Analyse numérique des équations aux dérivées partielles pour l'oral de modélisation, TD2

Dans cette deuxième séance, on va s'intéresser à la résolution d'équations elliptiques ou paraboliques non linéaires (ici des équations de réaction-diffusion) en dimension 1 d'espace en utilisant la méthode des différences finies. On s'intéresse essentiellement à l'équation de Fisher

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = u(1-u), \tag{0.1}$$

pour $x \in [0,1]$ ou $x \in \mathbb{R}$. Ici D désigne le paramètre de diffusion.

Problème elliptique: solutions stationnaires de l'équation de Fisher sur un segment

On cherche à calculer des solutions non triviales de

$$\begin{array}{l} -Du''(x) + u(x)(u(x)-1) = 0, \ \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{array} \tag{0.2}$$

i) Pour $D = \frac{1}{4}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}$, chercher une solution à l'aide de la méthode de tir.

ii) Chercher une solution à l'aide d'un méthode itérative inversant le Laplacien et discuter de la validité du résultat selon la valeur de D.

iii) On prend $D = 0.01$ et on va chercher à calculer une solution à l'aide d'un calcul en temps grand de l'équation parabolique associée. Pour intégrer ce type d'équation, on va utiliser une méthode de "splitting".

Equations paraboliques: méthode de splitting pour les équations de réaction-diffusion

L'idée est basée sur les développements limités suivant: soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $0 < \delta t << 1$, alors

$$e^{\delta t(A+B)} = e^{\delta t A} e^{\delta t B} + O(\delta t^2) \tag{0.3}$$

Autrement dit pour calculer une solution approchée de $x' = (A+B)x$, pour chaque pas de temps, on calcule une solution de $x' = Ax$ puis $x' = Bx$ pour un pas de temps à chaque fois. La méthode sera d'ordre 1 en temps. On peut améliorer cette approximation en considérant une formule symétrisée

$$e^{\delta t(A+B)} = e^{\frac{\delta t}{2} A} e^{\delta t B} e^{\frac{\delta t}{2} A} + O(\delta t^3). \tag{0.4}$$

Autrement dit, pour chaque itération, on calcule une solution de $x' = Ax$ sur un demi pas de temps puis une solution de $x' = Bx$ sur un pas de temps et de nouveau une solution de $x' = Ax$ sur un demi pas de temps. La méthode ainsi obtenue est d'ordre 2 en temps. Pour une équation (ou un système) de réaction diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u), \tag{0.5}$$

cela revient à résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u$ sur un pas de temps puis l'équation différentielle ordinaire $\frac{\partial u}{\partial t} = f(u)$ sur un pas de temps (1er schema). Pour obtenir un schéma stable, il suffit de traiter l'équation de la chaleur avec un schéma d'Euler implicite ou de Crank Nicolson. Le schema est d'ordre 1 en temps. On peut améliorer la précision de ce schéma en utilisant la deuxième méthode d'approximation.

iii) Calculer une solution stationnaire de l'équation de Fischer à l'aide d'un calcul en temps grand de l'équation parabolique en utilisant un schema de splitting.

Précision des schémas de splitting et observation d'ondes progressives

i) On travaille toujours sur le segment $[0, 1]$. On se place sur un intervalle de temps $[0, 2]$ et on part d'une donnée initiale régulière (ex: $\sin(\pi x)$). On va évaluer numériquement l'ordre des deux méthodes de splitting précédentes *sans connaître la solution exacte.* Pour cela, pour un pas de temps donné, calculer la solution obtenue à $t = 1$ puis refaire le même calcul en prenant un pas de temps divisé par deux. Calculer alors la norme sup de la différence. Faire cette opération pour plusieurs pas de temps et représenter dans un graphe log-log "l'erreur" en fonction du pas de temps.

ii) On essaie d'observer la formation d'ondes progressives pour l'équation de Fischer. On va se placer sur un intervalle de grande taille (ex $[0, 100]$) et partir d'une donnée initiale $u_0(x) = 1_{]49,51[}(x)$. Calculer une solution avec ces données initiales et afficher le résultat à chaque itération en temps. Comparer les résultats lorsqu'on choisit les conditions de Dirichlet ou les conditions de Neumann aux bords du domaine.

iii) Calculer la vitesse de l'onde progressive observée pour différentes valeurs de la diffusion.

Pour plus de précisions sur les propriétés qualitatives de l'équation de Fisher voir le livre de Murray *Mathematical Biology* p.277. Pour d'autres exemples de systèmes de réaction diffusion, voir les modèles de rage p.661-p.664 et les modèles sur la formation de taches ou de zebrures sur les pelages des animaux.