TD Maths II n° 9

1) Transformées de Laplace inverses. Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions rationnelles

$$s \mapsto \frac{3\,s\,-\,2}{s^2\,-\,4\,s\,+\,20}\,, \quad s \mapsto \frac{3\,s\,-\,2}{s^2\,-\,4\,s\,-\,12}\,, \quad s \mapsto \frac{3\,s\,-\,2}{s^2\,-\,4\,s\,+\,4}\,.$$

Calculer les transformées de Laplace inverses de

$$s \mapsto \frac{s}{(s^2\,+\,1)^2}\,, \quad s \mapsto \frac{1}{s^2\,(s+1)^2}$$

1 - par la méthode des résidus; 2 - en utilisant des produits de convolution. Y-a-t-il plus simple ?

2) Applications de la transformation de Laplace.

i). Résoudre le problème

$$y''\,+\,y\,=\,t\,, \quad y(0)\,=\,1\,, \quad y'(0)\,=\,-2\,.$$

ii). Trouver la solution générale de

$$y'''\,-\,3\,y''\,+\,3\,y'\,-\,y\,=\,t^2\,\mathrm{e}^t\,.$$

iii). Résoudre le problème

$$\begin{cases} x'\,=\,2\,x\,-\,3\,y\,, \\ y'\,=y\,-\,2\,x\,, \\ x(0)\,=\,8\,, \quad y(0)\,=\,3\,. \end{cases}$$

iv).

- Montrer que la fonction

$$f\,:\,t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-1/(4t)}$$

admet une transformée de Laplace holomorphe dans $\{\,s\,;\,\mathrm{Re}s\,>\,0\}$.

- Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, on utilise l'abus de notation $\sqrt{z}$ pour désigner la racine carrée complexe de z de partie réelle strictement positive. Montrer que la fonction

$$F\,:\,s \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{s}}$$

satisfait les hypothèses du théorème de Paley-Wiener.

- Montrer que $\mathcal{L}[f]\,=\,F$.
Indications: montrer que F est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, en déduire que $\mathcal{L}^{-1}[F]$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre; vérifier que f est aussi solution de cette dernière et conclure grâce aux conditions à l'infini.

- Soit $x > 0$. Montrer que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[s \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{s}}}{s}\right](t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),$$

où

$$\operatorname{erfc}(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

- Utiliser ce qui précède pour résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t U - \partial_{xx}^2 U = 0\,, \\ U(x,0) = 0\,, \\ U(0,t) = 1\,. \end{cases}$$