TD Equations Différentielles n° 3

Systèmes différentiels autonomes

Portraits de phase

Exercice 1. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, on se propose de déterminer tous les portraits de phase associés au système différentiel $\dot{X}(t) = AX(t),\ X(t) \in \mathbb{R}^2$.

i) Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $R = PAP^{-1}$ a l'une des formes suivantes:

$$R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},\quad R = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \gamma > 0, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},\ \lambda \neq \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\quad R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},\ \beta \neq 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Donner le changement de variable qui permet de passer du système $\dot{X} = AX$ au système différentiel $\dot{Y} = RY$ et dresser les différents portraits de phase associés à ce système différentiel.

iii) En déduire les portraits de phases associés à $\dot{X} = AX$.

Exercice 2. Dresser les portraits de phase associés aux équations différentielles:

$$i)\ \ddot{x} + \sin x = 0,\quad ii)\ \ddot{x} + x - \frac{x^2}{2} = 0.$$

Dans chaque cas, on cherchera une intégrale première du mouvement i.e. une fonction $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que si x est solution de l'equation (i) ou (ii) alors $H(x, \dot{x})$ est une constante.

Les systèmes différentiels du type $\ddot{x} + \nabla_x V(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ font partie d'une classe plus large de système différentiels appelés système Hamiltoniens définis de la manière suivante:

Soit $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (p, q) \mapsto H(p, q)$. On définit alors le système différentiel:

$$\dot{p} = \nabla_q H(p, q),\ \ \dot{q} = -\nabla H(p, q).$$

Dans ce cas, H est trivialement une intégrale première du mouvement. Dans le cas particulier du système différentiel $\ddot{x} + \nabla_x V(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$, on peut le mettre sous la forme d'un système Hamiltonien en posant: $p = x, q = \dot{x}, H(p, q) = \frac{|p|^2}{2} + V(q)$.

Exercice 3. On s'intéresse au système de *Lotka Volterra*:

$$\dot{x} = ax - bxy = f_1(x, y),\ \ \dot{x} = cxy - dy = f_2(x, y),$$

où $a, b, c, d > 0$.

i) Montrer que si $x(0) > 0, y(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ sur tout l'intervalle de définition de la solution maximale.

ii) Dresser dans le plan de phase, l'allure du champ de vecteur (f_1, f_2) et indiquer ses points critiques.

iii) Mettre le système différentiel sous forme Hamiltonienne et en déduire une intégrale première du mouvement.

iv) Montrer que toutes les solutions du système différentiel avec $x(0) > 0, y(0) > 0$ sont globales et périodiques. Dessiner le portrait de phase.

Exercice 4. On s'intéresse à la dynamique autour de $(0,0)$ pour des systèmes différentiels qui sont des perturbations de systèmes linéaires et notamment la persistance pour le système non-linéaire de certaines propriétés du système linéaire.

On introduit les définitions suivantes. On définit le système différentiel

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}, \tag{0.1}$$

où $A \in M_2(\mathbb{R})$, f_1, f_2 de classe C^1 et $f_i(x,y) = O(x^2 + y^2)$, $i = 1, 2$.

Définition 1. On dit que le point $(0,0)$ est un attracteur si il existe $\delta > 0$ tel que si $|x_0, y_0| < \delta$ alors la solution du problème de Cauchy est définie sur $\mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}^-$) et $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$ (ou $\lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$).

Définition 2. On dit que le point $(0,0)$ est spiralé si c'est un attracteur et

$$\lim_{t\to\pm\infty} |\tan^{-1}(\frac{y(t)}{x(t)})| = +\infty.$$

i) A quelle condition sur le spectre de A, $(0,0)$ est un attracteur, un point spiralé pour le système *linéaire*?

ii) Montrer qu'il existe un changement de variable qui permet de transformer le système différentiel initial en

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(x_1,x_2) \\ F_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

où R désigne l'une des matrices de l'exercice 1 et $F_i = O(x_1^2 + x_2^2)$.

iii) Ecrire le nouveau système différentiel dans le système de coordonnées polaires.

iv) En déduire alors que si $(0,0)$ est un attracteur pour le système linéaire, c'est un attracteur pour le système non linéaire.

v) Montrer que si $(0,0)$ est un point spiralé pour le système linéaire, c'est un point spiralé pour le système non linéaire.

Exercice 5. Pour aller plus loin...Etude de la dynamique autour d'un point selle

On reprend les notations de l'exercice précédent et on étudie le système différentiel dans les coordonnées (x_1, x_2) et R est la matrice diagonale avec les valeurs propres $\lambda < 0 < \mu$. On définit la variété stable au point $(0,0)$, $W^s(0) = \{(x_1^0, x_2^0)/ \lim_{t\to\infty}(x(t), y(t) = (0,0)\}$. On définit également la variété instable à $(0,0)$, l'ensemble $W^u(0)$ qui a la même propriété en $-\infty$.

i) En considérant la partie non linéaire comme un second membre et en appliquant la formule de Duhamel, donner la forme générale des solutions qui restent bornées lorsque $t \to \infty$.

Ces solutions sont en fait les point fixes d'un opérateur qui agit sur un ensemble de fonctions continues à décroissance exponentielle.

ii) Montrer que l'opérateur trouvé en i) est contractant dans un espace de fonctions bien choisi.

iii) En déduire que $W^s(0)$ est localement un graphe $x_2 = \psi(x_1)$ avec $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.

iv) Montrer un résulat analogue sur $W^u(0)$ puis dresser le portrait de phase au voisinage de $(0,0)$.

Solutions périodiques et théorème de Poincaré Bendixson.

Exercice 6. On considère un champ de vecteur $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 rentrant sur la couronne délimitée par les cercles centrés en 0 et de rayon 1 et 2 (i.e. $f.u_r > 0$ si $x^2 + y^2 = 1$ et $f.u_r < 0$ si $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$) et transverse à tous les rayons de la couronne (i.e. $f.u_\theta \neq 0$). On se propose de montrer qu'il existe une solution périodique au système $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ (E) dans la couronne sans utiliser le théorème de Poincaré Bendixson.

i) Ecrire le système différentiel (E) en coordonnées polaires.

ii) On définit les applications $\Theta(t, r_0) = \theta(t)$, $R(t, r_0) = r(t)$ où r, θ est solution de (E) avec $r(0) = r_0$, $\theta(0) = 0$. Montrer que R, Θ sont de classe C^1 et que pour tout $r_0 \in [1, 2]$, il existe un unique $\tau(r_0)$ tel $\Theta(\tau(r_0), r_0) = 2\pi$. En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que τ est continu.

iii) On définit l'application de premier retour $P(r_0) = R(\tau(r_0), r_0)$. Montrer que P définit une application continue préservant l'intervalle $[1, 2]$. En déduire que P admet un point fixe.

iv) Montrer qu'il existe une solution périodique de (E).

Exercice 7. On reprend les notations de l'exercice précédent. On ne suppose plus $f.u_\theta \neq 0$ mais on suppose que la couronne ne contient pas de points critiques: montrer qu'il existe une solution périodique.

Exercice 8. Critère de Bendixson

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert simplement connexe. En appliquant la formule de Green, montrer que si $\operatorname{div} f$ est non nulle et de signe constant sur Ω, ce dernier ne contient pas de solution périodique à $\dot{x} = f(x)$. Généraliser au cas où il existe B de classe C^1 tel $\operatorname{div} Bf$ est de signe constant sur Ω.

Application: Montrer qu'il n'existe pas de cycle limite à

$$\dot{x} = x(a + bx + cxy), \ \ \dot{y} = y(\alpha + \beta x + \gamma y).$$

On cherchera une fonction $B(x, y) = x^r y^s$ tel que $\operatorname{div}(Bf)$ soit de signe constant.

Exercice 9. Unicité dans un domaine annulaire

Soit Ω un domaine annulaire (une couronne par exemple). Soit f un champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini sur Ω. On suppose que $\operatorname{div} f$ est non nul et de signe constant. Montrer qu'il existe au plus une solution périodique et généraliser au cas où il existe B régulière tel que $\operatorname{div} Bf$ soit de signe constant sur Ω.

Application: On considère l'oscillateur de Van der Pol

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = -x + \lambda(1 - x^2)y \end{aligned}$$

En utilisant la fonction $B(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$, montrer que le système possède au plus une solution périodique. On montrera dans l'exercice suivant que ce système possède une solution périodique quand $0 < \lambda << 1$.

Exercice 10

On considère l'équation différentielle scalaire

$$\text{(E)} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \left(x^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 1 \right) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0\,.$$

i). Écrire (E) sous forme d'un système du premier ordre de la forme

$$\text{(S)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x, y)\,,$$

où $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$.

ii). Soit $(x, y) \in C^1(J; \mathbb{R}^2)$ une solution de (S). Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x^2 + y^2\big) = 2\,y^2\,(\,1 - 2\,y^2 - x^2\,)$$

sur l'intervalle J.

iii). En déduire que

- si $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x^2 + y^2\big) > 0\,,$
- si $x^2 + y^2 > 1$ alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x^2 + y^2\big) < 0\,.$

iv). Montrer que le domaine $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ est positivement invariant par (S) et ne contient pas de point critique de (S).

v). En déduire que (S) possède une solution périodique dans $\mathcal{D}$.

Exercice 11

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - a\,x\,y - 2\,x^2 = f(x,y)\,, \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\,2\,y + x\,y - b\,y^2 = g(x,y), \end{cases} \tag{0.3}$$

où a et b sont des constantes strictement positives.

i). Montrer que les ensembles $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\, y = 0\,, x > 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\, x = 0\,, y > 0\}$ correspondent à des trajectoires pour le système (0.3). En déduire que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors la solution maximale (x,y) de (0.3) tel que $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ reste dans le quadrant supérieur (i.e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\, x > 0\,, y > 0\}$) sur tout son intervalle de définition.

ii). Calculer les points critiques de (0.3) dans $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\, x \geq 0\,, y \geq 0\}$ et déterminer leur nature.

iii). Distinguer trois zones de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\, x \geq 0\,, y \geq 0\}$ où f et g sont de signe constant, et tracer l'allure du champ de vecteurs de composantes (f,g) dans chacune de ces zones.

iv). Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\, 0 \leq y \leq \frac{1-2\varepsilon}{b},\ \varepsilon \leq x \leq 2 + \frac{1-2\varepsilon}{b}\right\} \tag{0.4}$$

est positivement invariant (on montrera que le champ est rentrant sur les frontières du domaine $\mathcal{D}$).

v). Montrer que le système différentiel (0.3) ne possède pas de solution périodique dans $\mathcal{D}$.

Exercice 10 Système de Van der Pol. On se propose de montrer qu'il existe des solutions au système de Van der Pol qu'on peut écrire:

$$\dot{x} = -y,\ \ \dot{y} = x - \epsilon(x^2 - 1)y.$$

Pour $\epsilon = 0$, on remarque que toutes les solutions sont périodiques de période 2π. On définit $(x(t,\xi,\epsilon), y(t,\xi,\epsilon))$ la solution du système différentiel tel que $(x(0,\xi,\epsilon), y(0,\xi,\epsilon)) = (\xi, 0)$ où $\xi > 0$.

i) Montrer qu'il existe $\tau > 0$ tel que $x(\tau,\xi,\epsilon) > 0$ et $y(\tau,\xi,\epsilon) = 0$.

ii) Soit $T(\xi,\epsilon)$ le plus petit τ vérifiant cette propriété. On définit l'application de premier retour (ou application de Poincaré) l'application $P(\xi,\epsilon) = x(T(\xi,\epsilon),\xi,\epsilon)$. Montrer que si il exsite ξ tel que $P(\xi,\epsilon) = \xi$ alors la solution du problème de Cauchy associée est périodique.

iii) Soit $\delta(\xi,\epsilon) = P(\xi,\epsilon) - \xi$. Montrer que $\delta(\xi,0) = 0$, $\forall \xi > 0$. Peut on appliquer le théorème des fonctions implicites sur δ pour obtenir des solutions $\xi = \beta(\epsilon)$ tel que $\delta(\beta(\epsilon),\epsilon) = 0$?

iv) Montrer que $\Delta(\xi,\epsilon) = \frac{\delta(\xi,\epsilon)}{\epsilon}$ admet le développement limité

$$\Delta(\xi,\epsilon) = \dot{x}(T(\xi,0),\xi,0)\frac{\partial T}{\partial \epsilon} + \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T(\xi,0),\xi,0) + O(\epsilon).$$

v) Ecrire le problème de Cauchy vérifié par $(\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t,\xi,0), \frac{\partial y}{\partial \epsilon}(t,\xi,0))$ et l'intégrer. En déduire que

$$\Delta(\xi,0) = \frac{\pi}{4}\xi(4-\xi^2).$$

vi) En appliquant le théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe $\beta(\epsilon) \neq 0$ tel que $\Delta(\beta(\epsilon),\epsilon) = 0$ pour ϵ petit. En déduire l'existence d'une solution périodique pour le système initial.

vii) Montrer que cette solution périodique est stable. Dessiner alors le protrait de phase associé à l'équation de Van der Pol.

Exercice 11 Solutions périodiques pour $x'' + x = \epsilon f(x,x',\epsilon)$

On considère l'équation différentielle

$$x'' + x = \epsilon f(x,x',\epsilon), \;\; 0 < \epsilon << 1 \;\; (E).$$

En adaptant la méthode utilisée pour démontrer l'existence d'une solution périodique pour l'équation de Van Der Pol, donner des conditions sur f pour que d'une part il existe une solution périodique à (E) et d'autre part que cette solution soit stable.

Quelques études qualitatives...

Exercice 12 Sur un modèle de Lotka Volterra plus réaliste. On considère le système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - \frac{10xy}{10x+2}, \\ \dot{y} &= by(1-\frac{y}{x}), \text{ où } b > 0 \text{ est un paramètre.} \end{aligned}$$

i) Calculer les solutions stationnaires du système différentiel.

ii) Ce système possède une unique solution stationnaire non triviale et pertinente (i.e. $x > 0$ et $y > 0$). Déterminer sa stabilité selon la valeur de b et dresser pour chaque cas un portrait de phase au voisinage de ce point critique.

iii) On suppose que la solution stationnaire étudiée est instable: trouver un domaine invariant et montrer l'existence d'une orbite périodique.

Exercice 13 Ondes progressives pour l'équation de Fischer.

On considère l'équation $u_t = u_{xx} + u(1-u)$. Cette solution possède deux états stationnaires $u = 0$ et $u = 1$. On cherche une solution de l'équation qui relie ces deux états en $\pm\infty$ sous la forme d'une onde progressive $u(x,t) = U(x-ct)$ et $\lim_{-\infty} U = 1$, $\lim_{+\infty} U = 0$.

i) Ecrire une équation différentielle pour U puis un système différentiel pour (U, U').

ii)Etudier la stabilité linéaire des solutions stationnaires $U = 0$ et $U = 1$ et donner une condition nécessaire sur c pour avoir l'existence de U satisfaisant en plus la condition $U \geq 0$.

iii) On suppose que cette condition est satisfaite: montrer que la région du plan des phases (U, U') délimitée par les droites $U' = 0$, $U' = \frac{1}{2}(-c + \sqrt{c^2 - 4})U$ et $U' = \frac{1}{2}(-c + \sqrt{c^2 + 4})(U - 1)$ est positivement invariante par le flot.

iv) On suppose que la variété instable partant du point selle $(1, 0)$ rencontre cette région: déduire du théorème de Poincaré Bendixson, l'existence d'une solution U de l'équation différentielle trouvée en i) et vérifiant $\lim_{-\infty} U = 1$ et $\lim_{+\infty} U = 0$.

v) On fait le changement de variable $P = U - 1$ et $U' = Q + \frac{1}{2}(-c + \sqrt{c^2 + 4})P$. Ecrire le système différentiel vérifié par P, Q. On a en fait effectué un changement de base en prenant comme nouvelle base le vecteur $(0, 1)$ et le vecteur propre correspondant à la valeur propre instable du système linéarisé en $(1, 0)$. On sait alors que localement la variété instable s'écrit $Q = h(P)$ avec $h(0) = h'(0) = 0$. En écrivant que ce graphe est invariant par le flot, donner un développement limité de h (le premier terme significatif suffit): en conclure que la variété instable intersecte le domaine invariant défini au iii).