TD Maths II n° 3

Transformation de Fourier et fonctions de variable complexe

Dans tout ce qui suit a désigne un paramètre réel strictement positif.
1) Soient $\zeta > 0$, $R > 0$ et Γ le chemin fermé constitué du bord du rectangle de sommets R, $-R$, $R - i\pi\zeta/a$ et $-R - i\pi\zeta/a$. Que vaut $\oint_\Gamma \mathrm{e}^{-a z^2}\,\mathrm{d}z$? En déduire la transformée de Fourier de la fonction

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-a x^2}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(\alpha\, x)\, dx\,?$$

2) On veut calculer la transformée de Fourier (au sens des distributions) de la fonction bornée

$$x \mapsto \mathrm{e}^{i a x^2}.$$

- Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe ρ définie sur le demi-plan complexe $\Omega := \{\, z\,;\ \mathrm{Re} z > 0\}$ et à valeurs dans Ω telle que

$$\rho(z)^2 = z \quad \forall z \in \Omega\,.$$

- Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a y^2}\, \widehat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi^2 \xi^2/a}\, \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

- Montrer que

$$z \mapsto F(z) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z x^2}\, \widehat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y$$

  et

$$z \mapsto G(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho(z)} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi^2 \xi^2/z}\, \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

  sont des fonctions holomorphes dans Ω.

- On suppose aussi $\widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que F et G admettent des prolongements continus à $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ (demi-plan fermé privé de 0).

- Déduire des questions précédentes que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i a y^2}\, \widehat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{i\pi/4} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\pi^2 \xi^2/a}\, \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

3) Calculer

$$\int_{\mathcal{A}_\theta} \frac{dz}{z^2}\,,$$

où $\mathcal{A}_\theta$ est l'arc du cercle unité joignant 0 à $\mathrm{e}^{i\theta}$ ($\theta \in]\,0\,,\,2\pi\,]$).

4) Calculer

$$\int_{\mathcal{S}} \mathrm{e}^{-z^2}\, dz\,,$$

où $\mathcal{S}$ est le bord du secteur d'angle $\pi/4$ et de rayon R. En déduire la valeur des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \cos(\,x^2\,)\; dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \sin(\,x^2\,)\; dx\,.$$

5) Soit f une fonction holomorphe dans un domaine Ω du plan complexe contenant le disque fermé unité $\{\, z \,\in \mathbb{C}\,;\ |z| \,\leq\, 1\,\}$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \,<\, 1$. Que valent

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta \,-\, z}\, d\zeta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta \,-\, 1/\bar{z}}\, d\zeta\,?$$

En déduire que

$$f(r\,\mathrm{e}^{i\,\omega}) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{i\,\theta})\; P_r(\omega \,-\, \theta)\; d\theta\,,$$

pour $r \,\in]\,0\,,\,1\,[$, où

$$P_r(\theta) \;:=\; \frac{1 \,-\, r^2}{1 \,+\, r^2 \,-\, 2\,r\, \cos\theta}\,.$$

Potentiel complexe

Considérons l'écoulement plan d'un fluide parfait incompressible et irrotationnel, c'est-à-dire de champ de vitesses $\mathbf{v}$ tel que

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \;=\; 0\,, \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{v} \;=\; 0\,.$$

Dans un domaine *simplement connexe*, cela implique (on l'admet) l'existence de fonctions scalaires φ (potentiel) et ψ (fonction de courant) telles que

$$\mathbf{v} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\[2ex] -\,\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix}\,.$$

Montrer que la fonction

$$f \;:\; z \;=\; x \,+\, i\,y \;\;\mapsto\;\; \varphi(x,y) \,+\, i\,\psi(x,y)$$

est holomorphe et exprimer f' à l'aide de $\mathbf{v}$ (identifié à un nombre complexe). Soit Γ un chemin paramétré par l'abscisse curviligne $s \in [0, L]$, c'est-à-dire

$$\Gamma \;=\; \{\gamma(s)\,;\ s \in [0,L]\} \quad \text{avec} \quad |\gamma'(s)| \;=\; 1\,.$$

Exprimer $\int_\Gamma f'(z)\;\mathrm{d}z$ à l'aide de la *circulation* de $\mathbf{v}$ le long de Γ,

$$\int_0^L \mathbf{v}\cdot\mathbf{T}\;\mathrm{d}s\,, \quad \mathbf{T}(s) \;:=\; \gamma'(s)\,,$$

et du *flux* de $\mathbf{v}$ à travers Γ,

$$\int_0^L \mathbf{v}\cdot\mathbf{N}\;\mathrm{d}s\,, \quad \mathbf{N}(s) \;:=\; \begin{pmatrix} \gamma_2'(s) \\ -\,\gamma_1'(s) \end{pmatrix}\,.$$