8,16,N3,S2] Je me suis d'abord intéressé à la stabilité spectrale des roll-waves visqueuses pour un modèle de Saint Venant avec une viscosité physique. Si on linéarise ces équations autour d'une roll-wave, on obtient un problème spectral avec des coefficients périodiques: le spectre est continu et réunion dénombrable de courbes spectrales paramétrées par le nombre de Bloch ξ . De plus, on peut faire correspondre ce spectre aux zéros d'une fonction de Evans $E(\lambda, \xi)$ (λ la valeur propre, ξ le nombre de Bloch) [G93]. A cause de l'invariance par translation, on a $E(0,0)=0$ (la dérivée du profil est un vecteur propre). L'analyse du spectre au voisinage de l'origine est donc très importante pour déterminer la stabilité des roll-waves: en adaptant, l'analyse de Serre [S05] pour les lois de conservation, j'ai obtenu un développement asymptotique de E au voisinage de $(0,0)$. La partie principale est un polynôme réel homogène de degré 2 en (λ, ξ) . Pour $\xi=0$, un développement asymptotique de $E(\lambda,0)$ en $+\infty$ permet d'obtenir une première condition de stabilité. Pour $\xi \sim 0$, on déduit du développement de E que les valeurs propres sont de la forme $\lambda_j(\xi) \sim i a_j \xi$, $j=1,2$. On obtient donc une seconde condition de stabilité : a_j , $j=1,2$ doivent être réels [8].

Pour les équations de conservation, D. Serre [S05] a démontré que cette dernière condition était liée à l'hyperbolicité des équations de Whitham du premier ordre donnant l'évolution des modulations de ces trains d'onde. J'ai obtenu un résultat similaire pour les équations de Saint Venant: les équations de Whitham forment un système de deux lois de conservation sur le nombre d'onde local et la hauteur moyenne locale. On peut justifier mathématiquement ce système en construisant des solutions de (SV) proches des modulations des roll-waves sur des temps d'ordre $O(T/\varepsilon)$ où $1/\varepsilon$ désigne la longueur d'onde caractéristique des modulations. J'ai également poussé l'analyse de D. Serre et obtenu un système de Whitham "visqueux" dont la parabolicité assure la stabilité spectrale au voisinage de l'origine [S2]. Ce dernier système est l'analogue de l'équation de Burgers visqueuse utilisée pour démontrer la stabilité non-linéaire des ondes périodiques pour les systèmes de réaction diffusion.

Plus récemment, j'ai obtenu un résultat de stabilité non linéaire 1d sous certaines hypothèses spectrales

[16]: on montre en fait qu'une perturbation localisée d'une roll-wave converge vers une roll-wave modulée. La solution exacte est décomposée en une onde périodique modulée et une perturbation. A l'aide d'une analyse détaillée du semi groupe et en formulant le problème sous la forme d'un point fixe, on démontre ensuite que cette perturbation et le gradient de la modulation décroissent algébriquement au cours du temps alors que la phase reste bornée. On traite la perte de dérivée dans les estimations linéaires (dûe à la présence d'une viscosité physique) en utilisant une estimation à la Kawashima (utilisation d'un symétriseur et compensation de dérivées). Cette étude a été complétée par la vérification numérique des hypothèses de stabilité spectrale [N3] (méthode de Hill, voir juste après pour une description, et analyse de la fonction de Evans). Comme les solutions constantes sont instables, on sait déjà que les solutions de petite amplitude (proche d'un état constant) et les solutions de grande longueur d'onde (asymptotiquement proche d'une constant) sont nécessairement instables. On montre en fait qu'il existe une gamme de longueur d'ondes pour lesquelles les roll-waves sont spectralement stables.

Stabilité de trains d'ondes périodiques pour Korteweg-de Vries/Kuramoto-Sivashinsky: [N4,S1,S6]

L'équation (KdV/KS) est obtenue à partir des équations de (NS) à surface libre au voisinage du seuil critique de stabilité dans la limite petite amplitude/grande longueur d'onde. C'est une équation canonique pouvant décrire d'autres instabilités (plasmas, front de flamme). L'équation de (KS) en particulier possède une grande variété de solutions périodiques [EMR98]. On sait, quasiment depuis l'introduction de l'équation, qu'il existe des gammes de périodes pour lesquelles les ondes périodiques sont spectralement stable [FST86, CD02]: ce résultat a été obtenu numériquement à l'aide d'une méthode spectrale de Hill. On développe les vecteurs propres généralisés et les coefficients du problème spectral en série de Fourier et on conserve un nombre fini de mode. Cette méthode converge sur tout sous ensemble compact du plan spectral ($\text{Re } \lambda, \text{Im } \lambda$). Cependant la méthode de Hill n'est pas assez précise au voisinage de l'origine et il faut faire des calculs de nombre de rotation sur la fonction de Evans pour assurer la stabilité spectrale. Cette approche a été mise en œuvre dans [N4,S6]. On a également démontré un résultat de stabilité modulationnelle (non-linéaire), problème ouvert depuis l'introduction de l'équation. J'ai également obtenu un système de modulation de Whitham (visqueux et non visqueux) à partir de KdV/KS et montré le lien avec le spectre complet au voisinage de l'origine. Un cas particulièrement intéressant est celui de la limite de (KdV): dans ce cas, le système de modulation du premier ordre est un système de 3 lois de conservation (celles associées à KdV, [W65]) et d'un terme source. On peut, dans ce cas, déduire des conditions de stabilité de type sous caractéristique (on doit avoir un ordre entre les vitesses caractéristiques du système de Whitham pour KdV et celles du système limite obtenu à partir de KdV/KS).

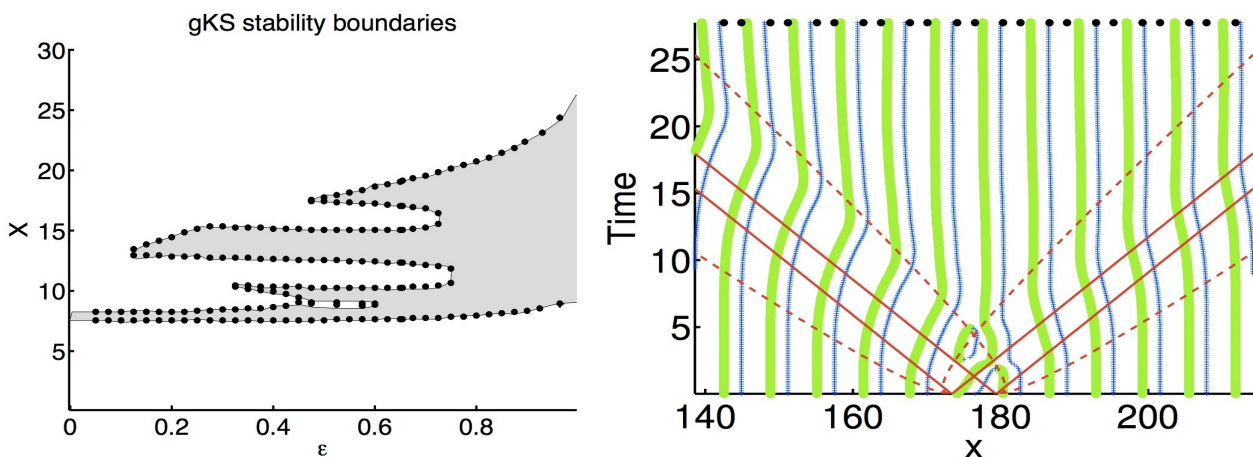


Figure 4: stabilité des ondes périodiques de KdV/KS

A gauche: la zone grisée correspond à la famille d'ondes périodiques stables : X représente la période et ϵ représente le coefficient dans l'interpolation entre le terme de Korteweg-de Vries et celui de Kuramoto-Sivashinsky ($\epsilon = 0$ correspond à KS, $\epsilon = 1$ correspond à KdV) [N4,S6]. *A droite:* simulation directe de l'équation (KdV/KS) lorsqu'une onde périodique stable est perturbée. Les lignes rouges représentent les caractéristiques du système de modulation de Whitham.

Travail en cours: La limite KdV dans l'équation KdV/KS est particulièrement intéressante: en effet, pour l'équation de (KdV), on sait déterminer explicitement le spectre (purement imaginaire) et les vecteurs propres [BD09]. Je termine actuellement l'étude de stabilité spectrale des ondes périodiques dans cette limite

[S8]. Cette étude s'articule en 3 parties: on montre d'abord que les valeurs propres instables sont nécessairement d'ordre $O(1)$ uniformément par rapport à $(\varepsilon-1)$. Loin de l'origine $(\lambda, \xi)=(0,0)$, on obtient un développement des valeurs propres par rapport à $(\varepsilon-1)$, partant des valeurs propres associées à KdV: le correcteur (réel) s'exprime explicitement à l'aide de fonctions elliptiques. On analyse enfin le spectre au voisinage de $(0,0)$ à l'aide d'un développement de la fonction de Evans par rapport à $(\lambda, \xi, \varepsilon-1)$. Un résultat particulièrement intéressant est que la stabilité au voisinage de l'origine est entièrement déterminé par les conditions sous caractéristiques obtenues sur le système de Whitham avec terme source obtenu dans [S1].

Je travaille également sur l'étude de stabilité non-linéaire des ondes périodiques des lois de conservations et en particulier sur la dynamique de retour à l'équilibre. L'objectif est de montrer qu'elle est décrite par le système de Whitham [S8]. On a en particulier revisité les résultats de stabilité non linéaire de Schneider et ses co-auteurs sur les systèmes de réaction diffusion et obtenu une preuve plus simple et surtout plus robuste puisque nous sommes en mesure de l'adapter pour les lois de conservation [S3,S4].

2.3 Projet de recherche

Stabilité spectrale des roll-waves: La question qui me semble la plus importante et certainement la plus difficile est de montrer analytiquement la stabilité spectrale des roll-waves. L'objectif est d'étayer les différents résultats de stabilité non-linéaire déjà obtenus. Un cas possible est celui de la transition à l'instabilité. Par exemple on peut obtenir l'équation de KdV/KS dans la limite KdV à partir des équations de (SV) visqueuses ou des équations de (NS) au voisinage du seuil critique d'instabilité. En utilisant les résultats de stabilité spectrale obtenus analytiquement pour (KdV/KS), je compte en déduire un résultat analytique de stabilité spectrale des roll-waves pour (SV). Cette approche s'est révélée fructueuse pour les instabilités de convection de Couette Taylor ou de Rayleigh Bénard [M96, S98]. On peut également montrer l'existence d'ondes périodiques pour les équations de (NS) au voisinage du seuil d'instabilité critique [NTY05]: en combinant avec le résultat d'approximation par l'équation de (KdV/KS), on doit également obtenir un résultat de stabilité spectrale pour le problème complet de (NS). Ceci constitue la première étape d'une preuve de stabilité non linéaire de roll-waves pour le système complet de Navier Stokes qui reste à ce jour une question ouverte.

Un cas limite particulièrement intéressant est celui de la limite de viscosité nulle dans les modèles de (SV). A l'aide de techniques de perturbation singulière (théorème de Fénichel), on peut montrer que les roll-waves continues convergent vers les roll-waves de Dressler discontinues dont on connaît explicitement le profil [1]. Il n'y a pas d'exemple dans la littérature de connection entre la stabilité des ondes périodiques continues et des ondes périodiques discontinues. Le seul résultat s'en approchant concerne la stabilité des chocs visqueux : on montre que le développement de la fonction de Evans au voisinage de l'origine est donné à l'ordre par le déterminant de Lopatinskiï pour le choc non visqueux. L'étude (numérique) complète du problème spectral limite (non visqueux) est une étape clé de l'analyse qu'il faut combiner à une preuve de convergence du problème spectral continu dans la limite faible viscosité à l'aide de techniques de perturbation singulières.

Solutions composites de type chocs en paramètres: La stabilité non linéaire des ondes périodiques pour les équations de Saint Venant ou les systèmes de réaction diffusion et la justification des équations de Whitham visqueuses ne sont établies que pour certaines perturbations. Elles doivent être soit localisées [16,S1] soit modulées mais, dans ce cas, la phase doit être bornée et le nombre d'onde intégrable, ce qui signifie qu'on ne change pas la période de la roll-wave [S3,S4,S8]. Un cas particulièrement intéressant est celui des données initiales reliant deux ondes périodiques différentes. Pour le système de modulation de Whitham, cela correspond à des solutions de type chocs dont on sait montrer l'existence et la stabilité. Il serait particulièrement intéressant d'établir l'existence et la stabilité de ces ondes généralisées pour le modèle de (SV). Ce problème a déjà été résolu pour les systèmes de réaction diffusion : le problème est plus simple car les chocs sont solutions d'une équation de Burgers visqueuse scalaire. Dans le cas des équations de (SV) ou (KdV/KS), les équations de modulation de Whitham forment un système. Cependant, en travaillant avec les invariants de Riemann, on peut obtenir une équation de Burgers visqueuse. En combinant ce résultat d'approximation avec les techniques de dynamique spatiale utilisées pour les systèmes de réaction diffusion, on doit pouvoir obtenir l'existence de solutions de type chocs pour les systèmes de lois de conservation visqueuses dans le régime de stabilité des ondes périodiques. En établissant la stabilité de ces ondes, on sera alors en mesure d'étudier des perturbations plus générales des roll-waves.

Instabilités secondaires: Une autre question intéressante est de déterminer, pour un nombre de Reynolds

donné, la gamme de longueurs d'ondes pour laquelle les ondes périodiques sont stables. L'objectif est de continuer numériquement les courbes neutres de stabilité obtenues au voisinage du seuil critique mais aussi et surtout de détecter des bifurcations secondaires, à mesure qu'on augmente le nombre de Reynolds. La résolution de cette question est une étape clé de la compréhension de la transition vers la turbulence dans les films minces.

Une autre manière d'aborder ce problème est d'étudier le comportement des solutions de (KdV/KS) et (SV) au voisinage du seuil d'instabilité des ondes périodiques. Comme pour la transition à l'instabilité des états constants, on doit pouvoir obtenir certaines équations d'amplitudes comme l'équation de Ginzburg Landau ou encore celle Kuramoto-Sivashinsky portant sur une combinaison des paramètres de modulation: cette approche a été esquissée pour les systèmes de réaction diffusion sans pour autant faire de lien entre ces équations réduites et les ondes non-linéaires générées sur un système physique comme Rayleigh-Bénard ou Couette-Taylor. Cette approche doit nous permettre de décrire les instabilités secondaires faiblement non-linéaire.

Roll-waves en deux dimensions: Des expériences menées en laboratoire dans des canaux inclinés [LSG95] montrent l'existence, dans certains régimes, de roll-waves modulées dans la direction transverse à celle de propagation, donnant lieu à des motifs en damier. Pour décrire mathématiquement ces observations, il est donc important d'étudier la stabilité bidimensionnelle des roll-waves. Dans un premier temps, on s'attachera à démontrer l'existence de motifs en damier dans des films minces sur un plan incliné. Ce type de solutions existent pour les équations de Boussinesq modélisant la propagation des vagues : on montre l'existence de motifs de petite amplitude à l'aide d'une méthode de variété centrale. Je souhaite faire un travail similaire pour les équations de Saint Venant 2d avec topographie. Pour obtenir des solutions en damier de taille arbitraire, une solution consiste à étudier la stabilité transverse de roll-waves de taille arbitraire: on étudiera d'une part les modulations grandes longueurs d'onde analytiquement à l'aide des équations de Whitham et on fera une étude numérique du problème complet pour mettre en évidence les modes transverses les plus instables. Cette étape préalable doit fournir des conditions initiales pour faire une simulation numérique directe des équations de (SV) qui devra reproduire les expériences de [LSG]. Cette approche doit également valider le modèle de (SV) obtenu dans [12].

Tension de surface et autres effets dispersifs: Outre certains effets dimensionnels, les expériences de [LSG95] sur l'apparition de roll-waves dans des canaux montrent clairement des effets de tension de surface. En effet, les zones de chocs ne sont pas monotones et en avant de chaque choc, il y a une série de petites oscillations secondaires caractéristiques des effets de capillarité. Le modèle d'ordre 1 de (SV) justifié dans [9] en présence de tension de surface sera le point de départ de l'étude: ce modèle n'a pas de terme de dissipation. Pour rester dans un cadre proche des roll-waves visqueuses, on pourra aussi considérer un modèle de (SV) d'ordre 2 qui contient des termes de dissipation. L'objectif est de comprendre le rôle de la tension de surface sur la stabilité spectrale et nonlinéaire des roll-waves.

Une classe de modèles proches des équations de (SV) avec tension de surface est formée par les modèles de Euler-Korteweg ou certains modèles de propagation de vagues (équations de Boussinesq) pour lesquels il n'existe pas d'étude de stabilité spectrale des ondes périodiques. Compte tenu du caractère hamiltonien des équations, le spectre est symétrique par rapport à l'axe réel et l'axe imaginaire et les ondes périodiques sont stables seulement si le spectre est confiné sur l'axe imaginaire. Je souhaite dans un premier temps faire une étude de stabilité spectrale numérique de ce problème. L'analyse des équations de Whitham doit également fournir des indications sur la stabilité spectrale des ondes périodiques et sur le comportement asymptotique des perturbations ondes longues. Contrairement aux cas des lois de conservation visqueuses, on ne peut pas avoir de stabilité asymptotique, au mieux un résultat de stabilité non-linéaire. On commencera donc par obtenir des résultats d'approximation sur des temps asymptotiquement long $O(T/\varepsilon)$ pour les équations hyperboliques de Whitham et éventuellement d'ordre $O(T/\varepsilon^3)$ pour des modèles de Whitham d'ordre supérieur.

Chocs dispersifs: Pour les modèles dispersifs considérés, comme les équations de (SV) avec tension de surface ou les modèles de propagation de vagues (Boussinesq), les termes de dispersion sont petits devant les autres termes (inertie, gravité). La question de la limite de dispersion nulle dans ces modèles me semble donc particulièrement intéressante. C'est une question difficile qui n'a de réponse que dans des cas simples comme l'équation de (KdV).

Dans la limite faible dispersion pour (KdV), il apparaît deux zones distinctes: une zone "lente" où la solution est décrite par l'équation de Burgers et une zone d'oscillation très rapide, décrite par les équations de

Whitham pour les ondes périodiques de Korteweg-de Vries et appelée choc dispersif. Cette zone d'oscillations rapides correspond en fait à un choc en paramètres reliant un état constant à la queue d'un soliton qui sont les deux extrémités de la famille des ondes périodiques. Pour l'équation de KdV, cette description repose sur la méthode de scattering inverse qui permet de résoudre explicitement l'équation : il suffit alors de faire tendre la dispersion vers 0 [LL83]. Une approche plus robuste consiste à employer des développements raccordés entre zone lente et zone rapide. On construira au préalable des chocs en paramètres de l'équation de (KdV). La justification des développements raccordés pour (KdV) est une étape indispensable à la compréhension des chocs dispersifs dans un cadre plus général : pour les équations de (SV) ou de Boussinesq, le choc devrait être constitué d'une zone lente vérifiant les équations de Saint Venant non visqueuses et une zone rapide régie par les équations de Whitham qu'on aura établies au préalable (voir l'item précédent).

Ondes périodiques discrètes et semi-discrètes: La simulation directe du système de (KdV/KS) présentée à la figure 4 est le résultat d'une simulation numérique: on peut se demander si le résultat obtenu reflète bien le résultat analytique de stabilité non linéaire. En particulier, si on veut étudier le comportement en temps long, il faut que le schéma numérique respecte bien les vitesses caractéristiques du système de Whitham et que la dissipation numérique ne viennent pas occulter la dissipation prédite par les équations de modulation.

Dans un premier temps, j'aborderai la question de l'existence et de la stabilité d'ondes périodiques pour les équations de (SV) discrétisées ou semi-discrétisées en espace pour des schémas classiques (Schemas de Roe, Lax Wendroff), le problème complètement discret étant plus difficile. Ces questions ont été très étudiées dans le cas de chocs ([MR79]: existence de chocs discrets, [BHR03]: existence et stabilité de chocs semi-discrets) à l'aide d'outils issus aussi bien de la théorie des systèmes dynamiques (réduction à une variété centrale, formes normales, bifurcations) que celle des systèmes de lois de conservation hyperboliques (fonctions de Evans, fonctions de Green) alors qu'il y a très peu de travaux pour les ondes périodiques discrètes et semi-discrètes (notamment sur leur stabilité). Il serait en particulier très intéressant d'obtenir et d'étudier les équations de Whitham pour les ondes périodiques discrètes et semi-discrètes.

Dans un second temps, je souhaite aborder la question du comportement asymptotique et voir si les schémas mis en jeu permettent d'obtenir correctement les vitesses caractéristiques des équations de Whitham. C'est une question portant essentiellement sur le caractère asymptotiquement préservant des schémas mis en jeu. C'est un problème déjà largement abordé pour les systèmes de lois de conservation avec terme source dans le régime de relaxation: une des étapes préalables est, dans certains cas, que le schéma capte exactement les solutions stationnaires (caractère "well balanced"). La question ici semble d'autant plus difficile que les ondes stationnaires ne sont pas constantes: on commencera donc par comparer les résultats pour des schémas captant ou non les états constants formellement (calcul de consistance) et numériquement.

BIBLIOGRAPHIE (REFERENCES)

- [A05] E. Audusse : *A multilayer Saint Venant model : derivation and numerical validation*. **DCDS Serie B** (2005)
- [ABPS11] E. Audusse, M.O. Bristeau, B. Perthame, J. Sainte Marie : *A multilayer Saint Venant system with mass exchanges for shallow water flows. Derivation and numerical validation*. **ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis** 45 (2011) 169-200.
- [AL08] B. Alvarez-Samaniego, D. Lannes: *Large time existence for 3D water-waves and asymptotics*. **Invent. Math** 171 (2008), no. 3, 485–541.
- [BB11] F. Bouchut, S. Boyaval : *A new model for shallow elastic fluids*. **Preprint** (2011) arXiv1110 :0799.
- [BC99] N.J. Balmforth, R.V. Craster : *A consistent thin-layer theory for Bingham plastics*. **Journal of Non Newtonian Fluid Mechanics** (1999).
- [BD09] N. Bottman, B. Deconinck: *KdV cnoidal waves are spectrally stable*. **DCDS** 25 (2009), no. 4, 1163-1180.
- [BHR03] S. Benzoni-Gavage, P. Huot, F. Rousset : *Nonlinear stability of semidiscrete shock waves*. **SIAM J. Math. Anal.** 35 (2003), no 3, 639-707.
- [BL04] N.J. Balmforth, J.J. Liu : *Roll waves in mud*. **J.F.M.** 519 (2004), 33-54.
- [BNV10] D. Bresch, E.D. Fernandez-Nieto, I.R. Ionescu, P. Vigneaux : *Augmented Lagrangian Method and Compressible Visco-plastic Flows: Applications to Shallow Dense Avalanches* , **Advances in Mathematical Fluid Mechanics** (2010) 57-89.
- [BW04] F. Bouchut, M. Westdickenberg : *Gravity driven shallow water models for arbitrary topography*. **Comm. Math. Sci** 2 (2004) no. 3, 359-389.
- [CD02] H.C. Chang, E.A. Demekhin : *Complex Wave Dynamics on Thin Films*. **Elsevier** (2002).

- [D49] R.F. Dressler : *Mathematical Solution of the problem of roll-waves in inclined open channels*. **CPAM** 2 (1949) 149-194.
- [DSSS09] A. Doelman, B. Sandstede, A. Scheel, G. Schneider : *The dynamics of modulated wave trains*. **Mem. Amer. Math. Soc.** 199 (2009) no. 934.
- [EJL11] A. Ern, R. Joubaud, T. Lelièvre : *Numerical study of a thin liquid film flowing down an inclined wavy plane*. **Physica D : Nonlinear phenomena** 240 (2011) no 21, 1714-1723.
- [EMR98] N.M. Ercolani, D.W. McLaughlin, H. Roitner : *Attractors and transients for a perturbed periodic KdV equation : a nonlinear spectral analysis*. **J. Nonlinear Sci.** 3 (1998) no. 1, 477-539.
- [FST86] U. Frisch, ZS She, O. Thual: *Viscoelastic behaviour of cellular solutions to the Kuramoto-Sivashinsky model*. **J.F.M.** 168 (1986), 221-240.
- [G93] R.A. Gardner: *On the structure of the spectra of periodic travelling waves*. **J.M.P.A.** (9) 72 (1993), no. 5, 415-439.
- [GP01] J.-F. Gerbeau, B. Perthame: *Derivation of viscous Saint Venant system for laminar shallow water ; numerical validation*. **DCDS Serie B** 1 (2001), no 1, 89-102.
- [H85] A. P. Hooper, *Long-wave instability at the interface between two viscous fluids: Thin layer effect*, **Phys. Fluids** 28 (1985) 1613–1618.
- [JK00] S. Jin, M.A. Katsoulakis: *Hyperbolic systems with supercharacteristic relaxations and roll waves*. **SIAM J. Appl. Math.** 61 (2000), no. 1, 273-292.
- [K99] I. L. Kliakhandler, *Long interfacial waves in multilayer thin films and coupled Kuramoto–Sivashinsky equations*, **J. F.M.** 391 (1999) 45–65.
- [L92] A.N. Lyberopoulos: *Large-time structure of solutions of scalar conservation laws without convexity in the presence of a linear source field*. **JDE**99 (1992) no. 2, 342–380.
- [LL83] P.D. Lax, D.C. Levermore : *The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I, II, III*. **CPAM** 36 (1983)
- [LSG95] J. Liu, J.B. Schneider, J.P. Gollub : *Three dimensional instabilities of film flows*. **Phys Fluids** 7 (1995) 55.
- [M83] A. Majda : *The stability of multidimensional shock fronts*. **Mem. Amer. Math. Soc.** 41 (1983), no. 275.
- [M97s] A. Mielke : *Instability and stability of rolls in the Swift-Hohenberg equation*. **Comm. Math. Phys.** 189 (1997) no. 3. 829-853.
- [M97r] A. Mielke : *Mathematical analysis of sideband instabilities with application to Rayleigh-Bénard convection*. **J. Nonlinear Sci.** 7 (1997), no. 1, 57-99.
- [MBV05] A. Mangeney-Castelnaud, F. Bouchut, J.-P. Vilotte, E Lajeunesse, A Aubertin, M. Pirulli: *On the use of Saint Venant equations to simulate the spreading of a granular mass*. **J. Geophys. Res.** 110 (2005).
- [MN84] J.H. Merkin, D.J. Needham : *On roll waves down an incline plane*. **Proceedings of the Royal Society A** 394 (1984) no. 1807, 259-278.
- [MR79] A. Majda, J. Ralston : *Discrete shock profiles for systems of conservation laws*. **CPAM** 32 (1979), no 4, 445-482.
- [NTY05] T. Nishida, Y. Teramoto, H. Yoshihara *Hopf bifurcation in viscous incompressible flow down an inclined plane*. **J. Math. Fluid. Mech.** 7 (2005) no. 1, 29-71.
- [P79] J. Pedlovsky : *Geophysical Fluid Dynamics*. **Springer- Verlag, Berlin** (1979)
- [RM98] C. Ruyer-Quil, P. Manneville: *Modeling film flows down inclined plane*. **European Physical Journal B : Condensed Matter and Complex Systems** 6 (1998) no. 2, 277-292
- [S96] G. Schneider : *Diffusive stability of spatial periodic solutions of the Swift-Hohenberg equation*. **CMP** 178 (1996) no. 3, 679-702.
- [S98] G. Schneider : *Nonlinear stability of Taylor vortices in infinite cylinders*. **ARMA**144 (1998), no. 2, 121-200.
- [S05]D. Serre : *Spectral stability of periodic solutions of viscous conservation laws: large wavelength analysis*. **CPDE** 30 (2005) no1-3, 259–282
- [S08] P. Saramito *A new elastoviscoplastic model based on the Herschel–Bulkley viscoplastic model*. **J. Non Newtonian Fluid Mechanics** 158 (2008) no 1-3, 154-161.
- [W65] G.B. Whitham : *Non-linear dispersive waves*. **Proc. Roy. Soc. Ser. A** 283 (1965) 238-261.
- [Y63] C. S. Yih : *Stability of liquid flow down an inclined plane*, **Phys. Fluids** 6 (1963) 321–334.
- [Y67] S. Yih, *Instability due to viscosity stratification*, **J. Fluid. Mech.** 27 (1967) 337.

6 – DESCRIPTION DES ACTIVITES D'ENSEIGNEMENT, PÉDAGOGIQUES ET ADMINISTRATIVES

Activités d'enseignement au cours des 5 dernières années: Université Lyon 1

Enseignements de Licence:

- ▲ TD L1 Analyse 1 (2009-, 36HETD): \mathbf{R} , bornes sup/inf. Suites réelles. Fonctions réelles (limites, continuité, dérivabilité), Théorème de Rolle, Accroissements finis. EDO.
- ▲ Cours L1 Analyse 2 (2010, 36HETD) : Fonctions usuelles, Formules de Taylor, Développements Limités, Intégrale de Riemann.
- ▲ TD L2 Introduction EDO/EDP (2009, 36HETD) : Résolution d'équations et de systèmes différentiels linéaires et non linéaires, portraits de phase, Etudes qualitatives (pendule, modèles proie/prédateurs), Méthode de Laplace pour les edo et certaines edp (équation des ondes). Résolution d'edp (séparation de variable, changement de variable).
- ▲ TD L3 Calcul Différentiel (2007-2010, 36HETD): Différentielle dans les espaces normés. Différentielles partielles. Théorème des accroissements finis et applications. Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites. Différentielles d'ordre supérieur. Fonctions de classe C^r sur un ouvert. Formules de Taylor. Extrema libres et liés. Notions de calcul des variations. Équations différentielles : problème de Cauchy ; solutions globales, solutions maximales ; portrait de phase.
- ▲ TD Calcul Intégral (2010, 36HETD): Algèbres et tribus. Questions d'engendrement. La tribu borélienne. Mesures positives définies sur les algèbres et sur les tribus. La mesure extérieure. Le prolongement de Lebesgue. Fonctions mesurables. Intégration des fonctions mesurables positives. Intégration des fonctions mesurables réelles. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue et ses conséquences. Mesure produit. Théorème de Fubini. Mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^n : théorème du changement de variables. Théorème de Radon-Nikodym.

Enseignements de Master:

- ▲ Cours/TD M1 Optimisation à l'Institut de Science Financière et d'Assurance (2007/2008, 60HETD): Programmation linéaire (algorithme du simplexe), Optimisation quadratique et résolution (directe ou itérative) de systèmes linéaires, Optimisation sous contrainte (multiplicateurs de Lagrange).
- ▲ TD M1 Introduction aux équations différentielles (2007, 36HETD): Problème de Cauchy: existence, unicité de solutions, solutions maximales, dépendance par rapport aux données initiales/paramètres. Equations linéaires à coefficients constants, périodiques (theorie de Floquet). Equations non linéaires autonomes: étude qualitative, flot, orbites, portraits de phase, solutions périodiques, analyse de stabilité.
- ▲ Cours M1 Introduction aux équations aux dérivées partielles (2008-2010, 36HETD) : Modélisation: du problème physique aux équations (transport, diffusion, mécanique des fluides). Equations du 1er ordre: méthode des caractéristiques, théorème de Cauchy-Kowalewsky, équation des ondes. Transformée de Fourier, convolution et résolution de l'équation de la chaleur. Méthode de Laplace et de la phase stationnaire. Solutions faibles, chocs de l'équation de Burgers.
- ▲ Cours M2 Modélisation et analyse mathématique des écoulements de faible profondeur (2009, 36HETD): problème des water waves. Obtention des modèles de propagation de vagues : équations de Korteweg de Vries, Saint Venant Green-Nagdhi, Serre, Boussinesq. Caractère bien posé des lois de conservation hyperboliques, paraboliques, mixtes.
- ▲ Préparation à l'agrégation (2007-2008, 36HETD) : option calcul scientifique (EDO, EDP, algèbre linéaire numérique, optimisation)

Délégations, CRCT: Automne 2009 : Délégation au CNRS. Printemps 2011: CRCT. Printemps 2012 : décharge ANR JCJC (sur le projet SWECF dont je suis porteur).