TD Maths II n° 6

Calcul d'intégrales par la méthode des résidus (suite)

1) Soit $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction

$$w \mapsto \frac{w^{x-1}}{1+w}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{w^{x-1}}{1+w}\,\mathrm{d}w$$

en utilisant le théorème des résidus et le contour représenté sur la figure 1 ci-dessous.

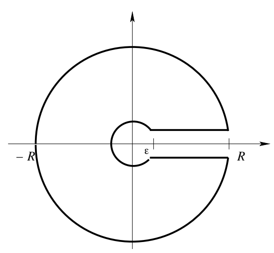

Figure 1: Contour pour l'exercice 1.

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re} z > 0\}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,,$$

et qu'elle sétend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. Montrer à l'aide de changements de variables que

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} (\mathrm{cotan}\theta)^{2x-1}\,\mathrm{e}^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

En déduire, à l'aide d'un nouveau changement de variables que

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{w^{x-1}}{1+w}\,\mathrm{d}w\,.$$

Pour quelles valeurs de z a-t-on la formule des compléments :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad ?$$

2) On veut calculer

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2\,(1\,-\,x)}}{(1\,+\,x)^3}\,dx\,.$$

Montrer qu'il existe une unique fonction f holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ telle que

$$f(z)^3\;=\;z^2\,(z\,-\,1)$$

pour tout $z\,\in\,\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, et prenant des valeurs réelles dans $\mathbb{R}^-$. Montrer que f admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}\backslash[\,0\,,\,1\,]$.

Calculer l'intégrale cherchée en utilisant le contour représenté sur la figure 2 ci-dessous.

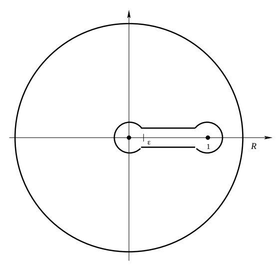

Figure 2: Contour pour l'exercice 2.