TD Maths II n° 8

Représentations conformes et hydrodynamique

Écoulements autour d'obstacles cylindriques. Soit $R > 0$.

i). On considère la transformation dite de Joukowski $z \mapsto w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{R^2}{z} \right)$.

- Trouver l'image du domaine

$$D_R := \{ z\,;\ \mathrm{Im} z > 0 \text{ et } |z| > R \}$$

  par cette transformation.

- Donner le potentiel complexe $g(w)$ correspondant à un champ de vitesses uniforme $\mathbf{v}_0$, supposé parallèle à l'axe Ox.
- En déduire le potentiel complexe $f(z)$ d'un champ de vitesses défini dans D_R, valant $\mathbf{v}_0$ à l'infini et tel que le bord ∂D_R soit une ligne de courant.

ii). Mêmes questions avec la transformation $z \mapsto \widetilde{w} = \coth(\frac{\pi R}{z})$ et

$$\widetilde{D}_R := \{ z\,;\ \mathrm{Im} z > 0 \text{ et } |z - iR| > R \}\,.$$

iii). Comparer les vitesses au sommet de l'obstacle entre les deux configurations.

Représentations de profils d'ailes On considère la transformation de Joukowski avec $R = 1$, c'est-à-dire $J : z \mapsto J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$.

- Quelle est l'image du cercle $C(0;1)$ par J ?
- Montrer que J est injective sur $\{ z \in \mathbb{C}\,;\ |z| > 1 \}$.
- Soit C_R un cercle passant par 1, centré sur l'axe Ox, et de rayon $R > 1$. Montrer que l'image de $J(C_R)$ est une courbe fermée simple, symétrique par rapport à l'axe Ox, ayant un point de rebroussement en 1.
- Que peut-on dire de l'image d'un cercle passant par 1, dont le centre est de partie imaginaire strictement positive, et qui contient -1 dans son intérieur ?

Transformées de Laplace

1) Calculer la transformée de Laplace de

$$t > 0 \mapsto \mathrm{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\, du\,.$$

2) On rappelle la définition de la fonction Γ:

$$t > 0 \mapsto \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} u^{t-1}\, \mathrm{e}^{-u}\, du\,.$$

- Calculer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $\alpha > 0$. Exprimer la transformée de Laplace de $t \mapsto t^\alpha$ à l'aide de la fonction Γ.
- Utiliser cette formule pour calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto \sin\sqrt{t}$. En déduire celle de $t \mapsto (\cos\sqrt{t})/\sqrt{t}$.
- Montrer que la transformée de Laplace de ln est égale à

$$s \mapsto -\frac{\gamma + \ln(s)}{s}$$

pour $s > 0$, où $\gamma = -\Gamma'(1)$ (la constante d'Euler).

3) Si f est une fonction de type exponentiel a s'annulant en 0, et $g(t) = f(t)/t$, montrer que

$$\mathcal{L}[g](x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(f)(s)\,\mathrm{d}s$$

pour tout $x \in]a, +\infty[$.

Application: calculer la transformée de Laplace de

$$t \mapsto \mathrm{Si}(t) := \int_0^t \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u\,.$$

4) Transformée de Laplace de fonctions singulières en 0.

Pour une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, de type exponentiel, telle que g' soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0\,,$$

montrer que

$$\mathcal{L}[g](z) = -\frac{1}{z}\int_0^z \mathcal{L}(t\,g'(t))(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Si g est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,,+\infty\,[$, de type exponentiel, tendant vers 0 à l'infini, avec $t \mapsto t\,g'(t)$ uniformément bornée sur $]\,0\,,+\infty\,[$), on *définit* sa transformée de Laplace par la formule ci-dessus.

Application: calculer la transformée de Laplace de

$$t \mapsto \mathrm{Ci}(t) := \int_t^\infty \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

et

$$t \mapsto \mathrm{Ei}(t) := \int_t^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\,.$$