Université C. Bernard - Lyon I — **2005/2006**

Licence de Mécanique — Feuille n° 1

Nombres complexes - Séries de Fourier

Nombres complexes

Exercice 1: Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathrm{Re}(z^n)$ et $\mathrm{Im}(z^n)$ à l'aide de $x = \mathrm{Re} z$ et $y = \mathrm{Im} z$.

Exercice 2: Quelles sont les racines cubiques de l'unité ? (donner leur écriture trigonométrique et leur écriture cartésienne; les placer sur le cercle unité)

Exercice 3: Dessiner les ensembles

$$\{z = t\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,;\ t \leq 0\} \quad \text{et} \quad \{z = t\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,;\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\,\pi}{2}\}\,.$$

Exercice 4: Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le module de

$$w := \frac{\mathrm{e}^{\pi\,z} - i}{\mathrm{e}^{\pi\,z} + i}$$

à l'aide de $x = \mathrm{Re} z$ et $y = \mathrm{Im} z$. En déduire l'image de l'axe réel par l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{\pi\,z} - i}{\mathrm{e}^{\pi\,z} + i}\,. \end{array}$$

Exercice 5: Soient $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ et $\zeta = \rho\,\mathrm{e}^{i\,\omega}$ des nombres complexes sous forme trigonométrique. On les suppose distincts. Exprimer à l'aide de r, ρ, θ et ω le nombre

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{z + \zeta}{z - \zeta}\Big)\,.$$

Exercice 6: Soit z un nombre complexe. Calculer la somme $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.

Exercice 7: Soit $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$P_r(\theta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|}\,\mathrm{e}^{i\,n\,\theta}$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Exercice 8: Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$K_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,k\,x}\,.$$

Exercice 9: Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\ldots(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Exercice 10: En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Séries de Fourier

Exercice 1: Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0,1/2[\,, \\ -1 & \text{pour } x \in [1/2,1[\,. \end{cases}$$

Démontrer que sa série de Fourier converge en tout point. Tracer le graphe de f et de quelques sommes partielles de cette série (à l'aide d'une calculatrice graphique). Qu'observez-vous ?

Exercice 2: Mêmes questions pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0,1/2[\,, \\ 1-x & \text{pour } x \in [1/2,1[\,. \end{cases}$$

Exercice 3: Soit α un réel. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction

$$f(x) = \exp(\alpha e^{i2\pi x}).$$

Montrer la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{(n!)^2} = \int_0^1 e^{2\alpha\cos(2\pi x)}\,\mathrm{dx}.$$

Correction de l'exo 6:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Soit $z \neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1-z)$.

$$\begin{aligned} S_n(1-z) &= (1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1-z) \\ &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - z - z^2 - \cdots - z^{n+1} \\ &= 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}, \text{ pour } z \neq 1.$$

Si $z = 1$, $S_n = n + 1$.

Correction de l'exo 9:
Ecrivons $z = \rho e^{i\theta}$, alors $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned} P &= (z + \overline{z})(z^2 + \overline{z}^2)\dots(z^n + \overline{z}^n) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(z^k + \overline{z}^k\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left((e^{i\theta})^k + (e^{-i\theta})^k\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} 2\rho^k \cos k\theta \\ &= 2^n.\rho.\rho^2.\dots.\rho^n \prod_{k=1}^{n} \cos k\theta \\ &= 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \cos k\theta. \end{aligned}$$

Correction de l'exo 10:
Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta + i \sin 5\theta = e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta \end{aligned}$$

Avec la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.