TD Equations Différentielles n° 2

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

1)Déterminer $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$ lorsque A est une des matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{C}$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$ où $A \in M_n(\mathbb{C})$ est la matrice

$$A = \lambda Id + N, \ \ N_{i,j} = \delta_{j=i+1}.$$

3) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que les valeurs propres λ_i de A vérifient $Re(\lambda_i) \leq -\alpha < 0$. Montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon)$ tel que $\|e^{tA}\| \leq C(\varepsilon)e^{(-\alpha+\varepsilon)t}$, $\forall t \geq 0$. (on utilisera la question précédente). En déduire que $\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0$

4) Le résultat de la question précédente est il toujours vrai si on suppose qu'il existe une valeur propre λ de A telle que $Re(\lambda) = 0$? Justifier en exhibant des systèmes différentiels $\dot{X} = AX$, où les valeurs propres λ_i de A vérifient $Re(\lambda_i) \leq 0$, possédant des solutions non bornées. Donner une condition sur ces valeurs propres de partie réelle nulle pour que e^{tA} reste bornée sur $[0, \infty[$. Donner une condition générale pour que e^{tA} reste bornée sur $\mathbb{R}$.

Autour de la formule de Duhamel

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On considère l'équation différentielle

$$x''(t) - x(t) = f(t), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \ (E').$$

i) Montrer que si il existe une solution de (E') bornée sur $\mathbb{R}$, elle est unique.
On se propose de calculer cette solution.
ii)Ecrire (E') sous la forme d'un système différentiel

$$X'(t) = AX(t) + F(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $F(t) \in \mathbb{R}^2$.

iii) Calculer e^{tA}, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
iv) En utilisant la formule de Duhamel sur $(0, t)$ $(t \in \mathbb{R})$, montrer que toute solution de (E') peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t} + \int_0^t sh(t-s)f(s)ds, \ \forall t \in \mathbb{R}. \ (S)$$

v) On fixe $L > 0$. Trouver A_L et B_L pour que $x(L) = x(-L) = 0$ et montrer que la solution calculée est bornée sur $(-L, L)$ indépendamment de L. Quand $L \to \infty$, montrer que les coefficents A_L et B_L ont des limites A_∞, B_∞. En prenant $A = A_\infty$, $B = B_\infty$ dans (S), montrer alors que l'unique solution bornée de (E') s'écrit

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} f(s)ds - \int_{t}^{\infty} e^{t-s} f(s)ds.$$

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $Re(\lambda_i) < 0$ et $B(t) \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $\lim_{t\to\infty} \|B(t)\| = 0$. Montrer que toute solution x du système linéaire $\dot{x} = Ax + B(t)x$ tend vers 0 lorsque $t \to \infty$. **Application:** Donner une condition sur a pour que toutes les solutions de $\dot{x} = A(t)x$ où $A(t)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2}{t^2+1} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t} & 0 & 1 + e^{-t} \\ (2-a)(e^{-t}-1) & -1 & -a\frac{t^3}{1+t^3} \end{pmatrix},$$

tendent vers 0 pour $t \to \infty$.

4) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $Re(\lambda) \leq 0$ et les valeurs propres de partie réelles nulles sont simples. Soit $B(t) \in M_n(\mathbb{C})$ et $C(t) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\int_0^\infty \|B(t)\|dt < \infty$ et $\int_0^\infty |C(t)|dt < \infty$. Montrer que la solution de $\dot{x} = Ax + B(t)x + C(t)$ et $x(0) = x_0$ est bornée sur $[0, \infty[$.

5) Soit A et B deux matrices réelles. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{t}{n}A} e^{\frac{t}{n}B}\right)^n = e^{t(A+B)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ avec convergence uniforme sur tout compact. On posera $f_n(t) = \left(e^{\frac{t}{n}A} e^{\frac{t}{n}B}\right)^n$ et on calculera une équation différentielle satisfaite par f_n.

Théorie de Floquet

1)Démontrer le théorème de Floquet

Considérons le système différentiel $\dot{X} = A(t)X$ où A est une matrice T-périodique de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice fondamentale $\Phi(t)$ associée à ce système (i.e. une matrice formée par une base de solutions du système différentiel) peut s'écrire

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}$$

où B est une matrice à coefficient constant et P une matrice T-périodique.

2) Soit $\rho_i)_{i=1..n}$ les valeurs propres de e^{TB} et λ_i tel que $\rho_i = e^{\lambda_i T}$. Montrer que

$$\Pi_{i=1}^n \rho_i = exp \int_0^T TrA(t)dt, \;\; \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{T}\int_0^T TrA(t)dt(mod\frac{2k\pi}{T}).$$

Pour cela, on démontrera la *formule de Liouville*: si $\Phi(t)$ est une matrice formée d'une base de solution de $\dot{X} = A(t)X$, alors

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0)) \exp \int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))ds. \tag{0.1}$$

Donner alors une condition sur les ρ_i pour que toute solution du système différentiel $\dot{X} = A(t)X$ converge vers 0 pour $t \to \infty$.

3) Soit $\dot{X} = A(t)X$, A matrice de taille n et T-périodique et f une fonction scalaire T-périodique.

i) On suppose $n = 1$ et $A(t) = f(t)$. Déterminer B et $P(t)$ du théorème de Floquet. Donner une condition sur f pour que les solutions restent bornées pour $t \to \pm\infty$ ou soient périodiques.

ii)Soit $n = 2$ et $A(t) = f(t)C$ où C est une matrice de taille 2 à coefficients constants. Calculer B et $P(t)$ du théorème de Floquet et donner des conditions sur f et C pour que les solutions du système différentiel soient bornées quand $t \to \pm\infty$ ou périodiques.

iii) Soit $n = 2$ et $A(t)$ s'écrit

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

Est ce que les solutions du système différentiel associé sont bornées?

4) Soit le système differentiel

$$\dot{x} = 2x + y + x\cos t - y\sin t,$$
$$\dot{y} = -x + 2y - x\cos t + y\sin t.$$

Montrer qu'il n'y a pas de solution autre que la solution nulle qui vérifie $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$.

Instabilité paramétrique

1) Trouver la forme du domaine de stabilité (pour la solution nulle) sur le plan (ε, ω) du système décrit par l'équation $x'' = -f(t)x$ où

$$f(t) = (\omega + \varepsilon)^2, \text{ si } 0 \leq \text{t} < \pi,$$
$$f(t) = (\omega - \varepsilon)^2, \text{ si } \pi \leq \text{t} < 2\pi$$

où f est 2π périodique et $\varepsilon << 1$.

2) Equation de Hill Mathieu $x'' + a(t)x = 0$ avec a positive, non nulle et T périodique. On se propose de montrer le résultat du à Lyapounov.

Si $T \int_0^T a(s)ds \leq 4$ alors toutes les solutions de $x'' + a(t)x = 0$ sont bornées et le point $x = 0$ est stable.

(i) Montrer en utilisant la théorie de Floquet et la formule de Liouville que si toutes les solutions de $x'' + a(t)x = 0$ sont bornées alors le point $x = 0$ est stable.

(ii) On va montrer que toutes les solutions de $x'' + a(t)x = 0$ sont bornées. Supposons qu'il existe une solution non bornée: montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ et une solution x telle que $x(t + T) = rx(t)$.

(iii) On définit $u(t) = \frac{x'}{x}$. Montrer que u vérifie une équation de Ricatti. En déduire que x s'annule au moins une fois sur $[0\,, T]$ et possède deux zéros consécutifs sur un intervalle de longueur inférieur à T.

(iv) Démontrer le lemme suivant: soit f régulière sur un intervalle $[\alpha \;\; \beta]$ tel que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ et strictement positive sur cet intervalle. Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{|f''(x)|}{f(x)} > \frac{4}{\beta - \alpha}.$$

(v) Conclure.