

Sujet de thèse: Stabilité des rouleaux dans les films minces

Encadrants : Pascal NOBLE et L. Miguel RODRIGUES (Institut Camille Jordan)

Prérequis :

- analyse fonctionnelle et analyse de Fourier ;
- analyse qualitative des équations différentielles ;
- analyse numérique élémentaire.

Bien qu'une certaine familiarité avec un logiciel de calcul scientifique serait appréciée, la connaissance d'un langage précis n'est pas un préalable. De même, bien qu'une certaine familiarité avec les équations de la physique serait la bienvenue, aucune connaissance précise n'est requise.

Thèmes : analyse des équations aux dérivées partielles, mécanique des fluides.

Mots-clés : ondes progressives périodiques, stabilités spectrale et non linéaire, films minces.

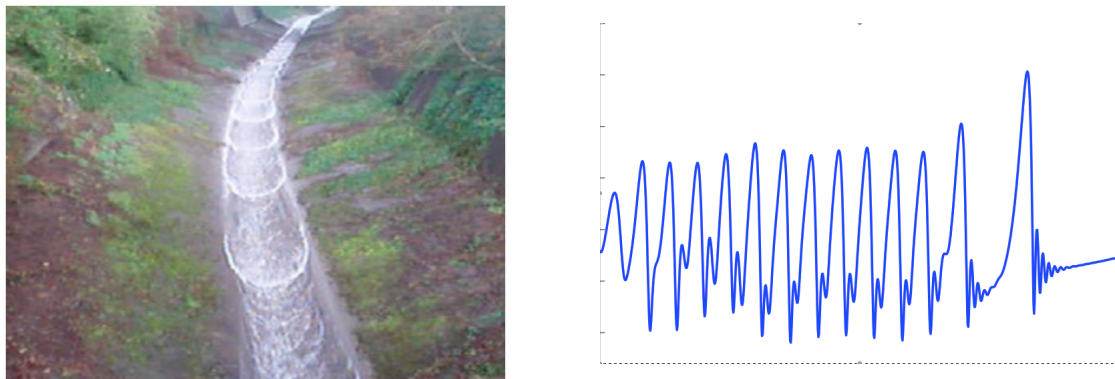


FIGURE 1 – *Roll waves* : observation et simulation numérique (coupe transversale)

Description Lorsque l'inclinaison est trop importante, les écoulements de films minces parallèles à une pente deviennent instables et cette instabilité hydrodynamique primaire se manifeste par l'apparition de rouleaux, appelés *roll waves* dans la littérature anglo-saxonne. Une première modélisation de ces instabilités (1954) les représentent comme des ondes progressives périodiques discontinues des équations de Saint Venant

$$(1) \quad \begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ (hu)_t + (hu^2)_x + \left(\frac{h^2}{2F^2}\right)_x = h - |u|u, \end{cases} ,$$

ces dernières fournissant une approximation pour d'écrire la dynamique des films minces des équations, plus complètes mais trop complexes, d'Euler à surface libre. Si cette modélisation est qualitativement correcte, elle ne permet pas de reproduire les résultats d'expériences et l'obtention de modèles plus fidèles aux observations occupe toujours actuellement un nombre important de physiciens (théoriciens et expérimentateurs) et des mathématiciens (en analyse des ÉDP, modélisation et simulation numérique). Ainsi une attention particulière est accordée à l'incorporation des effets dus à la viscosité du fluide ou à sa tension de surface.

L'un des objectifs de la thèse sera d'étudier les ondes progressives périodiques d'un modèle de Saint Venant plus complet de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ (hu)_t + (hu^2)_x + \left(\frac{h^2}{2F^2}\right)_x = h - |u|u + \varepsilon (hu_x)_x + \sigma h h_{xxx}. \end{cases}$$

Le sujet de thèse s'articulera autour des points suivants :

- existence d'ondes progressives périodiques dans des régimes asymptotiques réguliers (petites amplitudes) ou singuliers (petite viscosité, faible tension de surface) ;
- étude de la stabilité spectrale : analyse théorique de certains régimes asymptotiques, étude numérique exhaustive ;
- stabilité non linéaire précisée : validation de scénarios de type modulation d'ondes (à la Whitham) ;
- simulation numérique directe du système de Saint Venant permettant la confrontation aux expériences en laboratoire.

Dans un second temps, on pourra s'intéresser aux instabilités secondaires qui surviennent lorsque les rouleaux deviennent eux-mêmes instables. Il apparaît alors des motifs plus complexes et réellement bidimensionnels (en échiquier). On peut alors à leur sujet se poser des questions similaires (existence des motifs, stabilité spectrale et non linéaire, simulation numérique directe).

Références

- [1] Jean-Frédéric Gerbeau et Benoit Perthame. Derivation of shallow water equations and numerical validation *DCDS Serie B*, Vol. 1 N°1 (2001) 89-102
- [2] Mathew A. Johnson, Pascal Noble, L. Miguel Rodrigues et Kevin Zumbrun. Behavior of periodic solutions of viscous conservation laws under localized and nonlocalized perturbations. *prépublication* (2012)
- [3] Pascal Noble et L. Miguel Rodrigues. Whitham's modulation equations and stability of periodic wave solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equations. *Indiana Univ. Math. J.* (2012)