ISFA 2ème année Module: Optimisation 2007-2008

Série 1:
Programmation linéaire

Formulation mathématique-résolution graphique

Pour chaque exercice, formuler le problème de programmation linéaire et le résoudre graphiquement. Dans chaque cas, déterminer les sommets du polyèdre des contraintes.

Exercice 1. À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kilos de cacao, 8 kilos de noisettes et 14 kilos de lait. Il a deux spécialités: l'oeuf *Extra* et l'oeuf *Sublime*. Un oeuf *Extra* nécessite 1 kilo de cacao, 1 kilo de noisettes et 2 kilos de lait. Un oeuf *Sublime* nécessite 3 kilos de cacao, 1 kilo de noisettes et 1 kilo de lait. Il fera un profit de 20 euros en vendant un oeuf *Extra*, et de 30 euros en vendant un oeuf *Sublime*.

Combien d'oeufs *Extra* et *Sublime* doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible?

Exercice 2. Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de 8 euros sur chaque raquette ordinaire et de 15 euros sur chaque grande raquette. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre 30 et 80, et la production journalière de grandes raquettes entre 10 et 30. Pour maintenir une bonne qualité, le nombre de raquettes produites ne devrait dépasser 80 par jour.

Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum?

Exercice 3. Une entreprise fabrique deux produits qu'elle désire vendre aux USA. Le produit A rapporte 4 euros par kilo et le produit B rapporte 6 par kilo. Ayant des moyens financiers limités, la société ne peut affréter qu'un seul avion. Celui-ci ne peut transporter que 50 tonnes et a un volume de 2100 m^3. Le produit A a un volume de 30 m^3 par tonne, le produit B a un volume de 70 m^3 par tonne.

Combien de kilos de chaque produit l'entreprise doit-elle mettre dans l'avion afin de maximiser ses gains?

Exercice 4. La fabrication d'une pièce P_1 coûte 150 euros, celle d'une pièce P_2 100 euros. Chaque pièce est traitée successivement dans 3 ateliers. Le nombre d'heures-machines par pièce est indiqué dans le tableau suivant:

Atelier	A	B	C
Pièce 1	3 h	5 h	2 h
Pièce 2	1 h	3 h	3 h

Pour éviter le chômage technique, l'atelier A doit obligatoirement fournir 1200 heures machines, l'atelier B 3000 heures machines et l'atelier C 1800 heures machines. Combien faut-il fabriquer de pièces P_1 et P_2 pour minimiser le coût de revient de l'ensemble de la production et pour assurer le fonctionnement des trois ateliers excluant tout chômage technique?

Programmation linéaire à variables entières et énumération des sommets

Exercice 5. Le problème du voyageur de commerce Un représentant doit déterminer le circuit le plus rapide possible lui permettant de visiter successivement n villes et de revenir à son point de départ. On suppose qu'il connaît le temps d_{ij} pour aller de la ville i à la ville j (en particulier, on peut avoir $d_{ij} \neq d_{ji}$). On cherche à connaître le trajet le plus rapide. Formuler le problème de programmation linéaire associé.

Remarque: ce type de problème est aujourd'hui résolu par la théorie des graphes et non par les méthodes d'optimisation étudiées dans ce cours.

Exercice 6. Trois machines M_1, M_2, M_3 peuvent produire chacune deux types de pièces P_1 et P_2. Le temps de fabrication d'une pièce P_i sur la machine M_j est reporté dans le tableau suivant (temps en heures)

	M_1	M_2	M_3
Pièce 1	3	4	4
Pièce 2	4	6	5

On veut fabriquer au moindre coût 6 pièces P_1 et 8 pièces P_2. La machine M_1 est disponible 14 heures, les deux autres machines sont disponibles 24 heures. Le coût horaire de M_1 est 7, celui de M_2 est 5 et celui de M_3, 6.

i) Ecrire le programme linéaire associé.
ii) Résoudre ce problème en énumérant toutes les solutions entières possibles.

Exercice 7. On considère le problème de programmation linéaire

$$\min c^t x, \quad x \in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ / \, Ax = b\},$$

où $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

i) On admet le théorème de **Krein-Rutman**: *tout ensemble convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ est enveloppe convexe de ses points extremaux.* On suppose $\mathcal{P}$ borné. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = c^t x$ est bornée sur $\mathcal{P}$ et atteint ses bornes en des points extremaux de $\mathcal{P}$.

ii) Appliquer ce résultat pour trouver une solution optimale des problèmes de programmation linéaire:

$$\min -x_1 - 2x_2, \quad x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 - x_2 \leq 2, x_1, x_2 \geq 0.$$
$$\min -x_1 + 5x_2 - 3x_3, \quad , x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Algorithme du simplexe.

Dans les exercices suivants, appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre le problème de programmation linéaire.

Exercice 8. Une solution de base admissible est connue.

Résoudre les problèmes de programmation linéaire "initialisés"

$$\begin{cases} \min -10x_1 - 12x_2 - 12x_3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 20, \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + x_6 = 20, \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1, ..., 6\}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min -2x_1 - x_2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Remarque: on mettra ce dernier problème sous forme canonique en introduisant les variables d'écarts.

Exercice 9. Trouver une solution de base admissible initiale.

On considère le problème de programmation linéaire

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 + x_3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2, \\ 4x_2 + 9x_3 = 5, \\ 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Pour déterminer une solution de base admissible, appliquer l'algorithme du simplexe au problème auxiliaire

$$\begin{cases} \min y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + y_2 = 2, \\ 4x_2 + 9x_3 + y_3 = 5, \\ 3x_3 + x_4 + y_4 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

On obtiendra une solution de base admissible lorsque la fonction coût auxiliaire sera nulle (dans ce cas $y_i = 0$) et on a une solution de base admissible pour x_i. Appliquer alors l'algorithme du simplexe standard pour résoudre le problème d'optimisation initial.

Adopter la même démarche pour le problème suivant:

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Formulation duale

Exercice 10. Ecrire le problème dual de chacun des programmes linéaires étudiés dans les exercices 8 et 9. Indiquer dans quel cas il peut être plus avantageux de résoudre ce problème dual.

Exercice 11. Résoudre le problème de programmation linéaire

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ \max(x_1 + 3x_3 + x_3), \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}$$

en calculant son problème dual.