Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

Séance du 21/04/2010
Résolution de certaines équations aux dérivées partielles

Exercice 1.

1. Si on note $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, on obtient asiément l'inverse de P en calculant r et θ en fonction de x et y. On a
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Ces fonctions sont clairement dérivables pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. Si on note $u(r, \theta) = w(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, on a, en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées:
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \cos(\theta)\frac{\partial w}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial w}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r\sin(\theta)\frac{\partial w}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}$$
En inversant cette relation, on peut obtenir les dérivées partielles de w en fonction de celle de u:
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned}$$
On en déduit que
$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = r\frac{\partial u}{\partial r} = ar.$$
Donc $\frac{\partial u}{\partial r} = a$.

3. On obtient aisément une solution de l'EDP vérifiée par u: $u(r, \theta) = ar + C(\theta)$ où C est une fonction arbitraire de θ. On en déduit toutes les solutions de l'équation de départ $w = u \circ P^{-1}$.

Exercice 2.

1. On remarque que le changement de variable proposé est linéaire:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Le déterminant de la matrice de changement de variable vaut $-2ab$ donc est inversible. Si on pose $u(x,y) = w(X,Y)$, on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b\frac{\partial w}{\partial X} + b\frac{\partial w}{\partial Y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{\partial w}{\partial X} - a\frac{\partial w}{\partial Y},$$

   On en déduit que

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 2ab\frac{\partial w}{\partial X} = 0.$$

   On en déduit que $w(X,Y) = C(Y)$ où C est une fonction arbitraire. Les solutions de l'EDP de départ sont donc de la forme $u(x,y) = C(bx - ay)$.

2. En reprenant les notations de la question précédente, on obtient:

$$2ab\frac{\partial w}{\partial X} + c\,w = 0.$$

   Les solutions de cette EDP sont de la forme $w(X,Y) = C(Y)e^{-\frac{cX}{2ab}}$ où C est une fonction arbitraire. Les solutions de l'EDP de départ sont donc de la forme

$$u(x,y) = C(bx - ay)e^{-\dfrac{c(bx+ay)}{2ab}}.$$

Exercice 3.

1. Si on pose $u(x,t) = w(X,Y)$ avec $X = x - ct, Y = x + ct$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial Y}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial w}{\partial X} + c\frac{\partial w}{\partial Y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + 2\frac{\partial w}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} - 2\frac{\partial w}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2}\right).$$

   On en déduit l'EDP pour w:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4c^2\frac{\partial w}{\partial X\partial Y} = 0.$$

   On obtient alors que w doit être de la forme $w(X,Y) = \phi(X) + \psi(Y)$ et $u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$;

2. On cherche une solution du problème posé sur le demi espace $x > 0$ sous la forme $u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$. Pour satisfaire les conditions initiales, il faut $\phi(x) + \psi(x) = f(x)$ et $c\psi'(x) - c\phi'(x) = g(x)$. On obtient un système linéaire pour ϕ', ψ':

$$\phi'(x) + \psi'(x) = f'(x), \quad \psi'(x) - \phi'(x) = \frac{g(x)}{c}, \quad \forall x \geq 0.$$

Enfin, pour vérifier la condition aux limites en $x = 0$, il faut $\phi(-ct)+\psi(ct) = 0$, $\forall t > 0$. On remarque que on a toujours $x + ct \geq 0$ donc on n'a besoin de définir ψ que sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\psi'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{g(x)}{2c}$, on a

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{2} - \int_0^x \frac{g(y)}{2c} + \psi(0).$$

De même, pour $x \geq 0$, on a

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{2} + \int_0^x \frac{g(y)}{2c} - \psi(0).$$

Enfin pour $x < 0$, on utilise la condition aux limites qui s'écrit également $\phi(-y) + \psi(y) = 0$, $\forall y > 0$. On définit donc, pour $x < 0$, $\phi(x) = -\psi(-x)$, ce qui achève de déterminer la solution u du problème initial:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{g(y)}{2c} dy, \quad \forall x < ct,$$
$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) - f(ct-x)}{2} + \int_{ct-x}^{x+ct} \frac{g(y)}{2c} dy, \quad \forall x > ct.$$

3. Les questions 3 et 4 ne posent pas de difficulté (il suffit de remplacer....). Dans la question 4, on observe un phénomène de reflexion. Dans un premier temps, le signal se sépare en 2, le premier partant à droite, le second à gauche. Quand il atteind le bord du domaine, ce dernier est réfléchi et repart vers la droite.

Exercice 4.

1. On dérive la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à t:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 (I), \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0. (II)$$

En faisant $(II) - c^2(I)$, on obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

On peut montrer un résultat analogue sur u. Ensuite, on a, d'aprs l'exercice précédent, $p(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$. Donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\big(\phi'(x-ct) + \psi'(x+ct)\big),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho c}\big(\phi'(x-ct) - \psi'(x+ct)\big),$$

Ce qui donne, en intégrant la deuxième équation par rapport à x:

$$u(x,t) = \frac{1}{\rho c}\big(\phi(x-ct) - \psi(x+ct)\big) + H(t)$$

où H est une fonction de t arbitraire. En dérivant cette expression par rapport à t et en comparant avec la formule obtenue pour $\frac{\partial u}{\partial t}$, on en déduit que $H'(t) = 0$ donc H est simplement une constante.

2. On a aisément

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t} = -c\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\Big),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t} = c\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\Big),$$

D'où le système

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + c\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - c\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0.$$

On en déduit (voir par exemple l'exercice 2) que $u_1(x,t) = \phi(x-ct)$ et $u_2 = \psi(x+ct)$ où ϕ et ψ sont des fonctions arbitraires. On en déduit les expressions de u, p en inversant le système linéaire définisant u_1, u_2.

Exercice 5.

1. En reprenant les notations de l'exercice 1, on a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + s^2\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\Big) - \frac{2sc}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta},$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = s^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + c^2\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\Big) + \frac{2sc}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta},$$

où $s = \sin(\theta)$ et $c = \cos(\theta)$. En sommant ces deux égalités, on obtient le Laplacien en coordonnées polaires.

2. Les solutions de l'équation de Laplace la forme $w(x,y) = \Phi(r)$ vérifient $r\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$. Ce qu'on peut aussi écrire $\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}) = 0$. Donc $r\frac{\partial \Phi}{\partial r}) = K$, K une constante et $\Phi(r) = K\log(r) + L$ où L est une constante.