TD Equations Différentielles n° 4

Systèmes différentiels autonomes

Stabilité de points critiques par linéarisation

Exercice 1. Etudier la stabilité des points critiques des équations différentielles suivantes:

$$i)\ \ddot{x} + \sin x = 0, \quad ii)\ \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x - \lambda x^3 = 0.$$

On précisera les cas pour lesquels la méthode de linéarisation ne donne pas d'information sur la stabilité des points critiques pour l'équation complète.

Exercice 2. On considère le système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - a\,x^2 - c\,x\,y, \\ \dot{y} &= y - b\,y^2 + d\,x\,y, \quad a, b, c, d > 0. \end{aligned}$$

i) Montrer que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, alors les solutions du système x et y restent positives sur leur intervalle de définition.

ii) Déterminer les points critiques du système et leur stabilité.

iii) Dessiner le portrait de phase du système: on distinguera les cas $b < c$ et $b > c$.

Exercice 3. On considère un modèle d'interaction à deux espèces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - x^2 - a\,x\,y, \\ \dot{y} &= y - y^2 - a\,x\,y, \quad a > 0. \end{aligned}$$

i) Montrer que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, alors les solutions du système x et y restent positives sur leur intervalle de définition.

ii) Déterminer les points critiques du système et leur stabilité.

iii) Dessiner le portrait de phase du système en distinguant les cas $0 < a < 1$,$a = 1$, et $a > 1$. Donner les conditions d'extinction d'une des deux espèces, des deux espèces et les cas où les deux espèces coexistent.

Stabilité de points critiques par fonctions de Lyapounov

Exercice 1. Etudier la stabilité et la stabilité asymptotique de $(0, 0)$ pour les systèmes différentiels:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y - x^3, \quad \dot{y} = -x - y^3, \\ &\dot{x} = y + \alpha\,x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x + \alpha\,y\,(x^2 + y^2), \\ &\dot{x} = 2\,x\,y - x^3, \quad \dot{y} = -x^2 - y^5. \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère le système différentiel

$$\dot{x} = D\,x + f(x),$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $D = diag(\lambda_1, ...\lambda_n)$ et $\lambda_i < 0$ et enfin $f(x) = o(|x|)$ lorsque $x \to 0$.

i) Montrer que $V(x) = |x|^2$ est une fonction de Lyapounov au voisinage de 0.

ii) Montrer la stabilité asymptotique du point 0.

Exercice 3. On considère le système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a\,x - y + k\,x\,(x^2 + y^2),\\ \dot{y} &= x - \ ay + k\,y, (x^2 + y^2)\ \ a, k > 0.\end{aligned}$$

i) Etudier la stabilité de la solution stationnaire $(0, 0)$ par la méthode de linéarisation: peux t on conclure dans le cas $0 < a \leq 1$? Expliquer.

ii) En utilisant la fonction $V(x, y) = x^2 - 2a\,x\,y + y^2$, étudier la stabilité de $(0, 0)$ pour $a < 1$.

Stabilité de solutions périodiques

Exercice 1. On considère l'équation différentielle

$$\ddot{x} - (1 - x^2 - \dot{x}^2)\,\dot{x} + x = 0.$$

i) Etudier la stabilité du point critique $(x, \dot{x}) = (0, 0)$.

ii) Montrer l'existence d'une solution périodique et la déterminer.

iii) Linéariser l'équation au voisinage de la solution périodique et calculer les multiplicateurs de Floquet associés: en déduire la stabilité de la solution périodique.

Exercice 2. Etudier la stabilité de la solution périodique de l'équation de Van der Pol étudiée dans la feuille de TD 3.

Exercice 3. On considère le système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + y - x^2 - y^2,\\ \dot{y} &= 1 - x - x^2 - y^2.\end{aligned}$$

i) Déterminer les points critiques et leur stabilité.

ii) Montrer l'existence d'une solution périodique (passer en polaire).

iii) Linéariser le système au voisinage de la solution périodique et en calculer les multiplicateurs de FLoquet: en déduire la stabilité de la solution périodique.