Analyse numérique
des équations aux dérivées partielles
pour l'oral de modélisation, TD3

Dans cette dernière séance, on s'intéresse à la résolution approchée d'équations de transports

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ &u(x,0) = u_0(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Considérons d'abord le cas linéaire $f(u) = cu$, $c \in \mathbb{R}$.

i) Résoudre explicitement le problème (0.1).

ii) On cherche maintenant à résoudre ce problème sur un intervalle de temps $[0,T]$. Montrer que si u_0 est à support compact, on peut se ramener à l'étude du même problème sur un intervalle du type $[-M,M]$ de taille fini. On précisera alors les conditions aux limites choisies.

iii) Même question si u_0 est périodique.

iv) On discrétise le problème (0.1). On choisit un pas de temps δt et un pas d'espace δx. On cherche à calculer une approximation de $u(j\delta x, n\delta t)$ par une suite $u_j^n)_{j=0..J+1,n=0..N}$. Tester le schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\delta x} = 0, \tag{0.2}$$

avec une donnée initiale à support compact.

v) On suppose $c > 0$. Tester le schéma décentré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\delta x} = 0, \tag{0.3}$$

avec une donnée initiale à support compact. Et discuter de la validité des résultats selon que $\lambda = \frac{\delta t}{\delta x} > 0$ est inférieur, supérieur ou égal à 1.

vi) Tester le schéma précédent avec $c < 0$ et vérifier qu'il ne convient pas. Ecrire alors un schéma numérique adapté à ce cas.

On introduit le schéma de Lax

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - c\frac{\delta t}{2\delta x}\big(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\big). \tag{0.4}$$

vii) Tester ce schéma sur l'équation linéaire pour $\lambda|c| \leq 1$. Faire la simulation avec une donnée initiale à support compacte ou périodique sur un intervalle. Comparer dans chaque cas la solution numérique avec la solution exacte (estimation des ordres de convergences,...).

viii) Résoudre numériquement l'équation de Burgers $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ pour une donnée initiale à support compact avec le schéma de Lax.

Références

[1] Dautray-Lions *Analyse mathématique et calcul numérique pour les Sciences et les Techniques*

[2] Euvrard *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*

[3] E. Godlewski, P-A Raviart *Approximation numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservations*