Analyse numérique des équations différentielles pour l'oral de modélisation, TD2

1 Résolution numérique de systèmes hamiltoniens

1) On considère le système différentiel $\dot{x} = -y$ et $\dot{y} = x$. Montrer que toutes les solutions sont périodiques.

2) Programmer la méthode d'Euler explicite, implicite, et la méthode du point milieu et une méthode symplectique vue en cours pour résoudre le système différentiel avec $x(0) = 1, y(0) = 0$ sur l'intervalle $[0, 6\pi]$. Qu'observez vous? Comparer les schémas.

3) Déterminer par un graphe log/log l'ordre de chaque méthode (si vous avez du temps).

iv) Faire la même chose pour l'équation du pendule $x'' + \sin x = 0$ avec $x(0) = \frac{\pi}{4}, x'(0) = 0$. Programmer également une méthode symplectique vue en cours. Quelle méthode donne le meilleur résultat quant à l'obtention de solutions périodiques? Tracer l'Hamiltonien $H = \frac{\dot{x}^2}{2} + \cos x$ en fonction du temps.

2 Etude du système de Lotka Volterra

On considère un système proie prédateur. On note x le nombre de proies et y le nombre de prédateurs. On fait les hypothèses simplificatrices suivantes: les proies ont un taux de natalité a et meurent uniquement à cause des prédateurs, le nombre de proies tuées étant proportionnel au nombre total de proies et au nombre total de prédateurs. Le nombre de prédateurs augmentent proportionnellement au nombre de proies . Le taux de mortalité des prédateurs est c. On obtient ainsi le *modèle* de croissance de ces deux populations

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= dx(t)y(t) - cy(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ici b et d sont des constantes strictement positives mesurant l'impact des prédateurs sur la mortalité des proies et l'impact des proies sur les naissances des prédateurs.

Une étude rapide du système permet de montrer que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ (le vérifier!). On peut alors mettre ce système sous la forme d'un système *hamiltonien*: on pose $p = \ln x$, $q = \ln y$. En choisissant $H(p, q) = aq - be^q + cp - de^p$, on montre que p, q vérifient

$$\begin{aligned} p'(t) &= \frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t) = a - be^{q(t)} = \frac{\partial H}{\partial q}(p(t), q(t)), \\ q'(t) &= \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx(t) = -c + be^{p(t)} = -\frac{\partial H}{\partial p}(p(t), q(t)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

1) Vérifier que $H(p(t), q(t))$ est constante.

Les courbes de niveau de H sont des courbes fermées et on peut montrer que toutes les solutions positives du système de Lotka Volterra sont périodiques (le vérifier).

2) On choisit $a = 1, b = 5, c = 3, d = 2$. Résoudre numériquement, à l'aide des différents schémas étudiés au TD précédent, le système différentiel (2.1) pour une condition initiale $(x_0 > 0, y_0 > 0)$ sur un intervalle de temps suffisamment long pour pouvoir observer si la solution numérique est également "périodique" (visuellement, la courbe est t'elle fermée?). Comparer les résultats et tracer la quantité $H(x_n, y_n) = c \ln x_n - dx_n + a \ln y_n - by_n$. Quels sont les schemas les plus efficaces? (ceux qui conservent le mieux H, les plus rapides pour calculer les solutions de grande période...).

3 Etude d'un système proies/prédateurs plus réaliste

On a fait au cours de la modélisation précédente quelques hypothèses très simplificatrices: par exemple, en l'absence de prédateurs ($y = 0$), les proies croissent indéfiniment. Un modèle plus raisonnable serait d'inclure un facteur limitant: par exemple au niveau du milieu naturel. On suppose qu'il ne peut fournir qu'une quantité limitée de nourriture. On obtient alors le modèle logistique pour la croissance des proies $x'(t) = rx(t)(1 - \frac{x(t)}{K})$. Ici K représente un seuil critique de population au dela duquel la quantité de nourriture disponible dans le milieu naturel est insuffisante pour nourrir toutes les proies et ainsi une certaine proportion de ces proies meurt. Il semble également raisonnable d'introduire le même type de modèle de croissance des prédateurs, le facteur limitant étant le nombre de proies. Enfin, il faut ajouter l'influence des prédateurs sur la mortalité des proies. On inclut un facteur limitant: lorsque le nombre de proies devient très grand, on supposera que le nombre de proies tuées ne croit pas indefiniment mais est uniquement proportionnel au nombre de prédateurs. On obtient un modèle pour la croissance des proies et prédateurs du type

$$\begin{aligned} x'(t) &= rx(t)(1 - \frac{x(t)}{K}) - \frac{kx(y)y(t)}{x(t) + D}, \\ y'(t) &= sy(t)(1 - h\frac{y(t)}{x(t)}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce système possède un grand nombre de paramètres: on peut réduire ce nombre en effectuant un "adimensionnement": voir [3] pour plus de détails. Pour fixer les idées, on étudie le système suivant

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)\big(1 - x(t)\big) - \frac{x(t)y(t)}{x(t) + 0.2}, \\ y'(t) &= by(t)\big(1 - \frac{y(t)}{x(t)}\big). \end{aligned} \tag{3.4}$$

On va étudier l'influence du paramètre $b > 0$ sur les propriétés qualitatives de ce système différentiel.

1) Calculer tous les équilibres et faire l'étude de la stabilité linéaire des points stationnaires non triviaux.

2) Montrer (numériquement ou analytiquement) qu'il existe b_c tel que la seule solution non triviale est instable pour $b < b_c$ et stable pour $b > b_c$ et que pour $b = b_c$, les valeurs propres du système linéarisé sont complexes conjuguées et imaginaires pures. Montrer alors que $\frac{dRe(\lambda_i(b))}{db}_{|b=b_c} \neq 0$ (i.e. les valeurs propres $\lambda_1(b), \lambda_2(b)$ traversent l'axe imaginaire pur lorsque b passe par b_c).

C'est ce qu'on appelle une bifurcation de Hopf: on peut alors montrer que pour b proche de b_c le système possède une famille de solutions périodiques paramétrées par b au voisinage du point d'équilibre (pour $b > b_c$ ou $b < b_c$).

3) Choisir $b < b_c$ et proche de b_c. En prenant une donnée initiale proche de la solution stationnaire, montrer numériquement que la solution du problème de Cauchy converge vers une solution périodique. Prendre alors un $b < b_c$ quelconque et refaire la même chose: observer que dans tous les cas, on converge vers une solution périodique.

Dans ce cas, on a un résultat meilleur que celui donné par le théorème de bifurcation de Hopf car on n'est pas obligé de choisir b proche de b_c pour avoir une solution périodique. Ceci est en fait une conséquence du théorème de Poincaré Bendixson: une analyse rapide du champs de vecteurs met en évidence l'existence d'un domaine compact positivement invariant et qui contient la solution stationnaire. Une des conséquences du théorème de Poincaré Bendixson est que l'ensemble ω-limite de toute trajectoire passant par un point inclus dans ce domaine est soit un point stationnaire soit une solution périodique. Lorsque le point stationnaire est instable (c'est la cas si $b < b_c$), nécessairement l'ensemble ω-limite ne peut être qu'une solution périodique. Voir [3] pour plus de détails.

Références

[1] M.Crouzeix, A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*

[2] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner *Solving ordinary differential equations I, II*

[3] Murray *Mathematical biology*

[4] M. Schatzman *Analyse Numérique*