Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

Correction de la feuille de TD 6 (calcul+EDO)

Exercice 1 (Calcul de transformées de Laplace)

1. On montre aisément que

   $$L[f(.+\tau)](p) = e^{p\tau}L[f](p), \quad L[f(.\,\tau)](p) = \tau^{-1}L[f](p/\tau), \quad L[f(.)e^{\cdot\tau}](p) = L[f](p-\tau).$$

   Pour le calcul de $L[f']$, on fait une intégration par partie:

   $$L[f'](p) = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = pL[f](p) - f(0).$$

2. Si f est T périodique, on peut écrire

   $$L[f](p) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T f(s+nT)e^{-p(nT+s)}ds$$

   En utilisant la périodicité de f, on en déduite que

   $$L[f](p) = \big(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}\big)\int_0^T f(s)e^{-ps}ds = (1-e^{-pT})^{-1}\int_0^T f(s)e^{-ps}dt.$$

3. D'après la question précédente, il suffit de calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(s)e^{-ps}ds$ pour $f = \cos$ et $f = \sin$. On va en fait calculer cette quantité pour $f(s) = e^{is}$ et on identifiera partie réelle et partie imaginaire:

   $$\int_0^{2\pi} e^{is}e^{-ps}ds = \frac{1-e^{-2\pi p}}{p-i} = (1-e^{-2\pi p})\frac{p+i}{p^2+1}$$

   D'où, en séparant partie réelle et partie imaginaire:

   $$L[cos](p) = \frac{p}{p^2+1}, \quad L[sin](p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

4. On a

   $$\int_0^T f(s)e^{-ps}ds = \int_0^{T/2} e^{-ps}ds - \int_{T/2}^T e^{-ps}ds = \frac{(1-e^{-pT/2})^2}{p}.$$

   Donc

   $$L[f](p) = \frac{(1-e^{-pT/2})^2}{p(1-e^{-pT})} = \frac{1-e^{-pT/2}}{p(1+e^{pT/2})} = e^{-pT/2}\frac{\tanh(pT/4)}{p}.$$

5. Pour établir la relation, on utilise la relation $L(f') = pL(f) - f(0)$, qu'on peut réécrire $L[f](p) = \big(L[f'](p) + f(0)\big)/p$. On utilise alors le fait que pour $k \geq 1$, la fonction $t \mapsto t^k$ s'annule en 0 et sa dérivée est $t \mapsto kt^{k-1}$, ce qui donne $L[t^k] = kL[t^{k-1}]/p$. Ensuite, on montre facilement que $L[1](p) = 1/p$ d'où

$$L[t^k](p) = \frac{k}{p}L[t^{k-1}](p) = \frac{k(k-1)}{p^2}L[t^{k-2}](p) = \ldots = \frac{k!}{p^k}L[1](p) = \frac{k!}{p^{k+1}}.$$

6. De la question 1, on a $L[e^{\cdot\tau}f(.)](p) = L[f](p-\tau)$ donc

$$L[\frac{e^{t\tau}t^k}{k!}](p) = \frac{1}{(p-\tau)^{k+1}}.$$

7. Pour calculer la transformée de Laplace du produit de convolution $f \star g$, on écrit

$$L[f \star g](p) = \int_0^\infty \int_0^t f(t-s)^{-p(t-s)}g(s)e^{-ps}dsdt$$

En échangeant l'ordre de sommation, on a alors

$$L[f\star g](p) = \int_0^\infty \int_s^\infty f(t-s)^{-p(t-s)}g(s)e^{-ps}dtds = \int_0^\infty g(s)e^{-ps}\big(\int_s^\infty f(t-s)e^{-p(t-s)}dt\big)ds.$$

On utilise le changement de variable $u = t - s$ dans l'intégrale entre parenthèse et on a

$$L[f \star g](p) = \int_0^\infty g(s)e^{-ps}L[f](p)ds = L[f](p)L[g](p).$$

Exercice 2 (Résolution d'EDO linéaires)

1. D'après la question 1, de l'exercice précédente, on a $L[x^{(n)}](p) = pL[x^{(n-1)}](p) - x^{(n-1)}(0)$. Par récurrence, on montre donc que

$$L[x^{(n)}](p) = p\Big(pL[x^{(n-2)}] - x^{(n-2)}(0)\Big) - x^{(n-1)}(0) = \ldots = p^nL[x](p) - \sum_{i+j=n-1} p^j x^{(i)}(0).$$

2. On passe à la transformée de Laplace sur $x' + ax = f$ avec $x(0) = x_0$: on obtient

$$pL[x](p) - x_0 + aL[x](p) = L[f](p).$$

On en déduit donc que

$$L[x](p) = \frac{x_0}{p+a} + \frac{L(p)}{(p+a)} = x_0L[e^{-at}](p) + L[e^{-at}](p)L[f](p) = x_0L[e^{-at}](p) + L[e^{-at}\star f](p).$$

Ici, on a utilisé la relation $L[f](p)L[g](p) = L[f \star g](p)$. Par unicité de la transformée de Laplace, on obtient donc une formule usuelle pour x:

$$x(t) = x_0e^{-at} + \int_0^t f(s)e^{-p(t-s)}dt.$$

3. Pour résoudre $x''(t) + x(t) = 2\cos(t)$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$, on passe à la transformée de Laplace sur l'EDO en utilisant les conditions initiales:

$$\left(p^2 L[x](p) - 1\right) + L[x](p) = 2\frac{p}{p^2+1}.$$

On en déduit que

$$L[x](p) = \frac{1}{(p^2+1)} + \frac{2p}{(p^2+1)^2} = L[\sin](p) + 2L[\cos](p)L[\sin](p) = L[\sin + 2\sin \star \cos](p).$$

On en déduit que

$$x(t) = \sin(t) + \int_0^t \sin(s)\cos(t-s)ds = \sin(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t) + \sin(2s-t)ds = \sin(t) + \frac{t}{2}\sin(t),$$

car $\int_0^t \sin(2s-t)ds = \int_{-t}^t \sin(u)du = 0$.

4. Pour résoudre $x^{(3)}(t) + x'(t) = 1$, avec $x(0) = x'(0) = x(0) = 0$, on passe à la transformée de Laplace et on obtient:

$$p^3 L[x](p) + pL[x](p) = L[1](p) = \frac{1}{p}.$$

On en déduit que

$$L[x](p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = L[sin](p)L[t](p) = L[\sin \star t](p).$$

On en déduit donc que x est donné par:

$$x(t) = \int_0^t s\sin(t-s)ds = \sin(t)\int_0^t s\cos(s)ds - \cos(t)\int_0^t s\sin(s)ds.$$

On calcule en utilisant une intégration par partie:

$$\int_0^t e^{is}sds = [\frac{e^{is}}{i}s]_0^t - i^{-1}\int_0^t e^{is}ds = \frac{te^{it}}{i} - i^{-2}(e^{it}-1) = te^{i(t-\pi/2} + e^{it} - 1.$$

En séparant partie imaginaire et réelle, on a

$$\int_0^t s\sin(s)ds = t\sin(t-\pi/2) + \sin(t) = \sin(t) - t\cos(t),$$
$$\int_0^t s\cos(s)ds = t\cos(t-\pi/2) + \cos(t) - 1 = t\sin(t) + \cos(t) - 1.$$

D'où $x(t) = t - \sin(t)$.

5. Pour résoudre le système différentiel

$$x'(t) + \omega y(t) = 1, \quad y'(t) - \omega x(t) = \sin(\omega t)$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 0$, on passe à la transformée de Laplace:

$$pL[x](p) - x(0) + \omega L[y](p) = L[1](p), \quad pL[y](p) - y(0) - \omega L[x](p) = L[\sin(\omega .)](p),$$
$$pL[x](p) + \omega L[y](p) = 1 + \frac{1}{p}, \quad pL[y](p) - \omega L[x](p) = \frac{1}{\omega(1 + (p/\omega)^2} = \frac{\omega}{\omega^2 + p^2}.$$

On résout ensuite ce système linéaire sous la forme

$$L[y](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}(1 + \frac{1}{p}) + \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad L[x](p) = \frac{p + 1}{p^2 + \omega^2} - \frac{\omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Pour identifier les différentes transformées de Laplace, on pourra se servir de la formule $L[\frac{t^m e^{\tau t}}{m!}] = \frac{1}{(p-\tau)^{m+1}}$: en fait cette formule est encore valable si $\tau \in \mathbb{C}$. En particulier lorsque $\tau = i\omega$, on a

$$L[\frac{t^m}{m!}\cos(\omega t)](p) = \Re\Big(\frac{1}{(p - i\omega)^{m+1}}\Big), \quad L[\frac{t^m}{m!}\sin(\omega t)](p) = \Im\Big(\frac{1}{(p - i\omega)^{m+1}}\Big).$$

En appliquant cette formule pour $m = 0, m = 1$, on a

$$L[\cos(\omega .)](p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad L[t\cos(\omega t)] = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad L[t\sin(\omega t)] = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

On écrit alors que

$$L[y](p) = \frac{1}{p\omega^2} - \frac{p}{\omega^2(p^2 + \omega^2)} + \frac{1}{2}\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2},$$
$$L[x](p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega}\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2} - \frac{p}{2\omega}\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

On en déduit

$$y(t) = \frac{1 - \cos(\omega t))}{\omega^2} + \frac{t}{2}\sin(\omega t),$$
$$x(t) = \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{2\omega} + \frac{t}{2}\cos(\omega t).$$

6. Les solutions générales de $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \cos(\omega t)$ ont leur transformées de Laplace qui vérifie

$$(p^2 - 3p + 2)L[x](p) = x'(0) + (p - 3)x(0) + \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Donc on obtient

$$L[x](p) = \frac{x'(0)}{(p - 1)(p - 2)} + \frac{(p - 3)}{(p - 1)(p - 2)}x(0) + \frac{p}{(p - 1)(p - 2)(p^2 + \omega^2)}.$$

On conclut en utilisant une décomposition en éléments simples et en identifiant les différentes transformées de Laplace intervenant dans $L[x](p)$ à l'aide des questions précédentes.

$$x(t) = x(0)(2e^t - e^{2t}) + x'(0)(e^{2t} - e^t) + x_p(t),$$
$$x_p(t) = -\frac{e^t}{1 + \omega^2} + \frac{2e^{2t}}{\omega^2 + 4} + \frac{(2 - \omega^2)\cos(\omega t) - 3\omega\sin(\omega t)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)}.$$