

Numéro d'ordre : 48-2009

**UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD (LYON 1)**  
**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

spécialité : Mathématiques Appliquées

Soutenue publiquement le 4 Décembre 2009

par

**Pascal NOBLE**

Titre :

**ANALYSE D'ÉCOULEMENTS EN EAUX PEU PROFONDES ET  
STABILITÉ DE SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR LES  
ÉQUATIONS DE SAINT VENANT ET DES SYSTÈMES  
HAMILTONIENS DISCRETS**

devant le jury composé de

Sylvie BENZONI  
Constantine M. DAFERMOS  
Mariana HARAGUS-LARGER  
David LANNES  
Jean-Michel ROQUEJOFFRE  
Jean-Claude SAUT  
Denis SERRE  
Jean-Paul VILA

après avis favorables de

Constantine M. DAFERMOS  
Mariana HARAGUS-LARGER  
David LANNES

## Remerciements

Mes premiers remerciements vont d’abord aux rapporteurs et aux membres du jury de cette soutenance d’habilitation. Je pense en particulier à Jean-Michel Roquejoffre et Jean-Paul Vila, mes directeurs de thèse, qui ont guidé mes premiers pas dans la recherche à travers un sujet a priori très ciblé (les roll-waves) et qui se révèle en fait être, encore maintenant, une source de problèmes passionnants. Leurs conseils et leur manière d’encadrer m’ont énormément influencé à l’heure de diriger, à mon tour, mes premiers étudiants.

Je remercie naturellement mes trois rapporteurs pour l’examen précis de mes travaux :

- David Lannes, dont les travaux sur la justification de modèles en mécanique des fluides et les collaborations avec des océanographes sont pour moi un modèle à suivre,
- Mariana Haragus, pour sa lecture très attentive du manuscrit et en particulier les parties liées à un domaine fascinant : les systèmes dynamiques et leurs applications,
- Constantine Dafermos, pour sa présence à la soutenance orale : c’est un grand honneur qu’il ait accepté d’être un de mes rapporteurs.

Je suis très reconnaissant à Denis Serre, Jean-Claude Saut et Sylvie Benzoni de prendre part à ce jury : ils sont des exemples aussi bien en tant qu’enseignants que comme chercheurs. Je remercie tout particulièrement Sylvie pour avoir cru en moi : même si nous n’avons pas (encore) eu le temps de collaborer scientifiquement, nous avons eu régulièrement des discussions scientifiques enrichissantes et j’ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec elle dans les divers enseignements que nous avons partagés.

J’ai également une pensée pour mes collaborateurs, Didier Bresch et Guillaume James en tête, pour leur apport scientifique inestimable et surtout leur patience. J’associe également à ces remerciements les membres de l’Institut Camille Jordan et en particulier les membres de la sous équipe GPC (Grosse Pause Café) de l’équipe MMCS (Modélisation Mathématique et Calcul Scientifique) : Francis Filbet (qui essuie les plâtres de nos encadrements de thèse conjoints), Thierry, les “nouveaux” venus Sarah, Dan et Miguel et, last but not least, “Croque Michelle”, (dont les nombreux conseils me suivront longtemps) ainsi que mon très estimé collègue/refaiseur de match de rugby/partenaire de quiz/bières et restos, Olivier.

Enfin, une page ne suffirait pas à dire toute ma gratitude envers ma famille et mes amis pour leur aide et leur affection. Merci à Sandrine, mon petit soleil.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Obtention de modèles de Saint Venant</b>	<b>13</b>
1.1	Cas d'un fluide newtonien sur un plan incliné . . . . .	14
1.1.1	Dérivation formelle . . . . .	14
1.1.2	Justification rigoureuse et consistance du modèle . . . . .	18
1.2	Cas d'une topographie quelconque . . . . .	21
1.3	Modèles de Saint Venant pour des fluides non newtoniens . . . . .	26
1.4	Modèles de Saint Venant bi-couches . . . . .	30
1.5	Perspectives . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Existence et stabilité des roll-waves</b>	<b>35</b>
2.1	Roll-waves discontinues . . . . .	36
2.1.1	Roll-waves dans des systèmes hyperboliques . . . . .	36
2.1.2	Roll-waves pour des écoulements bi-couche . . . . .	39
2.1.3	Persistence des roll-waves non visqueuses . . . . .	41
2.2	Stabilité linéaire de roll-waves visqueuses . . . . .	47
2.2.1	Analyse spectrale . . . . .	47
2.2.2	Stabilité linéaire . . . . .	50
2.3	Perspectives . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Localisation d'énergie dans des systèmes hamiltoniens</b>	<b>55</b>
3.1	Solutions localisées réversibles dans des systèmes hamiltoniens . . . . .	56
3.1.1	Description de la limite "anticontinue" . . . . .	56
3.1.2	Continuation des solutions périodiques et réversibles . . . . .	62
3.2	Orbites périodiques relatives localisées dans un système triatomique . . . . .	65

3.2.1	Continuation analytique . . . . .	65
3.2.2	Continuation numérique . . . . .	73
3.3	Perspectives . . . . .	75
	<b>Bibliographie</b>	<b>77</b>



# Introduction

Les équations de Saint Venant sont couramment utilisées en mécanique des fluides pour analyser mathématiquement et simuler numériquement des écoulements de fluides de faible profondeur. Les applications sont nombreuses, de la description de phénomènes naturels (écoulements de rivières, crues de boue, avalanches de neige) aux applications industrielles (métallurgie, conception de barrages, de ponts ou de paravalanches). Nous renvoyons le lecteur à l'article de revue de Oron, Davis et Bankoff [52] pour plus de détails sur ce type d'applications.

Ces modèles peuvent être obtenus formellement à partir des équations de Navier-Stokes lorsque l'écoulement est quasi-stationnaire et de faible profondeur [62]. Prenons l'exemple d'un fluide incompressible (en  $2d$ ) s'écoulant sur un plan incliné d'un angle  $\theta$ . En général, on recherche de l'information sur la hauteur et le débit. Si on intègre les équations de quantité de mouvement et de conservation de la masse sur la hauteur du fluide  $h$ , on obtient un système d'évolution pour ces variables

$$(1) \quad \partial_t h + \partial_x \left( \int_0^h u \right) = 0, \quad \partial_t \left( \int_0^h u \right) + \partial_x \left( \int_0^h u^2 + p \right) = gh \sin \theta - \sigma_{xz}(0) + \partial_x \left( \int_0^h \sigma_{xx} \right),$$

où  $u$  est la vitesse horizontale du fluide,  $p$  la pression et  $\sigma$  le tenseur des contraintes visqueuses. Si l'écoulement est peu profond et quasi stationnaire, on peut considérer que la pression est hydrostatique  $p = g \cos \theta (h - z)$ . Sous ces hypothèses, on peut aussi écrire une relation de la forme  $\int_0^h u^2 = \beta h v^2$ , où  $v$  est la vitesse horizontale moyenne du fluide et  $\beta$  un facteur de forme. Le choix  $\beta = 1$  revient à remplacer  $u$  par  $v$  : c'est l'approche originale de Barré de Saint Venant, valable si la pente est faible. Pour une pente quelconque, on choisit en général  $\beta = 1.2$ , correspondant à un profil de vitesse parabolique. De plus, on doit faire une hypothèse sur la friction au fond, par exemple  $\sigma_{xz}(0) = \alpha_1 v + \alpha_2 v^2$ , où les  $\alpha_i$  peuvent dépendre de  $h$ . Ici  $\alpha_1$  est un coefficient de friction laminaire et  $\alpha_2$  un coefficient de friction turbulente. On obtient ainsi un système d'évolution sur  $h$  et  $v$

$$(2) \quad \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \quad \partial_t hv + \partial_x \left( \beta hv^2 + g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) = gh \sin \theta - \alpha_1 v - \alpha_2 v^2.$$

Les équations de Saint Venant sont une alternative intéressante aux équations de Navier-Stokes à surface libre puisqu'on élimine le problème de la surface libre (dans la mesure où la hauteur du fluide  $h$  est une des variables du problème). En plus, on diminue la dimension du système et le nombre d'inconnues (ici la vitesse verticale et la pression). Ces modèles remplacent généralement les équations de Navier-Stokes dans le régime "eaux peu profondes", lorsque la hauteur du fluide est très inférieure à la longueur d'onde des variations transverses de la vitesse et de la pression du fluide, sans qu'on connaisse précisément l'erreur commise. En fait, la plupart des modèles de Saint Venant obtenus de la manière décrite précédemment ne sont pas consistants avec les équations de Navier-Stokes au sens où la moyenne d'une solution exacte des équations de Navier-Stokes dans ce régime ne vérifie pas le modèle proposé. Cette inconsistance se manifeste également à travers l'analyse de stabilité spectrale des solutions stationnaires. Pour un fluide newtonien incompressible, on peut montrer que le flot uniforme devient instable lorsque  $\mathbf{R}_e > \frac{5}{4} \cot \theta$  ( $\mathbf{R}_e$  est un nombre de Reynolds), en analysant directement la relation de dispersion obtenue à partir des équations de Orr-Sommerfeld. Le modèle de Saint Venant associé ( $\beta = \frac{6}{5}, \alpha_1 = \frac{3}{h}, \alpha_2 = 0$ ) donne un critère de stabilité différent. Le problème vient évidemment des approximations faites pour fermer le système (1).

Dans le chapitre 1, on présente une méthode [1] d'obtention de modèles de Saint Venant consistants avec les équations de Navier-Stokes à surface libre, en partant du système (1). On peut également obtenir rigoureusement la partie correspondant au transport dans les équations de Saint Venant (et d'autres modèles : Green-Naghdi, Serre) à partir des équations d'Euler à surface libre, mais ces résultats visent plutôt des applications en océanographie et explorent d'autres régimes asymptotiques que le seul régime "eaux peu profondes" [32, 33]. Notre objectif est plutôt d'obtenir des modèles de Saint Venant pour différentes classes de fluides. La méthode proposée ici repose essentiellement sur le calcul d'un développement limité des solutions de Navier-Stokes dans le régime "eaux peu profondes" lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $\varepsilon$  est le *paramètre d'aspect* de l'écoulement. A cette échelle, la vitesse et la pression du fluide dépendent seulement de  $h$  et de ses dérivées en temps et en espace. En utilisant l'équation de conservation de la masse dans (1), on obtient une équation d'évolution sur la seule hauteur  $h$ . Si on calcule un développement de  $u$  à l'ordre 1 pour un fluide newtonien sur un plan incliné, on obtient l'équation de Benney

$$(3) \quad \partial_t h + \partial_x \left( 2 \sin \theta \frac{h^3}{3} \right) = 2\varepsilon \sin \theta \partial_x \left( h^3 \left( \cot \theta - \frac{4}{5} h^3 \mathbf{R}_e \right) \partial_x h \right).$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , l'équation est hyperbolique et développe des singularités en temps fini. De plus elle ne donne qu'une information sur la vitesse caractéristique des ondes de surface de petite amplitude. Si on regarde l'équation (3) complète ( $\varepsilon \neq 0$ ), on voit aisément qu'elle est bien posée au voisinage de  $h = 1$  si  $\mathbf{R}_e < \frac{5}{4} \cot \theta$ . Les solutions de petite amplitude sont globales et décroissent vers 0. Ceci donne un

critère de stabilité cohérent avec celui obtenu par l'analyse directe des équations de Navier-Stokes et on peut montrer rigoureusement que (3) décrit complètement le comportement des solutions de Navier-Stokes [68]. Cependant, cette équation est dégénérée dans le régime instable  $\mathbf{R}_e > \frac{5}{4} \cot \theta$ , et on ne peut rien dire du comportement du fluide. Cette approche reste malgré tout intéressante pour des fluides non newtoniens (fluides en loi de puissance, de Bingham ou de Herschel Bulkley) car on obtient simplement des critères de stabilité de l'écoulement uniforme, pourvu qu'on ait mené rigoureusement le calcul du développement asymptotique des solutions [10, 11, 12, 47], ce qui n'est en général pas le cas pour les fluides à seuil (je discuterai ici des fluides de Bingham).

Pour étudier le régime instable, on doit considérer les équations de Saint Venant. L'obtention systématique de modèles consistants à partir des équations de Navier-Stokes n'a été entreprise que très récemment et ces modèles varient selon les conditions aux limites utilisées. Gerbeau et Perthame [26] ont obtenu un premier modèle à partir des équations de Navier-Stokes  $2d$ , en suivant l'idée originale de Barré de Saint Venant. Lorsque le fluide est newtonien et peu visqueux, avec des conditions de Navier au fond (faible friction) et une pente faible, le profil de vitesse est *plat* et on peut remplacer la vitesse  $u$  par la vitesse moyenne  $v$  dans (1). On obtient aisément un modèle de Saint Venant (visqueux) consistant. Cette approche a ensuite été étendue à des topographies quelconques [17, 41], pour des écoulements bi-couches [54] et des fluides de Bingham [18]. Les modèles obtenus fournissent en général des solutions approchées des équations d'Euler [17]. Pour un fluide visqueux quelconque et des conditions de Dirichlet au fond, l'approximation classique de Saint Venant n'est plus valable (pour un fluide newtonien, le profil est parabolique!). Lorsque l'écoulement est *laminaire*, Ruyer Quil et Manneville [56, 57] ont proposé une nouvelle méthode pour analyser cette situation et calculé de nouveaux modèles. L'idée est d'obtenir une approximation des solutions de Navier-Stokes en les développant selon une base de polynômes en  $z$  (la variable verticale) à coefficients lentement variables et en utilisant des règles de projection particulières pour déterminer ces coefficients. Les modèles obtenus sont consistants avec les équations de Navier-Stokes à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  mais différent selon la procédure de projection et la base choisies. Cette méthode permet de traiter des topographies variables mais de faible courbure et des écoulements de fluides de Herschel Bulkley [11]. Récemment, J.-P. Vila a unifié la formulation des différents modèles proposés par Ruyer-Quil et Manneville [70] en obtenant directement le développement limité des solutions de Navier-Stokes par rapport à  $\varepsilon$ .

Dans ce mémoire, cette dernière méthode est décrite dans le cas d'un fluide newtonien s'écoulant sur un plan incliné. Par rapport au modèle existant ( $\beta = 1.2, \alpha_1 = 3h^{-1}, \alpha_2 = 0$ ), on montre qu'il faut ajouter à (2) un terme de correction d'origine inertielle. On présente ensuite la justification mathématique de ce calcul



[1]. La preuve repose essentiellement sur le caractère bien posé des équations de Navier-Stokes au voisinage de la solution approchée, qui est proche de la solution stationnaire des équations de Navier-Stokes lorsque l’amplitude des oscillations de  $h$  par rapport à sa valeur moyenne est petite. Ce problème a été résolu pour  $\varepsilon = 1$  par Teramoto, d’abord localement puis globalement en temps en ajoutant la capillarité [48]. La preuve de ces résultats est une adaptation de l’approche de Beale pour des fonds asymptotiquement plats [13, 14]. Pour  $\varepsilon \ll 1$ , le problème est posé dans un domaine mince et à surface libre. La principale difficulté est de reprendre le résultat de [48] et d’obtenir des estimations uniformes en  $\varepsilon$  : on doit donc étudier précisément la dépendance des constantes en jeu dans [48] par rapport à  $\varepsilon$ . On trouve les constantes des inégalités de Sobolev (Poincaré, Agmon, Ladyzenskaia) dans [66] mais on doit refaire le travail pour le problème de Stokes. Ce dernier a des conditions aux limites non standards et on contrôle seulement la norme du tenseur de déformation. Il faut donc obtenir des inégalités de Korn [29] en domaine mince pour récupérer un contrôle sur la norme du gradient de vitesse. On montre alors, en présence de capillarité et lorsque la surface libre est faiblement perturbée, que l’erreur de consistance est  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  dans  $L^2((0, \infty), L^2(\mathbb{T}))$ .

Ce résultat est, à ma connaissance, le premier justifiant un modèle de Saint Venant obtenu à partir de (1) et valide l’approche formelle de Vila sur un exemple simple. J’ai ensuite utilisé cette méthode pour étudier des écoulements plus complexes et fréquemment rencontrés dans la littérature. Je présente d’abord un modèle de Saint Venant pour un écoulement de fluide newtonien sur une topographie *quelconque* [2], en reprenant la formulation introduite par Bouchut et Westdickenberg [17]. Dans le régime “eaux peu profondes”, la vitesse est portée principalement par la direction de plus grande pente, le profil de vitesse est parabolique et la répartition de pression dans le fluide est hydrostatique. On peut alors faire le même calcul que dans le cas plan. Ici, la pente et la courbure du fond sont *quelconques* et d’ordre 1 (par rapport à  $\varepsilon$ ). Le modèle obtenu est écrit indépendamment du paramétrage de la surface choisie (coordonnées cartésiennes, orthogonales). Un résultat surprenant est qu’on retrouve les effets de capillarité principalement sous la forme d’un terme linéaire en  $h$  et dont le signe est donné par la courbure moyenne du fond. Il faut que la courbure du fond soit très faible pour retrouver les termes standards de capillarité.

Je présente ensuite les modèles que j’ai obtenu pour des fluides non newtoniens [3] : les fluides en loi de puissance et les fluides de Bingham. Dans les deux cas, il faut tenir compte d’une zone où la viscosité apparente du fluide devient asymptotiquement grande, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pour calculer un développement asymptotique des solutions de Navier-Stokes. Pour les fluides en loi de puissance, cette zone est proche de la surface libre et asymptotiquement mince : le calcul est alors très similaire à celui fait pour les fluides newtoniens. Pour les fluides de Bingham, il existe une zone non négligeable où le fluide est en très faible déformation (pseudo plug) mais la vis-

cosité apparente  $y$  est très grande et compense cette faible déformation. On obtient ainsi un nouveau modèle pour les fluides de Bingham

$$\partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \quad \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + P(h)) = ghs - \sigma_0 - \mu\phi(h)v + \sigma_0\psi(h)|\partial_x h|,$$

où  $s = \sin \theta$ ,  $\mu$  est la viscosité du fluide en déformation et  $\sigma_0$  un terme de seuil. Le terme en  $|\partial_x h|$  (oublié dans la plupart des modèles existants) reflète bien le caractère singulier de ce fluide entre les zones sans déformation où  $\partial_x h$  s'annule localement et celles en déformation où  $\partial_x h \neq 0$ .

On étudie enfin des écoulements à deux couches de fluides newtoniens. Les seuls modèles consistants sont obtenus pour des conditions de glissement au fond et à l'interface [54]. Je considère ici des conditions aux limites de Dirichlet au fond et la vitesse est continue à l'interface des deux fluides. L'objectif est de prolonger l'analyse de Kliakhandler [31] qui met en avant un certain nombre de mécanismes de déstabilisation de l'écoulement uniforme (flottaison, inertie, capillarité, stratification en densité). Son étude est menée à l'aide d'un système d'équations de Benney sur les hauteurs (ou Kuramoto-Sivashinsky si on tient compte de la capillarité). Mais ces équations sont mal posées lorsque les solutions stationnaires sont instables et il faut alors utiliser les modèles de Saint Venant.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à des instabilités hydrodynamiques, connues sous le nom de roll-waves, apparaissant, par exemple, dans des canaux inclinés [19] ou des déversoirs de barrage. Elles sont le résultat de la compétition entre les termes de gravité et de friction du fond. C'est un phénomène indésirable dont il faut tenir compte si on construit un barrage, par exemple. On peut décrire le phénomène comme une suite de chocs se propageant à vitesse constante, les parties régulières comportant une zone "supersonique" et une zone "subsonique" (la vitesse de référence n'est pas la vitesse du son mais celle des ondes de surface d'ordre  $\sqrt{gH}$  où  $H$  est la hauteur du fluide). Dressler [22] a montré qu'on pouvait décrire ces ondes non linéaires grâce à un modèle de Saint Venant ( $\beta = 1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ), lorsque l'écoulement uniforme est instable. Ceci justifie l'intérêt des modèles de Saint Venant par rapport aux équations de Benney. Les roll-waves de Dressler sont des ondes progressives spatialement périodiques et discontinues, solutions entropiques des équations de Saint Venant (2) et les chocs vérifient les conditions de chocs de Lax. On peut régulariser ces ondes discontinues en considérant une perturbation visqueuse de (2),

$$(4) \quad \partial_t(hv) + \partial_x\left(hv^2 + g \cos \theta \frac{h^2}{2}\right) = gh \sin \theta - \alpha_2 v^2 + \nu \partial_x(h \partial_x v).$$

Pour  $\nu$  fixé, l'existence de roll-waves continues de *petite amplitude* est une simple conséquence du théorème de bifurcation de Hopf [45]. Lorsque  $\nu \rightarrow 0$ , cette bifurcation est dégénérée mais on peut encore construire des roll-waves continues, proches

des roll-waves de Dressler (et donc de grande amplitude) à l'aide de théorèmes de perturbations singulières dans les EDO [27, 46].

Dans ce chapitre, je commence par aborder la question de l'existence de ces ondes non linéaires dans d'autres systèmes hyperboliques que (2), comme le modèle de Saint Venant bi-couche obtenu au chapitre 1. Plus précisément, on veut savoir si des roll-waves apparaissent (à la surface libre, à l'interface ou les deux) lorsque l'écoulement uniforme devient instable [31] comme c'est le cas pour un écoulement à une seule couche. Je présente ici un théorème d'existence de roll-waves de *petite amplitude* pour des systèmes hyperboliques avec termes source, la question de l'existence de roll-waves d'amplitude arbitraire restant ouverte. L'idée est de se ramener à une équation de Burgers instable scalaire  $u_t + u u_x = u$  (qui possède trivialement des roll-waves) comme l'ont fait Jin et Katsoulakis [30] à partir des équations de Saint Venant. J'ai déjà mis en oeuvre cette approche pour montrer l'existence de "pulsating roll-waves" [46] lorsque le fond est périodique et je montrerai qu'elle fonctionne encore pour un système général.

Le reste du chapitre 2 est consacré à la question de la stabilité des roll-waves continues et discontinues pour les modèles de Saint Venant (2) et (4). Pour le modèle de Saint Venant sans viscosité, il faut trouver un cadre fonctionnel convenable pour étudier des perturbations d'une roll-wave discontinue avec une infinité de chocs. On s'inspire du cadre développé pour les chocs simples multidimensionnels [15, 38, 42] en choisissant des fonctions  $C^1$  par morceaux et possédant des discontinuités proches de celles d'une roll-wave donnée. Pour un choc simple, un changement de repère suffit pour fixer complètement le choc et ramener le problème dans un demi-espace, les conditions de Rankine Hugoniot jouant le rôle de conditions de transmission sur la frontière du demi-espace. Pour les perturbations de roll-waves, on fixe *tous* les chocs en même temps en utilisant un changement de variable affine par morceaux. Dans ce système de coordonnées, la roll-wave devient une solution stationnaire du problème. Cette méthode permet ainsi d'analyser la stabilité spectrale des roll-waves [46]. Dans ce mémoire, je montre le caractère bien posé de (2) au voisinage des roll-waves de Dressler [4]. On peut formuler ce résultat de la manière suivante : si on choisit une donnée initiale proche d'une roll-wave et vérifiant certaines conditions de compatibilité aux points de discontinuité, alors le modèle de Saint Venant est bien posé dans les espaces de Sobolev  $H^s$  ( $s$  assez grand) et les discontinuités vérifient les conditions de chocs de Lax. C'est un résultat de *persistance* : la structure de roll-wave n'est pas détruite, i.e. il n'y a pas de singularité supplémentaire qui se crée entre les chocs préexistants. Il semble difficile d'aller plus loin pour ce qui concerne la stabilité vu la nature hyperbolique du système. La preuve est une adaptation de celle mise en place pour un seul choc [15]. On étudie d'abord un système linéarisé au voisinage d'une solution *approchée*. Si le nombre de Froude (i.e. le rapport entre la vitesse du fluide et celle des ondes de gravité) n'est pas trop important, les conditions

de chocs de Lax sont dissipatives et on obtient des estimations d'énergie  $L^2$  pour les solutions et leur trace aux points de discontinuité. On peut faire la même étude sur le problème adjoint et obtenir l'existence d'une solution faible grâce à un argument de dualité. L'étude de la régularité est plus délicate que pour un choc simple. Si l'étude de la régularité dans les directions transverses (le temps compris) reste la même, on ne peut pas en déduire directement la régularité dans *toutes* les directions simplement en utilisant les équations. Dans notre cas, la présence d'un point sonique entre les chocs nous empêche d'obtenir la régularité des solutions dans la direction de l'écoulement. On sépare alors la solution entre une partie qui s'annule au voisinage des chocs et dont on montre la régularité en dérivant les équations dans *toutes* les directions, et une autre partie dont on montre la régularité comme pour un choc simple non caractéristique. On traite ensuite le problème complet à l'aide d'un schéma itératif en appliquant le théorème du point fixe de Picard.

Finalement, je présente un résultat de stabilité spectrale (partiel) et linéaire des roll waves continues, solutions de (4). Depuis le travail original de Gardner sur la stabilité spectrale des ondes progressives périodiques pour les systèmes de réaction-diffusion [24, 25], l'analyse de stabilité de ces ondes s'est développée de manière spectaculaire pour aboutir, entre autre, à des résultats de stabilité non linéaire et à la construction de solutions "chocs faibles" où on relie deux ondes progressives de périodes proches [21]. Cette terminologie fait référence au fait que la dynamique des perturbations est pilotée par les basses fréquences et que dans ce régime, on peut obtenir une équation de Burgers (visqueuse) scalaire qui décrit l'évolution des perturbations (et permet donc d'obtenir la stabilité non linéaire). C'est un premier exemple d'équation de modulation [71]. La théorie est beaucoup moins avancée pour les systèmes de lois de conservation visqueuses. Cependant, Oh et Zumbrun ont calculé un développement limité de la fonction de Evans au voisinage des basses fréquences et obtenu des conditions nécessaires de stabilité spectrale (ce qu'on appelle l'indice de stabilité). Ils ont aussi vérifié numériquement l'instabilité dans certains cas [49], obtenu des estimations sur les fonctions de Green et prouvé un résultat de stabilité linéaire  $L^1 \cap L^p \rightarrow L^p$ ,  $p > 1$  [50]. Ces estimations ne permettent de conclure à la stabilité non linéaire qu'en dimension supérieure à trois [51], laissant les cas  $1d$  et  $2d$  ouverts. Je présente ici une analyse spectrale du problème en me basant sur l'approche de Oh et Zumbrun et je montre numériquement que les conditions nécessaires de stabilité sont vérifiées. En adaptant l'approche de Zumbrun au cas d'une viscosité *réelle* (qui induit la présence d'un mode hyperbolique supplémentaire), j'obtiens également des estimations sur la fonction de Green [6]. Pour aller plus loin, l'outil de référence semble être les équations de modulation de Whitham qui permettent, dans notre cas, d'obtenir un système d'EDP du premier ordre. Un premier résultat de Serre [64] montre l'équivalence entre la nature hyperbolique de ces équations (et donc qu'elles sont bien posées localement) et les conditions nécessaires de stabilité de Oh et Zumbrun.

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à l’existence de “breathers” dans des systèmes de particules du plan dont un groupe d’atomes a une masse caractéristique très supérieure aux autres. Les breathers (ou intrinsic localized modes, ILM) sont des oscillations périodiques localisées spatialement. L’existence de ces modes, pour des cristaux périodiques non linéaires, est suggérée dans les travaux de Sievers et Takeno [69] pour un système unidimensionnel de particules couplées non linéairement (le modèle de Fermi-Pasta-Ulam, FPU). Depuis, de nombreuses expériences ont confirmé l’existence de breathers dans différents systèmes physiques comme les matériaux antiferromagnétiques [60], certains cristaux moléculaires [23] et d’uranium [40]. On peut également les obtenir, et étudier leurs propriétés, en construisant des dispositifs expérimentaux adéquates : électroniques en couplant des jonctions de Josephson [16], mécaniques en couplant des pendules oscillants ou optiques à l’aide de guides d’ondes [39]. Pour certaines molécules tétraédriques, on peut faire un lien entre rapport de masse des atomes et apparition de breathers [28].

L’existence de breathers a été démontrée mathématiquement par Aubry et MacKay [35] pour des systèmes hamiltoniens possédant une limite “anticontinue” où les particules sont découplées et possèdent trivialement des breathers. Par exemple, dans un système de Klein Gordon

$$\ddot{x}_n + V'(x_n) = \varepsilon(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}), \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où  $V$  est un potentiel non harmonique, les particules sont découplées lorsque  $\varepsilon = 0$ . On construit aisément un breather en choisissant  $x_0$  une solution périodique de  $\ddot{x} + V'(x) = 0$  et en laissant les autres atomes au repos ( $x_n = 0$ ). Sous une hypothèse de non résonance, on peut prolonger cette solution périodique pour  $\varepsilon \neq 0$  à l’aide du théorème des fonctions implicites. Cette approche s’applique aussi à des chaînes FPU diatomiques [34] :

$$m_n \ddot{x}_n = V'(|x_{n+1} - x_n|) - V'(|x_n - x_{n-1}|), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_n \in \mathbb{R},$$

où  $m_{2n} = 1$  et  $m_{2n+1} = \gamma > 1$ . On peut encore trouver une limite anticontinue lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ . En effet, si  $\gamma = \infty$ , les masses lourdes sont immobiles et les particules légères sont découplées et soumises au potentiel créé par les masses lourdes et on construit aisément une solution breather. Le prolongement de ces solutions pour  $\gamma$  grand est plus difficile car la condition de non résonance de [35] n’est pas vérifiée et on ne peut pas appliquer directement le théorème des fonctions implicites.

Le problème étudié ici est plus complexe à cause de l’invariance des équations du mouvement par les translations et les rotations dans le plan. On s’inspire d’une stratégie mise en place par R. MacKay [37] et qui généralise aux dimensions supérieures à 1 le résultat de [34]. L’approche consiste d’abord à fixer la position moyenne des

masses lourdes et à “éliminer” les autres variables (la position des masses légères et la déviation des masses lourdes de leur position moyenne). Cette élimination repose sur la limite anticontinue introduite dans [34] où un breather est construit à partir d’un rapport de masse infini. La solution périodique obtenue dépend de manière régulière des positions moyennes des atomes lourds, qui sont considérées comme des paramètres. Dans un second temps, on étudie le problème statique sur les positions moyennes qui hérite de l’invariance euclidienne du système complet. On utilise en général un théorème des fonctions implicites au voisinage des équilibres du système complet [36] pour obtenir des solutions du problème statique *modulo les transformations euclidiennes*.

Je présente dans ce mémoire deux applications de cette méthode. J’étudie d’abord le cas général d’un système de  $N + n$  masses  $\gamma M_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ,  $N \geq 2$ ),  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) dans un champ de potentiel  $V$  invariant par transformations euclidiennes. Le rapport de masse  $\gamma$  sera ici considéré très grand et on supposera qu’il existe une famille d’équilibres. Lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , on met en évidence une limite anticontinue analogue à celle de [34] : les équations du mouvement des particules légères sont paramétrées par les positions moyennes des masses lourdes qui, elles, doivent vérifier des conditions de compatibilité. On résout ce système couplé comme suggéré par MacKay, en montrant d’abord l’existence de solutions périodiques des équations du mouvement des masses légères, ici à l’aide du théorème du centre de Lyapounov. Le résultat est donc seulement local. On obtient deux classes de solutions : les modes normaux non linéaires, qui sont proches des modes normaux classiques solutions des équations du mouvement linéarisées au voisinage d’un équilibre, et les breathers lorsque le potentiel  $V$  est découplé pour  $\gamma = \infty$ . Ces solutions dépendent de manière régulière des positions statiques. On résout ensuite le problème statique au voisinage des équilibres en appliquant le théorème des fonctions implicites. L’invariance euclidienne est éliminée en choisissant un repère adapté et en considérant le moment angulaire comme un paramètre. On restreint ensuite le prolongement de ces solutions à des rapports de masses grands mais finis pour les solutions périodiques dans un repère fixé et réversibles (ici paires) pour pouvoir appliquer simplement le théorème des fonctions implicites.

Cette méthode ne fonctionne plus pour des solutions non réversibles ou relativement périodiques (i.e. périodiques dans un repère en rotation). Je présente l’exemple d’un système triatomique pour lequel on obtient des modes localisés relativement périodiques. Le système est formé de deux masses lourdes et d’une masse légère dont l’hamiltonien est donné par

$$(5) \quad \tilde{H} = \frac{1}{2\gamma}(\tilde{P}_1^2 + \tilde{P}_2^2) + \frac{1}{2}\tilde{p}_1^2 + U(\|\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_2\|) + W(\|\tilde{Q}_1 - \tilde{q}_1\|) + W(\|\tilde{Q}_2 - \tilde{q}_1\|),$$

où  $Q_i \in \mathbb{R}^2$  (resp.  $q_1 \in \mathbb{R}^2$ ) sont les positions des masses lourdes (resp. de la masse légère) et  $P_i, p_1$  leurs moments conjugués. L’analyse locale de la limite anticontinue



est identique au cas général. Mais ici on peut faire une analyse *globale* du système dans la limite anticontinue et obtenir des solutions périodiques qui ne sont pas nécessairement proches d'un équilibre. En plus des modes normaux non linéaires, on obtient une classe de solutions périodiques de grande amplitude de type inversion, où la masse légère oscille de part et d'autre de la liaison entre masses lourdes. Pour prolonger ces solutions périodiques ou relativement périodiques et non réversibles pour  $\gamma < \infty$ , on s'inspire d'une méthode utilisée par Sepulchre et MacKay [63] pour la continuation de solutions périodiques *normales* dans des systèmes hamiltoniens et généralisée par Muñoz-Almaraz et al. [44] pour des situations plus dégénérées. L'idée est d'introduire des termes artificiels de dissipation de l'énergie et du moment angulaire (qui sont des quantités conservées du mouvement) et multipliés par des coefficients  $\alpha, \beta$  (l'idée est analogue à celle utilisée par Schmidt [59] pour démontrer le théorème du centre de Lyapounov à partir du théorème de bifurcation de Hopf). On montre alors que les solutions périodiques obtenues à la limite anticontinue sont les zéros d'une submersion (grâce aux coefficients supplémentaires  $\alpha, \beta$ ). En utilisant un théorème de persistance des zéros d'une submersion, on montre que ces solutions font localement partie d'une famille de solutions périodiques à deux paramètres et que cette famille persiste pour  $\gamma$  grand mais fini. On retrouve alors les solutions périodiques du problème initial en remarquant que les coefficients  $\alpha, \beta$  sont nécessairement nuls lorsque la solution est périodique. On a mis en oeuvre numériquement cette procédure de prolongement pour les solutions de type inversion, d'abord dans un repère fixe, en calculant un prolongement par rapport à  $\gamma$  puis, à  $\gamma$  fixé, en augmentant la vitesse angulaire du repère en rotation.

On peut comparer notre approche à celle utilisée pour obtenir des orbites relativement périodiques pour le problème des trois corps à partir du problème restreint avec une masse infiniment légère [9, 20, 43]. En fait, lorsque la vitesse angulaire du repère en rotation est faible, on peut mettre notre système sous une forme similaire au problème restreint en fixant les masses lourdes à 1 et la masse légère à  $\gamma^{-1}$  et en remplaçant l'interaction moléculaire par l'interaction gravitationnelle. La partie statique de la liaison entre masses lourdes correspond alors à une orbite circulaire du problème de Kepler. Cependant, le problème restreint gravitationnel est plus simple à étudier puisque l'énergie d'interaction entre la masse légère et les masses lourdes est d'ordre ( $O(1/\gamma)$ ) et il est découplé pour  $\gamma = \infty$  alors qu'on a encore un couplage (à travers le potentiel d'interaction moléculaire  $W$ ) dans notre cas.

# Chapitre 1

## Obtention de modèles de Saint Venant

Alors qu'ils sont couramment utilisés en hydraulique, les modèles de Saint Venant sont généralement obtenus de manière heuristique et sont inconsistants. Dans ce chapitre, je présente une méthode d'obtention des équations de Saint Venant, à partir des équations de Navier-Stokes à surface libre, qui soient consistants dans le régime "eaux peu profondes". Je détaille les calculs pour un fluide newtonien sur un plan incliné et donne les principales étapes de la justification rigoureuse de cette approche [1]. Je passe ensuite à l'étude de trois situations fréquemment rencontrées en mécanique des fluides.

- Modèles de Saint Venant pour des topographies quelconques : on généralise le cas précédent à un écoulement  $3d$  sur une topographie *quelconque* et on précise l'influence de la courbure du fond [2].
- Modèles de Saint Venant pour des fluides non Newtoniens : on présente les modèles obtenus pour les fluides de Bingham et en loi de Puissance [3].
- Modèles de Saint Venant pour des écoulements bi-couches : on propose un modèle pour un écoulement avec deux fluides newtoniens s'écoulant sur un plan incliné.



## 1.1 Cas d'un fluide newtonien sur un plan incliné

### 1.1.1 Dérivation formelle

Considérons un fluide newtonien incompressible s'écoulant sur un plan incliné d'un angle  $\theta$  dans le régime "eaux peu profondes", i.e. si  $H$  est la hauteur caractéristique du fluide et  $L$  la longueur d'onde caractéristique des modulations du champ de vitesse et pression dans la direction  $x$  d'écoulement, alors le *rapport d'aspect*  $\varepsilon = HL^{-1} \ll 1$ . Pour simplifier l'écriture, on notera  $s = \sin \theta$ ,  $c = \cos \theta$ . Le système de Navier-Stokes sans dimension s'écrit, dans cette asymptotique

$$(1.1) \quad u_t + u u_x + w u_z + \frac{2}{\mathbf{R}_e} p_x = \frac{2s}{\varepsilon \mathbf{R}_e} + \frac{1}{\varepsilon \mathbf{R}_e} (\varepsilon^2 u_{xx} + u_{zz}),$$

$$(1.2) \quad w_t + u w_x + w w_z + \frac{2}{\varepsilon^2 \mathbf{R}_e} p_z = -\frac{2c}{\varepsilon^2 \mathbf{R}_e} + \frac{1}{\varepsilon \mathbf{R}_e} (\varepsilon^2 w_{xx} + w_{zz}),$$

$$(1.3) \quad u_x + w_z = 0,$$

où  $\mathbf{R}_e = \frac{HU_0}{\nu}$  est un nombre de Reynolds ( $U_0 = \frac{gH^2}{2\nu}$ ) et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. On complète (1.1-1.3) avec les conditions de Dirichlet au fond  $u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0$ , et la continuité du tenseur des contraintes à la surface libre  $z = h$

$$(1.4) \quad p|_{z=h} + \varepsilon^2 W h_{xx} (1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2 h_x^2}{1 - \varepsilon^2 h_x^2} u_x|_{z=h},$$

$$(1.5) \quad u_z|_{z=h} + \varepsilon^2 w_x|_{z=h} = -\frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 h_x^2} h_x w_z|_{z=h}.$$

Le nombre de Weber  $W = \frac{\sigma}{\rho g H^2}$  mesure l'importance des effets de capillarité ( $\sigma$  mesure la tension superficielle et  $\rho$  la densité du fluide). Enfin la hauteur de fluide  $h$  vérifie la condition cinématique

$$(1.6) \quad h_t + u|_{z=h} h_x = w|_{z=h}.$$

Le système (1.1-1.6) est difficile à analyser et à simuler numériquement à cause de la surface libre. Pour s'affranchir de ce problème, on écrit en général des équations d'évolution sur la hauteur  $h$  et la valeur moyenne de  $u$  (notée  $v$ ) : sous certaines hypothèses (régime quasi-stationnaire et pression hydrostatique), on peut fermer ce système et obtenir un modèle de Saint Venant. On reprend directement cette approche sur (1.1-1.6) et sans faire d'hypothèse de modélisation, hormis  $\varepsilon \ll 1$ . En utilisant (1.3), on peut réécrire (1.6) sous la forme d'une équation de conservation de la masse

$$(1.7) \quad h_t + \left( \int_0^h u(x, z) dz \right)_x = h_t + (hv)_x = 0.$$

La vitesse horizontale moyenne  $v$  vérifie l'équation

$$(1.8) \quad (hv)_t + \left( \int_0^h u^2 + \frac{2p}{\mathbf{R}_e} dz \right)_x + \frac{\bar{\kappa} h_x h_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\varepsilon \mathbf{R}_e} \left( 2sh - u_z(x, 0) \right) + \frac{\varepsilon}{\mathbf{R}_e} \left( \int_0^h 2u_x dz \right)_x.$$

Pour fermer ce système, il faut relier les différentes quantités intégrées en hauteur et la contrainte au fond  $u_z(x, 0)$  à  $(h, v)$ , ce qu'on peut faire grâce à un développement asymptotique de  $u, w, p$  par rapport à  $\varepsilon \ll 1$ . Dans cette limite, les effets visqueux sont prédominants et la pression hydrostatique : on réécrit (1.1,1.5) sous la forme d'un système différentiel en  $z$ . La vitesse  $u$  vérifie

$$(1.9) \quad u_{zz} + 2s = 2\varepsilon p_x + \varepsilon \mathbf{R}_e (u_t + u u_x + w u_z) - \varepsilon^2 u_{xx},$$

et les conditions aux limites  $u|_{z=0} = 0$ ,  $u_z|_{z=h} = \frac{4\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 h_x^2} h_x u_x - \varepsilon^2 w_x|_{z=h}$ . On résout cette équation différentielle en  $z$

$$(1.10) \quad u(t, x, z) = 2s(h(t, x)z - \frac{z^2}{2}) + \mathcal{F}_u^\varepsilon(u, w, p)(t, x, z),$$

où  $\mathcal{F}_u^\varepsilon(u, w, p)$  est un opérateur intégro-différentiel (l'intégration porte uniquement sur  $z$ ). Si toutes les dérivées de  $u, w, p, h$  sont bornées, l'opérateur  $\mathcal{F}_u^\varepsilon$  est d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e)$  et formellement  $\varepsilon$ -Lipschitz. Le profil de vitesse est donc parabolique, proche d'une solution de "Nusselt" et on retrouve l'hypothèse de modélisation d'un régime quasi-stationnaire. On peut également écrire la pression sous la forme

$$(1.11) \quad p(x, z, t) = c(h(x, t) - z) - \frac{\bar{\kappa} \mathbf{R}_e}{2} h_{xx} + \mathcal{F}_p^\varepsilon(u, w, p)(x, z, t),$$

où  $\bar{\kappa} = \varepsilon^2 W$  : on supposera cette constante d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  si on veut observer les effets de capillarité. L'opérateur  $\mathcal{F}_p^\varepsilon(u, w, p)$  est aussi un opérateur intégro-différentiel, formellement d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $\varepsilon$ -Lipschitz. Enfin, la vitesse verticale est donnée par la condition de divergence nulle :

$$w(t, x, z) = - \int_0^z u_x(t, x, y) dy = -s h_x z^2 + \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e).$$

Pour obtenir un développement d'ordre plus élevé, on utilise un schéma formel d'itérations successives : les équations (1.3, 1.10, 1.11) montrent que  $u, w, p$  est un point fixe (formel) d'un opérateur  $\mathcal{F}^\varepsilon$  qui est  $\varepsilon$ -Lipschitz. On définit une suite de solutions approchées  $u^{(n)}, p^{(n)}, w^{(n)}$  de  $(u, w, p)$  par

$$(1.12) \quad (u^{(n+1)}, p^{(n+1)}, w^{(n+1)}) = \mathcal{F}^\varepsilon(u^{(n)}, p^{(n)}, w^{(n)}),$$

avec  $u^{(0)}, p^{(0)}, w^{(0)}$  définis par

$$u^{(0)} = s(2h(t, x)z - z^2), \quad p^{(0)} = c(h(x, t) - z) - \frac{\bar{\kappa} \mathbf{R}_e h_{xx}}{2}, \quad w^{(0)} = -s h_x z^2.$$

Si toutes les dérivées de  $(u, w, p)$  et les fonctions  $(u^{(n)}, w^{(n)}, p^{(n)})_{n \geq 1}$  sont bornées, on montre par récurrence que

$$\max \left( |u - u^{(n)}|, |w - w^{(n)}|, |p - p^{(n)}| \right) = \mathcal{O} \left( (\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e)^{n+1} \right).$$

On obtient ainsi un développement de  $u, w, p$  à n'importe quel ordre en  $\varepsilon$  en fonction de  $h$  et de ses dérivées. Pour fermer (1.8), on calcule un développement asymptotique des quantités intégrées en hauteur en fonction de  $h$  et  $v$ . On remarque d'abord que  $v$  vérifie

$$hv = \int_0^{h(t,x)} u^{(0)}(t, x, \zeta) d\zeta + \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e) = 2s \frac{h^3}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e).$$

Ceci fournit une première équation modèle pour un écoulement de fluide newtonien de faible profondeur : si on injecte le développement de  $hv$  dans l'équation de conservation de la masse, on obtient

$$(1.13) \quad \partial_t h + \partial_x \left( 2s \frac{h^3}{3} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e),$$

qui est une équation de conservation (si on néglige les termes d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e)$ ) exhibant des singularités en temps fini. C'est un premier élément de la hiérarchie de modèles qu'on obtient dans le régime eaux peu profondes : elle nous donne la vitesse de propagation des perturbations ondes longues à  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  près. Cette équation fournit en plus une relation entre  $h_t$  et  $h_x$  qu'on exploitera plus tard.

Le profil étant essentiellement parabolique et la pression hydrostatique, on déduit aisément de (1.10,1.11) les relations suivantes (fréquemment utilisées pour obtenir un modèle de Saint Venant)

$$(1.14) \quad \int_0^{h(t,x)} u^2(t, x, \zeta) d\zeta = \frac{6}{5} (hv^2)(t, x) + \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e),$$

$$(1.15) \quad \int_0^h p(\cdot, \cdot, \zeta) d\zeta = c \frac{h^2}{2} - \bar{\kappa} \frac{\mathbf{R}_e}{2} h h_{xx} + \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e).$$

En remplaçant (1.14) et (1.15) dans (1.8), on obtient

$$(1.16) \quad (hv)_t + \left( \frac{6}{5} hv^2 + \frac{ch^2}{\mathbf{R}_e} \right)_x - \bar{\kappa} h h_{xxx} = \frac{1}{\varepsilon \mathbf{R}_e} (2s h - u_z(x, 0)) + \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{R}_e + \frac{\varepsilon}{\mathbf{R}_e}).$$

Cette équation est fermée pourvu qu'on ait calculé  $u_z(x, 0)$  et négligé les termes d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{Re} + \varepsilon (\mathbf{Re})^{-1})$ . C'est ici qu'apparaît l'inconsistance des premiers modèles obtenus à partir de (1.8). En fait, partant du développement à l'ordre  $\mathcal{O}(1)$  de  $v$ , on écrit, en général

$$\partial_z u(0) \approx 2s h \approx \frac{3v}{h},$$

et en remplaçant dans (1.8), on obtient un modèle de Saint Venant *fermé*. Cependant, on a négligé des termes d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  dans le terme source qui est pondéré par un coefficient  $(\varepsilon \mathbf{Re})^{-1}$  et donc des termes d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  dans (1.8)! Pour corriger ce problème, on calcule le développement de  $u$  et  $v$  à l'ordre suivant. Il suffit de calculer  $u^{(1)}$  défini par (1.12) et qui vérifie  $u - u^{(1)} = \mathcal{O}((\varepsilon + \varepsilon \mathbf{Re})^2)$ . Pour simplifier les notations, on écrira  $u^{(1)} = u^{(0)} + \varepsilon \bar{u}_1 + \mathcal{O}((\varepsilon + \varepsilon \mathbf{Re})^2)$ . La fonction  $\bar{u}_1$  est une fonction polynomiale en  $z$  dont les coefficients sont des fonctions de  $h, h_t, h_x$ . On obtient alors une expression de  $u_z(0)$  à l'aide de  $v$  et  $h, h_t, h_x$  :

$$(1.17) \quad u_z|_{z=0} = \frac{3v}{h} + \varepsilon \left( \partial_z \bar{u}^{(1)}|_{z=0} - \frac{3}{h^2} \int_0^h \bar{u}^{(1)} \right) + \mathcal{O}((\varepsilon + \varepsilon \mathbf{Re})^2).$$

Ceci fournit un premier modèle fermé en remplaçant (1.17) dans (1.16) puis en négligeant les termes d'ordre  $\mathcal{O}((\varepsilon(1 + \mathbf{Re} + \mathbf{Re}^{-1})))$

$$(1.18) \quad (hv)_t + \left( \frac{6}{5} h v^2 + \frac{c h^2}{\mathbf{Re}} \right)_x - \bar{\kappa} h h_{xxx} = \frac{1}{\varepsilon \mathbf{Re}} \left( 2s h - \frac{3v}{h} \right) - \left( \frac{7s^2}{30} h^4 h_x + \frac{s}{4} h^2 h_t \right).$$

On peut aussi écrire (1.18) sous forme conservative, à un terme d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  près, en utilisant l'équation de Burgers (1.13). On a  $h_t = -2s h^2 h_x + \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon \mathbf{Re})$  et en remplaçant  $h_t$  par  $-2s h^2 h_x$  dans (1.18), on obtient

$$(1.19) \quad \begin{cases} h_t + (hv)_x = 0, \\ (hv)_t + \left( \frac{6}{5} h v^2 + \frac{c h^2}{\mathbf{Re}} - \frac{(2s)^2}{75} h^5 \right)_x - \bar{\kappa} h h_{xxx} = \frac{1}{\varepsilon \mathbf{Re}} \left( 2s h - \frac{3v}{h} \right). \end{cases}$$

Le terme de correction obtenu est inertiel : il est homogène à  $(hv^2)_x$ . On peut aller plus loin dans l'exploitation de la relation  $hv = 2s \frac{h^3}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Par exemple, on peut ramener le coefficient devant  $hv^2$  à 1. Dans ce cas, le flux dans l'équation de quantité de mouvement est de la forme

$$\frac{6}{5} h v^2 + \frac{c h^2}{\mathbf{Re}} - \frac{(2s)^2}{75} h^5 = h v^2 + \frac{c h^2}{\mathbf{Re}} + (2s)^2 \left( \frac{1}{45} - \frac{1}{75} \right) h^5 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

On peut donc choisir le coefficient devant  $hv^2$ . Le choix du modèle est alors dicté par ses propriétés mathématiques comme c'est le cas pour les équations d'amplitude pour le problème des water-waves. Si on choisit le modèle (1.19), le système n'est pas hyperbolique sur tout le domaine physique  $h \geq 0$  alors que c'est le cas si on choisit le flux sous la forme  $(hv, hv^2 + P(h))$ .

### 1.1.2 Justification rigoureuse et consistance du modèle

On a montré que si  $(u, w, p, h)$  est solution de (1.1-1.6) alors  $h, v = h^{-1} \int_0^h u$  vérifie

$$(1.20) \quad \begin{cases} h_t + (hv)_x = 0, \\ (hv)_t + \left( \frac{6}{5} h v^2 + \frac{c h^2}{\mathbf{Re}} - \frac{(2s)^2}{75} h^5 \right)_x - \bar{\kappa} h h_{xxx} = \frac{1}{\varepsilon \mathbf{Re}} \left( 2s h - \frac{3v}{h} \right) + \tilde{\mathcal{R}}, \end{cases}$$

où  $\tilde{\mathcal{R}}$  est une fonction qui dépend de  $h, (u, w)$  et  $p$ . Elle est formellement d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon(1 + \mathbf{Re} + \mathbf{Re}^{-1}))$ . On montre que  $\tilde{\mathcal{R}}$  converge vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour une norme à définir. La fonction  $\tilde{\mathcal{R}}$  est donnée par  $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3$  avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= -\partial_x \mathcal{R}_1^{(1)}(t, x) + \frac{\varepsilon}{\mathbf{Re}} \partial_x \left( \int_0^{h(t,x)} u_x(t, x, \zeta) d\zeta \right) + \bar{\kappa} \left( (1 - (1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{-\frac{3}{2}}) h_x h_{xx} \right), \\ \mathcal{R}_1^{(1)} &= \int_0^h (u^2 - (u^{(0)})^2)(\cdot, \zeta) + (p - p^{(0)})(\cdot, \zeta) d\zeta \\ &\quad + \frac{12}{15} v \int_0^h (u - u^{(0)})(x, y, t) dy + \frac{2}{15 h} \left( \int_0^h (u - u^{(0)}(\cdot, \zeta) dy \right)^2, \end{aligned}$$

alors que  $\mathcal{R}_2 = \frac{sh^2}{4} \partial_x \left( \int_0^h u - u^{(0)} \right)$  et  $\mathcal{R}_3 = \partial_z \mathcal{R}_3^{(1)}(0) - \frac{3}{h^2} \int_0^h \mathcal{R}_3^{(1)}$  où

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3^{(1)} &= \frac{\varepsilon}{\mathbf{Re}} \int_0^z \int_\zeta^h u_{xx} - u_{xx}^{(0)} - \int_0^z \int_\zeta^h \frac{2}{\mathbf{Re}} (p - p^{(0)})_x \\ &\quad - \frac{\varepsilon z}{\mathbf{Re}} \left( (w_x(h) + \frac{w_z(h)}{1 - \varepsilon^2 h_x^2}) - (w_x^{(0)}(h) + \frac{w_z^{(0)}(h)}{1 - \varepsilon^2 h_x^2}) \right) \\ &\quad + \int_0^z \int_\zeta^h (u - u^{(0)})_t + (u u_x - u^{(0)} u_x^{(0)}) + (w u_z - w^{(0)} u_z^{(0)}). \end{aligned}$$

La justification du modèle de Saint Venant consiste donc à obtenir une estimation sur l'écart entre  $u$  et  $u^{(0)}$ ,  $p$  et  $p^{(0)}$  où  $u^{(0)} \approx U(z) = 2s(z - \frac{z^2}{2})$  et  $p^{(0)} \approx P(z) = c(1 - z)$  lorsque l'amplitude des oscillations de la surface libre sont faibles. On se place donc dans un cadre où on étudie le caractère bien posé de (1.1-1.6) au voisinage de cette solution stationnaire. Ce problème a été résolu par Nishida et Teramoto [48] pour  $\varepsilon = 1$  qui ont en plus montré un résultat de stabilité non linéaire. Toute la difficulté consiste à obtenir le même type d'estimation lorsque  $\varepsilon \ll 1$ . On décompose le champ de vitesse  $u, w, p, h = 1 + \tilde{h}$  sous la forme

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ \varepsilon^{-1} w \end{pmatrix} (t, x, z) &= \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{J} D\Theta_t \circ \Theta_t^{-1}(x, \varepsilon z) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} (t, \Theta_t^{-1}(x, \varepsilon z, \cdot)), \\ p(t, x, z) &= c(1 - z) + \varepsilon \tilde{p}(t, \Theta_t^{-1}(x, \varepsilon z)), \end{aligned}$$

où  $\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{p}$  sont définis sur le domaine fixe  $\Omega = \mathbb{T} \times (0, \varepsilon)$ ,  $\Theta_t : \Omega \rightarrow \Omega_t$  est un difféomorphisme dépendant de  $h = 1 + \tilde{h}$  et  $\Omega_t = \varepsilon(1 + \tilde{h})$  est le domaine fluide. De plus la condition de divergence nulle est préservée, i.e.  $\tilde{u}_x + \tilde{w}_z = 0$ . On obtient un système qu'on sépare entre une partie linéaire et une partie non linéaire

$$(1.22) \quad \tilde{u}_t + U \tilde{u}_x + U_z \tilde{w} + 2\mu \tilde{p}_x = \mu \Delta \tilde{u} + F_1, \quad \tilde{w}_t + U \tilde{w}_x + 2\mu \tilde{p}_z = \mu \Delta \tilde{w} + F_2,$$

où  $\mu = \frac{\varepsilon}{\mathbf{R}_e}$ . Les conditions limites en  $z = \varepsilon$  sont

$$(1.23) \quad \tilde{u}_z|_{z=\varepsilon} + \tilde{w}_x|_{z=\varepsilon} - 2\frac{S}{\varepsilon} \tilde{h} = H_1, \quad \tilde{p}|_{z=\varepsilon} - \frac{C}{\varepsilon} \tilde{h} + \varepsilon W \tilde{h}_{xx} + \tilde{u}_x|_{z=\varepsilon} = H_2,$$

et  $\tilde{h}$  vérifie  $\tilde{h}_t = \frac{w|_{z=\varepsilon}}{\varepsilon} + H_3$ . On a les conditions de Dirichlet au fond ( $z = 0$ ),  $u(0) = w(0) = 0$ . Les fonctions  $F_i, H_i$  sont des fonctions non linéaires au moins quadratiques en  $\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{h}$ . On peut montrer l'estimation suivante

**Théorème 1.1.1** *Il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que si*

$$(1.24) \quad \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{\varepsilon k}} \leq \varepsilon_1, \quad \frac{|\tilde{h}_0|_\infty}{\varepsilon} + |\partial_x^2 \tilde{h}_0|_0 + \varepsilon^{\frac{1}{4}} |\tilde{h}_0|_{\frac{5}{2}} + \sqrt{\varepsilon} \|(\tilde{u}_0, \tilde{w}_0)\|_{H^2} \leq \varepsilon_1,$$

alors il existe  $0 < \gamma_1 < \frac{2}{3} - 2s\mathbf{R}_e$ , tel qu'on ait l'estimation d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( E(\tilde{u}, \tilde{w}) + \mu K(\tilde{h}) \right) + \gamma_1 \mu G(\tilde{u}, \tilde{w}) \leq 0,$$

où  $E, K, G$  sont définies par  $E(u, w) = \sum_{j=0}^2 \|\partial_x^j(u, w)\|_0 + ((Id + \beta(h))\partial_t u, \partial_t u)$  et

$$K(h) = \sum_{j=0}^2 c(|\partial_x^j h|_0 + |\partial_t h|_0^2) + \kappa(|\partial_x^{j+1} h|_0 + |\partial_t \partial_x^j h|_0^2)$$

$$G(u, w) = \sum_{j=0}^2 \|\nabla \partial_x^j(u, w)\|_0^2 + \|\nabla \partial_t(u, w)\|_0^2.$$

En utilisant la régularité elliptique du problème de Stokes, on peut en déduire des estimations en norme de Sobolev classiques. Les hypothèses sur la capillarité et la pente permettent de prendre en charge des termes non linéaires pondérés par un coefficient  $\varepsilon^{-1}$ . La preuve repose essentiellement sur des inégalités de Sobolev en domaine mince (Sobolev, Agmon et Ladyzenskaia) et une inégalité de Korn dont on peut trouver les preuves dans [29, 66]. On utilise également un lemme sur la régularité elliptique pour un problème de Stokes en domaine mince.

**Lemme 1.1.2** Soit  $f \in (H^1(\Omega))^2$ ,  $\phi \in (H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}))^2$ . On considère le problème de Stokes dans  $\Omega$  :

$$-\Delta \bar{u} + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} \bar{u} = 0, \quad \forall (x, z) \in \Omega, \quad \bar{u}|_{z=0} = 0, \quad \bar{u}|_{z=\varepsilon} = \phi, \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que pour  $i = 0, 1$ , on ait

$$(1.25) \quad \|\bar{u}\|_{2+i} + \|\nabla p\|_i \leq C \left( \|f\|_i + \frac{|\phi_1|_{1+i}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} + \frac{|\phi_2|_i}{\varepsilon^{\frac{5}{2}}} + \|\nabla \bar{u}_x\|_0 + \|\nabla \bar{u}_{xx}\|_0 \right).$$

On montre ce résultat en se ramenant au cas de conditions aux limites homogènes  $\phi = 0$ , ce dernier étant traité par Temam et Ziane dans [66]. La difficulté principale consiste alors à obtenir les constantes optimales devant les normes portant sur  $\phi_i$  : il faut trouver un champ de vitesse à divergence nulle tel que  $\bar{v}|_{z=\varepsilon} = \phi$ ,  $\bar{v}|_{z=0} = 0$  et la norme  $\|\Delta \bar{v}\|_0$  soit minimale. Une fois passé en série de Fourier, c'est un problème d'optimisation sous contraintes standard qu'on résout mode par mode. Du théorème 1.1.1, on déduit une estimation sur  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

**Théorème 1.1.3** On suppose que la constante de capillarité  $\bar{\kappa}$  vérifie  $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon}}$  et le nombre de Reynolds  $\mathbf{R}_e$  est tel que  $\mathbf{R}_e s < \frac{1}{3}$ . Si la condition initiale  $(\tilde{u}_0, \tilde{w}_0, \tilde{h}_0)$  vérifie les hypothèses du théorème 1.1.1 et  $\frac{\sin(\theta)}{\kappa}$  est suffisamment petit, alors on a l'estimation  $\|\tilde{\mathcal{R}}\|_{L^2(0, \infty; L^2(\mathbb{T}))} \leq C\sqrt{\varepsilon}$ , où  $C$ , est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

On justifie ainsi rigoureusement la famille de modèles de Saint Venant obtenus dans la section 1.1.1 lorsque la tension de surface est grande (ou la pente très faible) et  $\mathbf{R}_e s < \frac{1}{3}$ . Concrètement, il faut que les solutions stationnaires des équations de Navier-Stokes soient stables. En fait, on peut montrer un lien plus étroit entre la stabilité pour le modèle de Saint Venant obtenu et la stabilité des équations de Navier-Stokes dans la limite des grandes longueurs d'ondes. Dans la suite de la discussion, on néglige la tension de surface qui n'intervient pas à cette échelle. Si on analyse la stabilité spectrale des solutions stationnaires de Navier Stokes, on est amené à étudier le problème linéaire obtenu en faisant  $F_i = H_i = 0$  dans (1.22-1.23). Si on cherche une solution sous la forme  $(\tilde{u}, \tilde{w}) = (-\partial_z \tilde{\phi}, \partial_x \tilde{\phi})$  et  $(\tilde{\phi}, \tilde{p}, \tilde{h}) = e^{ik(x+ct)}(\bar{\phi}(z), \bar{p}(z), \bar{h})$ , on doit résoudre l'équation différentielle

$$-\frac{1}{\mathbf{R}_e}(\bar{\phi}^{(4)} - 2k^2\bar{\phi}^{(2)} + k^4\bar{\phi}) = -ik^3(U+c)\bar{\phi} + ik(U'\bar{\phi} - (U+c)\bar{\phi}'),$$

avec les conditions aux limites

$$-\frac{1}{\mathbf{R}_e}(\bar{\phi}^{(3)} - k^3\bar{\phi}')|_{z=1} = ik(U'\bar{\phi} - (U+c)\bar{\phi}')|_{z=1} + \frac{2ik}{\mathbf{R}_e}(\cos(\theta)\bar{h} + ik\bar{\phi}'|_{z=1}),$$

$$\bar{\phi}''(1) + k^2\bar{\phi}(1) + 2s\bar{h} = 0, \quad \bar{\phi}(1) = (U(1)+c)\bar{h}, \quad \bar{\phi}(0) = \bar{\phi}'(0) = 0.$$

Si on fait un développement à l'ordre 1 de la fonction propre  $\phi$  et de  $c$ , on obtient :

$$(1.26) \quad c(k) = -2s + \frac{2sik}{3} \left( \cot \theta - \frac{4}{5} \mathbf{R}_e s \right) + \mathcal{O}(k^2).$$

On obtient donc le critère de stabilité spectrale des solutions stationnaires des équations de Navier-Stokes dans le régime ondes longues  $k \approx 0$

$$(1.27) \quad \mathbf{R}_e s \leq \frac{5}{4} \cot \theta.$$

L'analyse de stabilité des solutions stationnaires du modèle de Saint Venant revient à faire un calcul de relaxation, le paramètre  $\varepsilon^{-1}$  mesurant déjà la longueur d'onde caractéristique des perturbations. Après calcul, on obtient l'équation de Benney

$$(1.28) \quad \partial_t h + \partial_x \left( 2s \frac{h^3}{3} \right) = 2s\varepsilon \partial_x \left( h^3 \left( \cot \theta - \frac{4}{5} h^3 \mathbf{R}_e s \right) \partial_x h \right).$$

La relation de dispersion s'écrit  $c(k) = -2s + \frac{2sik\varepsilon}{3} \left( \cot \theta - \frac{4}{5} \mathbf{R}_e s \right)$  et on obtient le même critère de stabilité aux ondes longues. En fait les 2 relations de dispersion coïncident à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près, ce qui est cohérent puisqu'on a calculé un développement limité du champ de vitesse  $(u, w, p)$  au même ordre. On voit ici un des intérêts des modèles de Saint Venant obtenus de manière consistante : ils permettent d'obtenir simplement les conditions de stabilité des solutions stationnaires de Navier-Stokes dans le régime des grandes longueurs d'ondes. De plus, on déduit aisément de ces modèles les équations de Benney (1.28) puisqu'elles sont simplement le résultat d'un calcul de relaxation dans un système hyperbolique avec terme source. L'autre intérêt de ces modèles, par rapport aux modèles à une équation comme (1.28), est qu'ils restent bien posés même lorsque le flot uniforme est instable. On peut donc étudier très simplement certaines instabilités hydrodynamiques dans les fluides minces. Dans le chapitre suivant, on mettra en avant des instabilités de type roll-waves.

La méthode décrite dans la section 1.1.1 étant justifiée mathématiquement, on la décline pour différentes situations rencontrées dans la littérature : écoulement d'un fluide newtonien sur topographie quelconque, écoulements de fluides non newtoniens (loi de puissance et Bingham) et écoulement de deux fluides newtoniens superposés.

## 1.2 Cas d'une topographie quelconque

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien sur une topographie *quelconque* définie par la surface  $\mathcal{S} : y = z(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$ . Les coordonnées cartésiennes



n'étant pas toujours adaptées, on considère un paramétrage plus général de la forme  $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto (x(\xi), z(x(\xi)))$ . La normale  $\mathbf{n}$  à  $\mathcal{S}$  est donnée par

$$\mathbf{n} = (1 + |\nabla_x z|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\nabla_x z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ c \end{pmatrix}$$

où  $c = \cos \theta$  et  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{n}$  et la verticale. La courbure du fond est donnée par  $\mathcal{H}_b = c \partial_{xx}^2 z$  et on a  $\partial_x \mathbf{s} = (1 - \mathbf{s}\mathbf{s}^t) \mathcal{H}_b$ . On définit un système de coordonnées adapté à l'écoulement d'une couche de fluide sur la surface  $\mathcal{S}$  : d'une part, le domaine fluide  $\Omega_t$  est donné par

$$\vec{X} \in \Omega_t \Leftrightarrow \vec{X}(\xi, \bar{\xi}) = \begin{pmatrix} x(\xi) \\ z(x(\xi)) \end{pmatrix} + \bar{\xi} \begin{pmatrix} -\mathbf{s}(x(\xi)) \\ c(x(\xi)) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \bar{\xi} \leq h(\xi, t),$$

où  $h$  désigne la hauteur de fluide selon  $\mathbf{n}$ . On notera par la suite  $\vec{\xi} = (\xi, \bar{\xi})$ . Ensuite, on introduit une décomposition jacobienne de la vitesse  $\vec{U}$  pour écrire les équations de Navier-Stokes.

$$(1.29) \quad \vec{U} = \left( \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} \right) \vec{V} \iff \begin{cases} U = (\partial_{\xi} X) V - \bar{V} \mathbf{s}, \\ \bar{U} = \frac{1}{c} \mathbf{s}^t (\partial_{\xi} X) V + c \bar{V}, \end{cases}$$

avec  $\partial_{\xi} X = (Id - \bar{\xi} \partial_x \mathbf{s}) \partial_{\xi} x$ ,  $U, V \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{U}, \bar{V} \in \mathbb{R}$ . On note  $A = \left( \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} \right)^{-1}$  la matrice jacobienne du changement de variable et  $J = \det(\partial_{\vec{\xi}} \vec{X})$ . Dans ce système de coordonnées, la condition de divergence nulle s'écrit

$$(1.30) \quad J \nabla_{\vec{X}} \cdot \vec{U} = \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J \vec{V}) = \nabla_{\xi} \cdot (J V) + \partial_{\bar{\xi}} \bar{V} = 0,$$

et les équations de conservation de la quantité de mouvement deviennent

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \rho(\partial_t V + \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}} V) + M \nabla_{\xi} p &= -\rho g c (\partial_{\xi} X)^{-1} \mathbf{s} + \rho \Gamma(\vec{V}) \\ &+ \frac{\mu}{J} M \left( \nabla_{\xi} \cdot (J P M) + \partial_{\bar{\xi}} (J Z) + \frac{J}{2} P : \nabla_{\xi} M \right), \end{aligned}$$

$$(1.32) \quad \begin{aligned} \rho(\partial_t \bar{V} + \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}} \bar{V}) + \partial_{\bar{\xi}} p &= -\rho g c + \rho \bar{\Gamma}(\vec{V}) \\ &+ \frac{\mu}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot (J M Z) + \partial_{\bar{\xi}} (J f) + \frac{J}{2} P : \partial_{\xi} M \right), \end{aligned}$$

où  $M = (\partial_{\xi} X)^{-1} (Id - \mathbf{s} \mathbf{s}^t) (\partial_{\xi} X)^{-t}$ . Le vecteur  $\vec{\Gamma}(\vec{V}) = (\Gamma(\vec{V}), \bar{\Gamma}(\vec{V}))$  désigne les forces centrifuges liées au changement de repère :

$$\vec{\Gamma}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \Gamma(\vec{V}) \\ \bar{\Gamma}(\vec{V}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_{\xi} X)^{-1} \left( -(\partial_{\xi \xi}^2 X) \cdot V \cdot V + 2\bar{V} (\partial_{\xi} \mathbf{s}) V + \bar{\Gamma}(\vec{V}) \mathbf{s} \right) \\ -c V^t (\partial_{\xi} x)^t (\partial_{xx}^2 z) (\partial_{\xi} X) V \end{pmatrix}.$$

Les quantités  $P, Z, f$  sont associées à la transformation du tenseur de déformation  $\sigma = \partial_{\vec{x}} \vec{U} + (\partial_{\vec{x}} \vec{U})^t$  et définies par

$$A^{-t} \sigma A^{-1} = \begin{pmatrix} P & Z \\ Z^t & f \end{pmatrix}.$$

On ajoute des conditions aux limites au fond avec une condition de Dirichlet  $V(\xi, 0) = \bar{V}(\xi, 0) = 0$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  et à la surface libre  $\bar{\xi} = h(\xi, t)$  avec la continuité du tenseur des contraintes du fluide

$$(1.33) \quad \begin{aligned} \mu P_h M_h \nabla_{\xi} h + \mu Z_h + p_h M_h \nabla_{\xi} h &= -\kappa \mathcal{H} \nabla_{\xi} h, \\ -\mu (M_h Z_h)^t \nabla_{\xi} h + \mu f_h - p_h &= \kappa \mathcal{H}. \end{aligned}$$

où  $\mathcal{H}$  est la courbure moyenne de la surface libre. Enfin la condition d'imperméabilité  $h_t + V(\cdot, h) \cdot \nabla_{\xi} h = \bar{V}(\cdot, h)$  donne l'évolution de la surface libre. On a donc écrit un système d'équations portant sur la vitesse parallèle au fond et sur la vitesse normale et on est ramené à la situation précédente. On cherche donc un modèle de Saint Venant sur la hauteur du fluide et le débit parallèle au fond. Si  $H$  désigne la hauteur caractéristique du fluide,  $L$  la longueur d'onde des modulations en  $\xi$  et  $U_0$  une vitesse caractéristique du fluide, on pose  $\varepsilon = HL^{-1}$  et

$$\mathbf{F} = \frac{U_0}{\sqrt{gH}}, \quad \mathbf{R}_e = \frac{\rho H U_0}{\mu}, \quad \mathbf{W}_e = \frac{\kappa}{\rho H U_0^2},$$

où  $\mathbf{F}$  est un nombre de Froude,  $\mathbf{R}_e$  le nombre de Reynolds et  $\mathbf{W}_e$  un nombre de Weber. On se place dans le régime "eaux peu profondes",  $\varepsilon \ll 1$ . En fait, on peut montrer qu'il suffit de choisir  $\alpha, \beta, \delta \ll 1$  où

$$\alpha = \varepsilon \frac{\mathbf{F}^2}{\mathbf{R}_e}, \quad \beta = \varepsilon \mathbf{R}_e, \quad \delta = \varepsilon \frac{\mathbf{R}_e}{\mathbf{F}^2}$$

pour que la méthode proposée fonctionne encore : ceci permet de considérer une gamme de nombre de Reynolds et de Froude plus large que  $\mathbf{R}_e, \mathbf{F} = \mathcal{O}(1)$ . Pour étudier l'influence du fond, on supposera  $\mathbf{s} = \mathcal{O}(1)$  i.e.  $\nabla_x z = \mathcal{O}(1)$  ce qui impose l'échelle  $z = L\tilde{z}$ . On introduit un paramètre supplémentaire mesurant l'influence de la courbure du fond : si la courbure est d'ordre  $\mathcal{O}(R^{-1})$  (on n'a pas nécessairement  $R = L$ ), on pose  $\theta_R = LR^{-1}$ . Une fois (1.30-1.33) écrit avec des variables adimensionnées, on obtient un développement asymptotique de la même manière que dans le cas plan. On montre que  $V, p$  vérifient

$$(1.34) \quad \begin{aligned} V &= -\lambda c \left( h\bar{\xi} - \frac{\bar{\xi}^2}{2} \right) (\partial_{\xi} x) \mathbf{s} + \mathcal{F}_V(\vec{V}, p, \alpha, \beta, \delta, \varepsilon \theta_R), \\ p &= c(h - \bar{\xi}) - \bar{\kappa} \mathcal{H} + \mathcal{F}_p(\vec{V}, p, \alpha, \beta, \delta, \varepsilon \theta_R), \end{aligned}$$

alors que la vitesse verticale est donnée par (1.30):  $\bar{V} = -\int_0^{\bar{\xi}} \nabla_{\xi} \cdot (JV)$ . Les opérateurs  $\mathcal{F}_V, \mathcal{F}_p$  sont respectivement d'ordre (et de constante de Lipschitz)  $\mathcal{O}(\beta + \delta + \theta_R(\varepsilon + \delta))$  et  $\mathcal{O}(\alpha + \theta_R\beta)$ . Le calcul du développement asymptotique de  $\bar{V}, p$  par rapport à  $\alpha, \beta, \delta$  se fait alors à l'aide d'un schéma itératif. Comme dans le cas plan, on retrouve les hypothèses classiques d'obtention de modèles de Saint Venant, régime quasi-établi (ici un profil parabolique et dans la direction de plus grande pente) et pression hydrostatique, simplement au moyen de l'adimensionnement dans le régime "eaux peu profondes".

Commençons par écrire une équation de conservation de la masse : en intégrant (1.30) sur  $(0, h)$ , on obtient

$$(1.35) \quad \partial_t \tilde{h} + \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{h}\tilde{v}) = 0, \quad \tilde{h} = \int_0^h J, \quad \tilde{h}\tilde{v} = \int_0^h JV.$$

On choisit d'écrire un système de Saint Venant avec  $\tilde{h}, \tilde{v}$  pour avoir une équation de conservation de la masse simple. L'évolution de  $\tilde{h}\tilde{v}$  est donnée par

$$(1.36) \quad \begin{aligned} & \partial_t \left( \int_0^h JV \right) + \nabla_{\xi} \cdot \left( \int_0^h JV \otimes V \right) + \frac{1}{\mathbf{F}^2} \nabla_{\xi} \cdot \left( \int_0^h JpM \right) + \frac{\varepsilon \mathcal{H}}{\mathbf{We}} J_h M_h \nabla_{\xi} h = \\ & - \frac{1}{\varepsilon \mathbf{F}^2} c \int_0^h J(\partial_{\xi} X)^{-1} \mathbf{s} - \frac{1}{\varepsilon \mathbf{R}_e} J_0 \partial_{\xi} V_0 + \frac{1}{\mathbf{F}^2} \int_0^h p \nabla_{\xi} \cdot (JM) - \frac{1}{\varepsilon \mathbf{R}_e} \int_0^h J(\partial_{\xi} M) \bar{Z} \\ & + \int_0^h J(\partial_{\xi} X)^{-1} \left( \theta_R \bar{\Gamma}(\bar{V}) \mathbf{s} - (\partial_{\xi\xi}^2 X) \cdot V \cdot V + 2\varepsilon \theta_R \bar{V}(\partial_x \mathbf{s}) V \right) \\ & + \frac{\varepsilon}{\mathbf{R}_e} \left( \nabla_{\xi} \cdot \int_0^h JM \bar{P} M + \int_0^h \frac{J}{2} M(\bar{P} : \nabla_{\xi} M) - J \bar{P} M :: \partial_{\xi} M \right). \end{aligned}$$

On obtient un modèle de Saint Venant en reliant les différentes quantités intégrées en hauteur et la contrainte au fond à  $\tilde{h}$  et  $\tilde{v}$ . L'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.36) devient

$$\partial_t(\tilde{h}\tilde{v}) + \frac{6}{5} \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{h}\tilde{v} \otimes \tilde{v}) + \frac{\delta}{\beta} \bar{M} (\bar{J} \nabla_{\xi} \left( \frac{c\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \right) - \bar{\kappa} \tilde{h} \nabla_{\xi} \mathcal{H}) = -\frac{1}{\beta} \left( \lambda c \tilde{h} (\partial_{\xi} x)^{-1} \mathbf{s} + \frac{3\bar{J}^2}{\tilde{h}} \tilde{v} \right) + \mathcal{T}_1,$$

avec  $\mathcal{T}_1 = \delta \beta^{-1} \mathcal{T}_1^{(1)} + \lambda^2 \mathcal{T}_1^{(2)} + \mathcal{O}(\beta^{-1}(\varepsilon^2 \theta_R^2 + \delta(\alpha + \varepsilon \theta_R)) + \beta + \delta + \varepsilon \theta_R)$  où  $\mathcal{T}_1^{(1)}$  est un terme de correction dû à la pression et  $\mathcal{T}_1^{(2)}$  un terme dû aux effets inertiels.

Ils sont donnés par

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1^{(1)} &= \left( \frac{\bar{M}}{8} \nabla_\xi c + \frac{3}{4} c (\partial_\xi x)^{-1} (\partial_x \mathbf{s}) \mathbf{s} - \frac{5}{8} c (\partial_\xi x)^{-1} (\partial_x \mathbf{s}) \mathbf{s} - \frac{c}{2} \text{tr}(\partial_x \mathbf{s}) (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \right) \frac{\tilde{h}^2}{\bar{J}} \\
\mathcal{T}_1^{(2)} &= c (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \cdot \nabla_\xi (c (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s}) \frac{\tilde{h}^5}{35 \bar{J}^4} - c (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \cdot \nabla_\xi \left( c \frac{\tilde{h}}{\bar{J}} (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \right) \frac{\tilde{h}^4}{15 \bar{J}^4} \\
&+ \left( \nabla_\xi \cdot \left( c \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^3} (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \right) \frac{\tilde{h}^2}{24 \bar{J}^2} + \nabla_\xi \cdot \left( c \tilde{h} (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \right) \frac{\tilde{h}^4}{120 \bar{J}^4} \right) c (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \\
&- \nabla_\xi \cdot \left( \bar{J} c (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \right) \frac{\tilde{c} \tilde{h}^5}{420 \bar{J}^5} (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \\
&- \frac{6c^2 \tilde{h}^5}{35 \bar{J}^4} (\partial_\xi x)^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 x \cdot (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} \cdot (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} + \theta_R (\mathbf{s}^t \mathcal{H}_b \mathbf{s}) \mathbf{s} \right).
\end{aligned}$$

De plus  $\bar{M} \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\bar{J} \in \mathbb{R}$  sont définis par  $\bar{M} = M|_{\bar{\xi}=0}$  et  $\bar{J} = J|_{\bar{\xi}=0}$ . En éliminant le terme d'ordre  $\mathcal{O}(\beta^{-1}(\varepsilon^2 \theta_R^2 + \delta(\alpha + \varepsilon \theta_R) + \beta + \delta + \varepsilon \theta_R))$  des équations, on obtient un système de Saint Venant, valable dans le régime asymptotique

$$\varepsilon \mathbf{R}_e, \frac{\varepsilon \mathbf{R}_e}{\mathbf{F}^2}, \frac{\varepsilon \mathbf{F}^2}{\mathbf{R}_e} \ll 1, \quad \frac{\varepsilon \theta_R^2}{\mathbf{R}_e}, \frac{\varepsilon}{\mathbf{R}_e}, \frac{\varepsilon \theta_R}{\mathbf{F}^2} \ll 1.$$

Ce régime contient en particulier le cas où  $\theta_R$ ,  $\mathbf{F}^2$  et  $\mathbf{R}_e$  sont d'ordre 1 mais on voit clairement que le modèle de Saint Venant est valable dans une gamme de paramètres plus large. La formulation du système est indépendante du paramétrage mais elle est difficilement utilisable. On spécifie la formulation dans le système des coordonnées orthogonales. Si on note  $\mathbf{n} = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))$ , on peut alors montrer que

$$(1.37) \quad \bar{M} = Id, \quad \bar{J} = 1, \quad c (\partial_\xi x)^{-1} \mathbf{s} = -\sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} = -\sin(\theta) \boldsymbol{\iota},$$

où  $\boldsymbol{\iota} = (\cos(\phi), \sin(\phi))^t$ . Ainsi, à  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  près, les inconnues  $\tilde{h}$  et  $\tilde{h}\tilde{v}$  correspondent bien à la hauteur du fluide et au débit parallèle à la surface. L'équation sur la quantité de mouvement du système de Saint Venant s'écrit

$$\begin{aligned}
(1.38) \quad \partial_t(\tilde{h}\tilde{v}) + \nabla_\xi \cdot \left( \frac{6}{5} \tilde{h}\tilde{v} \otimes \tilde{v} \right) + \frac{\delta}{2\beta} \nabla_\xi (\cos(\theta) \tilde{h}^2) &= \bar{\kappa} \frac{\delta}{\beta} \tilde{h} \nabla_\xi \mathcal{H} + \frac{1}{\beta} \left( \lambda \tilde{h} \sin(\theta) \boldsymbol{\iota} - \frac{3\tilde{v}}{\tilde{h}} \right) \\
&+ \frac{\delta}{\beta} \left( \frac{1}{4} \nabla_\xi \cos(\theta) + \theta_R \sin(\theta) (k_1 + k_2) \boldsymbol{\iota} - \frac{3}{2} \theta_R \sin(\theta) \text{diag}(k_1, k_2) \boldsymbol{\iota} \right) \frac{\tilde{h}^2}{2} \\
&+ \frac{\lambda^2 \tilde{h}^4}{3} \sin(\theta) \left( \frac{1}{5} \sin(\theta) (\boldsymbol{\iota} \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \boldsymbol{\iota} - \frac{\tilde{h}}{7} \left( \frac{4}{5} (\boldsymbol{\iota} \cdot \nabla_\xi) (\boldsymbol{\iota} \sin(\theta)) - \nabla_\xi \cdot (\boldsymbol{\iota} \sin(\theta)) \boldsymbol{\iota} \right) \right).
\end{aligned}$$

Le terme source raide indique que l'écoulement est essentiellement porté par la direction de plus grande pente  $\boldsymbol{\iota}$ . Pour aller plus loin et étudier l'influence de la capillarité, on écrit le système de Saint Venant dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel. On obtient, pour  $\theta_R = 1$

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{h} + \partial_\xi(\tilde{h}\tilde{v}) = 0, \\
& \partial_t(\tilde{h}\tilde{v}) + \partial_\xi \left( \frac{6}{5} \tilde{h}\tilde{v}^2 - \frac{\lambda^2 \sin^2(\theta) \tilde{h}^5}{75} + \frac{\delta \cos(\theta) \tilde{h}^2}{2\beta} \right) + \bar{\kappa} \frac{\delta}{\beta} \tilde{h} \partial_{\xi\xi}^2 \theta = \\
(1.39) \quad & \frac{1}{\beta} \left( \lambda \tilde{h} \sin(\theta) - \frac{3\tilde{v}}{\tilde{h}} \right) - \left( \frac{\delta \tilde{h}^2}{2\beta} + \frac{3\lambda^2 \tilde{h}^5}{175} \cos(\theta) \right) \sin(\theta) \partial_\xi \theta.
\end{aligned}$$

On voit ainsi à cette échelle qu'on peut assimiler les effets de la tension de surface à une force de frottement dans les endroits où  $\partial_\xi^2 \theta > 0$  et d'accélération lorsque  $\partial_\xi^2 \theta < 0$ . Si on veut retrouver l'effet classique de dispersion de la capillarité, il faut supposer que la courbure est faible, par exemple  $\theta_R = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Dans ce cas, on ajoute le terme classique de tension de surface  $\bar{\kappa} \tilde{h} \partial_\xi^3 \tilde{h}$  dans le second membre. Comme dans le cas plan, on peut proposer des formulations équivalentes (à cette échelle) du modèle de Saint Venant obtenu, en particulier différentes formes des flux (en fixant par exemple le terme devant  $hv^2$  à 1).

### 1.3 Modèles de Saint Venant pour des fluides non newtoniens

On présente des modèles de Saint Venant pour des fluides de Bingham et en loi de Puissance, s'écoulant sur un plan incliné. C'est une situation intéressante d'un point de vue physique si on néglige les effets de courbure du fond. On reprend les notations de la section 1.1 et on notera  $\vec{u} = (u, w)$ .

Pour un fluide en loi de puissance, le tenseur des contraintes visqueuses est donné par

$$\sigma = \mu \|D(\vec{u})\|^{n-1} D(\vec{u})$$

où  $D(\vec{u}) = \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T$  est le taux de déformation du fluide et  $\mu$  un coefficient de viscosité. On va étudier le cas singulier  $n < 1$  : on rencontre ce type de fluide en glaciologie ou pour modéliser des écoulements de polymères. Le modèle de Saint Venant s'écrit dans ce cas

$$(1.40) \quad \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \quad \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + P(h, n)) = ghs - \mu \left( v \frac{1+2n}{hn} \right)^n,$$

où  $P$  correspond à une pression dans le fluide, donnée par

$$P(h, n) = gc \frac{h^2}{2} + \frac{(3n^2 - 1)n^2}{(2n + 1)^2(3n + 2)^2} \left( \frac{gs}{\mu} \right)^{\frac{2}{n}} h^{3 + \frac{2}{n}}.$$

Ce modèle est valable dans le régime asymptotique  $\varepsilon, \alpha, \delta, \beta \ll 1$  i.e.

$$(1.41) \quad \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon R_e \ll 1, \quad \varepsilon R_e \ll F^2, \quad \varepsilon F^2 \ll R_e.$$

Ici, le nombre de Reynolds est défini par  $R_e = \frac{H^n U^{2-n}}{\mu}$  qui coïncide avec la définition standard pour les fluides newtoniens  $n = 1$ . Comme pour les fluides newtoniens, le seul nouveau terme est dû aux effets d'inertie, qu'on écrit comme un facteur de correction de la pression hydrostatique.

La principale difficulté pour obtenir (1.40) consiste à calculer un développement asymptotique de  $u$  en présence d'une viscosité apparente très grande au voisinage de la surface libre, le calcul de  $p$  et  $w$  restant identique au cas newtonien. Plus précisément, on doit inverser une relation du type

$$(1.42) \quad ((\partial_z u)^2 + \varepsilon^2 g^2)^{\frac{n-1}{2}} \partial_z u = \lambda(h-z) + \mathcal{G}(u, w, p, \alpha, \beta, \delta).$$

où  $\mathcal{G}$  est un opérateur d'ordre  $\mathcal{O}(\beta + \delta + \varepsilon^{n+1})$ ,  $g = 4(\partial_x u^{(0)})^2 + 2\partial_z u^{(0)}\partial_x w^{(0)}$  est une fonction d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  et  $(u^{(0)}, w^{(0)})$  correspondant à  $(u, w)$  pour  $\alpha = \delta = \beta = 0$  ( $w^{(0)}$  étant déterminé grâce à la condition de divergence nulle)

$$u^{(0)}(x, t, z) = \frac{n}{n+1} \lambda^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n+1}{n}} \left(1 - \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{n}+1}\right), \quad \lambda = \frac{R_e s}{F^2}.$$

On résout cette équation en séparant les zones  $h-z \leq \mathcal{O}(\varepsilon^n)$  (proche de la surface libre) et  $h-z \geq \mathcal{O}(\varepsilon^n)$  (loin de la surface libre). En fait loin de la surface libre et à  $\mathcal{O}(\alpha\delta)$  près, l'équation (1.42) devient

$$(1.43) \quad \partial_z u^n = \lambda(h-z) + \mathcal{G}(u, w, p, \alpha, \beta, \delta), \quad u(0) = 0,$$

et on poursuit le calcul comme dans le cas newtonien. On ne calcule pas de correction supplémentaire à  $u$  dans la zone proche de la surface libre car son épaisseur est faible et n'entre pas dans le développement de  $v$  et  $\partial_z u(0)$  à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près.

Le développement de  $u$  (et donc de  $v$ ) obtenu à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près permet aussi d'écrire une équation de Benney sur la hauteur et qui correspond à une limite de relaxation dans le système (1.40). Plus précisément, on peut écrire en variables sans dimensions (à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près)

$$(1.44) \quad \partial_t h + \partial_x \left( \frac{\lambda n h^3}{2n+1} \right) = \frac{\varepsilon R_e}{2n+1} \partial_x \left( \lambda^{\frac{1}{n}} h^{2+\frac{1}{n}} \left( \frac{\cot \theta}{R_e} - \frac{2\lambda^{\frac{2}{n}-1}}{3n+2} h^{1+\frac{2}{n}} \right) \partial_x h \right).$$

Si on choisit pour vitesse caractéristique, la vitesse moyenne du fluide pour un écoulement stationnaire de hauteur  $H$ , on obtient la relation supplémentaire entre  $F$  et  $R_e$  :  $\lambda = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$ . L'équation (1.44) fournit un critère de stabilité des solutions stationnaires dans le régime ondes longues

$$R_e < \frac{3n+2}{2} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^{2-n} \cot \theta.$$

Comme pour les fluides newtoniens, une analyse des équations de Orr-Sommerfeld (i.e. la linéarisation des équations de Navier-Stokes au voisinage d'une solution stationnaire) donne le même critère de stabilité pour des perturbations ondes longues. En ce sens, le modèle de Saint Venant obtenu est consistant avec les équations de Navier-Stokes dans le régime des ondes longues au contraire des modèles obtenus par Ng et Mei [47]. On peut constater la différence de comportement du fluide selon que  $n > \frac{1}{\sqrt{3}}$  ou  $n < \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Dans le premier cas, on peut montrer que le système est toujours hyperbolique sur le domaine  $h \geq 0$  alors qu'il n'est hyperbolique qu'autour de la variété d'équilibre pour  $n < \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Passons au modèle de Saint Venant obtenu pour un fluide de Bingham. La loi de comportement est donnée par

$$(1.45) \quad D(\vec{u}) = 0, \quad \|\sigma\| \leq \sigma_0, \quad D(\vec{u}) \neq 0, \quad \sigma = \left(\mu + \frac{\sigma_0}{\|D(\vec{u})\|}\right)D(\vec{u}),$$

où  $\mu$  est la viscosité du fluide en écoulement et  $\sigma_0$  la contrainte minimale à appliquer au fluide pour le mettre en mouvement. On a le modèle de Saint Venant

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hv) &= 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + P(h, h_c)) &= ghs - \sigma_0 - \mu\phi(h)v + \sigma_0\psi(h)|\partial_x h|, \\ \phi(h) = h\left(\frac{h_v^2}{3} + \frac{h_c h_v}{2}\right)^{-1}, \quad \psi(h) &= \pi h_c \left(2\lambda\left(\frac{h_v}{3} + \frac{h_c}{2}\right)\right)^{-1}, \end{aligned}$$

où  $P(h, h_c) = gc\frac{h^2}{2} + \left(\frac{g \sin \theta}{\mu}\right)^2 \Pi(h, h_c)$  désigne un terme de pression. Ici  $h_c$  est la hauteur critique de fluide en deçà de laquelle il ne peut y avoir écoulement. Elle est définie par  $gh_c \sin \theta = \mu\sigma_0$  alors que  $h_v = h - h_c$  désigne la hauteur de fluide en déformation. Ce modèle est consistant lorsque  $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$  et

$$(1.46) \quad \varepsilon R_e \ll 1, \quad \varepsilon R_e \ll F^2, \quad \varepsilon F^2 \ll R_e.$$

En général, les modèles de Saint Venant utilisés pour les fluides de Bingham prennent bien en compte le terme de seuil  $-\sigma_0$  et un terme de friction  $-\mu\phi(h)v$ . Ces modèles ne tiennent évidemment pas compte des termes correctifs inertiels (représentés ici sous la forme d'un facteur  $\Pi(h, h_c)$ ) ni du terme  $\sigma_0\psi(h)|\partial_x h|$  dû à la présence d'une zone de "pseudo-plug". A cet endroit, la déformation du fluide est très faible (mais non nulle!). La viscosité apparente devient très grande, comme dans les cas des fluides en loi de puissance, et compense la faible déformation du fluide [10].

On comprend mieux ce qui se passe lorsqu'on construit le développement asymptotique de  $u$ . En suivant l'approche de Balmforth [10], le fluide est toujours en déformation et pour calculer  $u$ , il faut inverser la relation

$$(1.47) \quad \left(1 + B(u_z^2 + \varepsilon^2 g)^{-\frac{1}{2}}\right) \partial_z u = \lambda(h - z) + \mathcal{G}(u, w, p, \alpha, \beta, \delta, \varepsilon), \quad u(0) = 0,$$

où  $\mathcal{G}$  est un opérateur d'ordre  $\mathcal{O}(\beta + \delta + \varepsilon)$ ,  $g = 4(\partial_x u^{(0)})^2 + 2\partial_z u^{(0)}\partial_x w^{(0)}$  est une fonction d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  et  $(u^{(0)}, w^{(0)})$  correspondant à  $(u, w)$  pour  $\alpha = \delta = \beta = 0$  :

$$u^{(0)}(z) = \lambda\left(h_v z - \frac{z^2}{2}\right), \quad \forall z \in (0, h_v), \quad u^{(0)}(z) = \lambda\frac{h_v^2}{2}, \quad \forall z \in (h_v, h).$$

Le champ  $(u^{(0)}, w^{(0)})$  est sans déformation dans la zone de plug  $z > h_v$  alors que  $u, w$  est toujours en déformation : en fait dans cette zone, la déformation est d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , i.e.  $u_z = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Pour poursuivre le calcul, on sépare la zone de pseudo plug et la zone visqueuse. On notera  $u = u_v$  dans la zone visqueuse et  $u = u_{pp}$  dans la zone de pseudo plug. Dans la zone visqueuse, l'équation (1.47) devient, à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près

$$(1.48) \quad \partial_z u_v + B = \lambda(h - z) + \mathcal{G}(u, w, p, \alpha, \beta, \delta, \varepsilon), \quad u(0) = 0,$$

et on poursuit le calcul comme dans le cas newtonien : on obtient ainsi un développement de  $u_v$  à  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  près. Les modèles de Saint Venant pour les fluides de Bingham obtenus par Balmforth sont ensuite obtenus en considérant le fluide sans déformation dans la zone de plug. A cet endroit, il faut chercher  $u$  sous la forme  $u_{pp} = u^{(0)}(h_v) + \varepsilon u_1$ . Dans ce cas, l'équation (1.47) devient, à  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  près

$$\frac{B\partial_z u_1}{(\partial_z u_1^2 + 4(\partial_x u^{(0)}(h_v))^2)^{\frac{1}{2}}} = \lambda(h - z),$$

et, après intégration,  $u_{pp} = \lambda\frac{h_v^2}{2} + \varepsilon(u_{1,pp} + 2h_v|\partial_x h|\sqrt{B^2 - \lambda^2(h - z)^2}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

La fonction  $u_{1,pp}$  est une constante d'intégration qui ne dépend que de  $x$  et déterminée en raccordant par continuité avec la solution visqueuse  $u_v$  en  $z = h_v$ . Plus précisément, on introduit un ansatz dans la zone de transition  $z \approx h_v$  sous la forme  $u_{in} = \lambda\frac{h_v^2}{2} + \varepsilon^a U_1(\frac{z-h_v}{\varepsilon^b})$  qui raccorde  $u_{pp}$  à  $u_v$ . On obtient nécessairement  $a = \frac{4}{3}$  et  $b = \frac{2}{3}$ , i.e. la zone de transition est d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$ . On montre qu'en choisissant  $u_{1,pp} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_v(h_v) - u^{(0)}(h_v)}{\varepsilon}$ , on obtient un raccord précis à  $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$  près. C'est précisément la correction dans  $u_{pp}$  qui donne le terme  $\psi(h)|\partial_x h|$  dans (1.46). Le terme singulier  $\psi(h)|\partial_x h|$  reflète la différence de comportement du fluide entre un écoulement stationnaire où il y'a une zone sans déformation et un écoulement non stationnaire où  $\partial_x h$  est non identiquement nulle et le fluide est toujours en déformation.

Le système (1.46) n'entre pas dans le cadre standard des lois de conservation à cause du terme  $\psi(h)|\partial_x h|$  et on ne peut pas même pas le linéariser au voisinage d'une solution stationnaire, la fonction  $x \mapsto |x|$  n'étant pas dérivable en 0. Le caractère bien posé de ce système reste donc une question ouverte. Pour avoir un critère de stabilité de l'écoulement, on peut quand même faire un calcul formel de relaxation dans (1.46)

$$(1.49) \quad \partial_t h + \partial_x \left( \lambda\frac{h_v^3}{3} + \frac{Bh_v^2}{2} \right) = \partial_x (D(h)\partial_x h) - \varepsilon\frac{\pi B^2}{4\lambda}\partial_x (h_v|\partial_x h|)$$



où  $D(h) = \delta c \left( \frac{h_v^3}{3} + h_v h_c h \right) - \beta \lambda^2 \left( \frac{2}{15} h_v^6 + \frac{2}{3} h_v^5 h_c + \frac{4}{3} h_v^4 h_c^2 + h_c^3 h_v^3 \right)$ . A cause du terme  $\partial_x(h_v |\partial_x h|)$ , l'équation obtenue n'est pas un équation de conservation visqueuse standard (la viscosité n'est pas régulière). Cependant, si on écrit  $h_v |\partial_x h| = \text{sign}(\partial_x h) h_v \partial_x h$ , le terme de viscosité est formellement dissipatif si

$$(1.50) \quad R_e \leq R_e^- = \frac{(\lambda \frac{h_v^2}{3} + B) \cot \theta - \frac{\pi B^2}{4\lambda}}{\lambda^2 \left( \frac{2}{15} h_v^5 + \frac{2}{3} h_v^4 h_c + \frac{4}{3} h_v^3 h_c^2 + h_v^2 h_c^3 \right)},$$

où  $h_c = \frac{B}{\lambda}$ ,  $h_v = 1 - \frac{B}{\lambda}$ . On obtient ainsi un critère (formel) de stabilité d'un écoulement stationnaire pour un fluide de Bingham. Ensuite le terme de viscosité induit forcément une instabilité (roll-wave?) si

$$R_e \geq R_e^+ = \frac{(\lambda \frac{h_v^2}{3} + B) \cot \theta + \frac{\pi B^2}{4\lambda}}{\lambda^2 \left( \frac{2}{15} h_v^5 + \frac{2}{3} h_v^4 h_c + \frac{4}{3} h_v^3 h_c^2 + h_v^2 h_c^3 \right)}.$$

Dans la zone intermédiaire  $R_e \in (R_e^-, R_e^+)$ , cette approche ne donne aucune information qualitative et il faudrait envisager une étude numérique pour comprendre le comportement du système dans ce cas.

## 1.4 Modèles de Saint Venant bi-couches

On présente succinctement l'obtention de modèles de Saint Venant pour l'écoulement sur un plan incliné de deux fluides newtoniens de densité  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2$  et de viscosité  $\nu_i$ ,  $i = 1, 2$ . Le fluide 1 est en dessous du fluide 2 et les nombres sans dimensions sont définis à partir du premier fluide. On ne fait pas d'hypothèse sur la stratification en densité : même si le fluide le plus lourd est au dessus, on verra que l'écoulement peut être stable grâce aux effets conjugués de la convection et de la flottabilité. On notera  $h_i$ ,  $i = 1, 2$  la hauteur de chaque fluide et  $h = h_1 + h_2$  la hauteur totale de l'écoulement. Dans l'asymptotique "eaux peu profondes", on peut écrire les équations de Navier-Stokes sous la forme

$$(1.51) \quad \mu_i \partial_{zz} u_i + \varrho_i \lambda = \varepsilon R_e \varrho_i (\partial_t u_i + u_i \partial_x u_i + w_i \partial_z u_i) + \frac{\varepsilon R_e}{F^2} \partial_x p_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

avec les conditions aux limites  $\partial_z u_2(h) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,  $\mu_2 \partial_z u_2(h_1) - \mu_1 \partial_z u_1(h_1) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  et  $u_1(0) = 0$ ,  $u_1(h_1) = u_2(h_1)$ . Les nombres sans dimension  $\lambda$ ,  $\mu_i$ ,  $\varrho_i$  sont définis par

$$\lambda = \frac{R_e \sin \theta}{F^2}, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \nu = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad \varrho_1 = 1, \quad \varrho_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho.$$

La pression vérifie  $\partial_z p_i + \varrho_i c = \mathcal{O}(\varepsilon)$  et les conditions aux limites

$$p_2(h) = -\kappa_2 F^2 \partial_{xx} h + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad p_1(h_1) - p_2(h_1) = -\kappa_1 F^2 \partial_{xx} h_1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

si on tient compte de la capillarité. Les vitesses verticales sont données par

$$\partial_z w_i = -\partial_x u_i, \quad w_1(0) = 0, \quad w_1(h_1) = w_2(h_1).$$

En formulant ainsi les équations de Navier-Stokes, on peut calculer un développement asymptotique de  $(u_i, w_i, p_i)$  en fonction de  $h_i$  et de leurs dérivées en espace et en temps pour  $\varepsilon \ll 1$  et

$$\varepsilon R_e \ll 1, \quad \varepsilon F^2 \ll R_e, \quad \varepsilon R_e \ll F^2.$$

Le calcul repose sur un procédé itératif analogue à celui utilisé pour un seul fluide et ne pose pas de difficulté. On insiste plutôt sur la manière de fermer les équations intégrées en hauteur. En ne retenant que les termes d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  et  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$  dans ces équations, on obtient

$$(1.52) \quad \begin{aligned} (h_1 v_1)_t + \left( \int_0^{h_1} u_1^2 + \frac{p_1}{F^2} \right)_x + \kappa_1 \partial_x h_1 \partial_{xx} h_1 = \\ \frac{1}{\varepsilon R_e} (\lambda h_1 + \nu \partial_z u_2(h_1) - \partial_z u_1(0)) + \frac{p_2(h_1) \partial_x h_1}{F^2} \\ (\rho h_2 v_2)_t + \left( \int_{h_1}^h \rho u_2^2 + \frac{p_2}{F^2} \right)_x + \kappa_2 \partial_x h \partial_{xx} h = \\ \frac{1}{\varepsilon R_e} (\lambda \rho h_2 - \nu \partial_z u_2(0)) - \frac{p_2(h_1) \partial_x h_1}{F^2}. \end{aligned}$$

On relie les termes de convection intégrés en hauteur dans chaque couche à  $h_i, v_i$  grâce aux équations

$$(1.53) \quad \begin{aligned} \int_{h_{i-1}}^{h_i} u_i^2 = h_i v_i^2 + Q_i(h_1, h_2) + \mathcal{O}(\alpha + \beta + \delta), \quad i = 1, 2, \\ Q_1 = \lambda^2 h_1^3 \left( \frac{h_1^2}{45} + \frac{\rho h_2}{12} (h_1 + \rho h_2) \right), \quad Q_2 = \lambda^2 \frac{\rho^2 h_2^5}{45 \nu^2}. \end{aligned}$$

Les termes de pression intégrés en hauteur sont eux simplement exprimés à l'aide de  $h_i, i = 1, 2$ . Il reste à déterminer  $\partial_z u_1(0)$  et  $\partial_z u_2(h_1)$  en fonction de  $v_i$  et  $h_i$ . Pour rester cohérent avec la procédure de fermeture pour un seul fluide, on cherche  $\partial_z u_1(0)$  sous la forme

$$\partial_z u_1(0) = \gamma_1(h_1, h_2) \frac{v_1}{h_1} + \tilde{R}_1,$$

où  $\gamma_1(h_1, 0) = 3$ . On obtient  $\gamma_1 = 6 \frac{h_1 + \rho h_2}{2h_1 + 3\rho h_2}$  et  $\tilde{R}_1 = R_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  avec

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{\lambda^2 \beta}{2h_1 + 3\rho h_2} (R_{1,1} \partial_x h_1 + R_{1,2} \partial_x h_2) - \delta c (\rho^2 - \rho) \frac{h_1 h_2}{2h_1 + \rho h_2} \partial_x h_2 \\ &\quad + \frac{\delta h_1 h_2}{2h_1 + 3\rho h_2} \partial_{xxx} (\kappa_1 \rho h_1 + \kappa_2 (\rho - 1) (h_1 + h_2)), \\ R_{1,1} &= \frac{2}{15} h_1^5 + \frac{41\rho}{60} h_1^4 h_2 + \frac{13\rho^2}{10} h_1^3 h_2^2 + \left( \frac{3\rho^3}{4} + \frac{\rho^2}{3\nu} \right) h_1^2 h_2^3 + \frac{\rho^3}{3\nu} h_1 h_2^4, \\ R_{1,2} &= \frac{2\rho}{15} h_1^5 + \frac{41\rho^2}{60} h_1^4 h_2 + \left( \frac{21\rho^3}{20} + \frac{\rho^2}{4\nu} \right) h_1^3 h_2^2 + \frac{13\rho^3}{12\nu} h_1^2 h_2^3 + \frac{\rho^3}{3\nu^2} h_1 h_2^4, \end{aligned}$$

Ensuite, toujours pour rester cohérent avec le cas d'un seul fluide, représente la contrainte à l'interface par

$$\partial_z u_2(h_1) \approx 3 \frac{v_2 - u_{int}}{h_2}$$

avec  $u_{int} = u_1(h_1) = u_2(h_1)$ . On écrit cette contrainte à l'interface en fonction de  $h_i, v_i$  en posant  $u_{int} = \gamma_2(h_1, h_2) v_1 + (\text{h.o.t})$  et  $\partial_z u_2(h_1)$  s'écrit

$$\partial_z u_2(h_1) = \frac{3}{h_2} (v_2 - \gamma_2 v_1) + R_2, \quad \gamma_2 = 3 \frac{h_1 + 2\rho h_2}{2h_1 + 3\rho h_2},$$

$$\begin{aligned} R_2 &= -\frac{\beta \lambda^2}{h_2 (2h_1 + 3\rho h_2)} (R_{2,1} \partial_x h_1 + R_{2,2} \partial_x h_2) - \delta c (\rho^2 - \rho) \frac{3h_1^2 \partial_x h_2}{2(2h_1 + 3\rho h_2)} \\ &\quad + \frac{3\delta h_1^2}{2(2h_1 + 3\rho h_2)} \partial_{xxx} ((\kappa_1 \rho + \kappa_2 (\rho - 1)) h_1 + \kappa_2 (\rho - 1) h_2) \\ R_{2,1} &= \frac{1}{20} h_1^6 + \frac{2\rho}{5} h_1^5 h_2 + \frac{11\rho^2}{10} h_1^4 h_2^2 + \left( \frac{\rho^2}{2\nu} + \frac{3\rho^3}{4} \right) h_1^3 h_2^3 \\ &\quad + \left( \frac{2\rho^2}{15\nu^2} + \frac{\rho^3}{2\nu} \right) h_1^2 h_2^4 + \frac{\rho^3}{3\nu^2} h_1 h_2^5 + \frac{\rho^4}{5\nu^2} h_2^6 \\ R_{2,2} &= \frac{\rho}{20} h_1^6 + \frac{2\rho^2}{5} h_1^5 h_2 + \left( \frac{\rho^2}{8\nu} + \frac{117\rho^3}{120} \right) h_1^4 h_2^2 + \frac{5\rho^3}{4\nu} h_1^3 h_2^3 \\ (1.54) \quad &+ \frac{19\rho^3}{30\nu^2} h_1^2 h_2^4 + \left( \frac{\rho^4}{5\nu^2} + \frac{2\rho^3}{15\nu^3} \right) h_1 h_2^5 + \frac{\rho^4}{5\nu^3} h_2^6. \end{aligned}$$

On identifie aisément la nature des termes correcteurs calculés : les termes en facteur de  $\beta$  sont des termes inertiels, ceux en facteurs de  $\delta$  sont dus à la flottabilité et les termes en facteur de  $\kappa_i$  sont dus à la tension de surface. Le modèle de Saint Venant

obtenu en choisissant ces règles de fermeture est donné par

$$(1.55) \quad \partial_t h_1 + \partial_x(h_1 v_1) = 0, \quad \partial_t h_2 + \partial_x(h_2 v_2) = 0,$$

$$(1.56) \quad \partial_t h_1 v_1 + \partial_x\left(h_1 v_1^2 + \frac{c h_1^2}{2F^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon R_e} \left( \lambda h_1 + 3\nu \frac{v_2 - \gamma_2 v_1}{h_2} - 3\gamma_1 \frac{v_1}{h_1} \right) + \mathcal{R}_1,$$

$$(1.57) \quad \partial_t h_2 v_2 + \partial_x\left(h_2 v_2^2 + \frac{c h_2^2}{2F^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon R_e} \left( \lambda h_2 - \frac{3\nu v_2 - \gamma_2 v_1}{\rho h_2} \right) + \mathcal{R}_2,$$

$$\mathcal{R}_1 = -\frac{c}{F^2} h_2 \partial_x h_1 + \tilde{\mathcal{R}}_1, \quad \mathcal{R}_2 = -\frac{c}{F^2} h_1 \partial_x h_2 + \tilde{\mathcal{R}}_2,$$

où  $\tilde{\mathcal{R}}_i$ ,  $i = 1, 2$  sont définies par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_1 &= -\partial_x Q_1 + \frac{1}{\varepsilon R_e} (\nu R_2 - R_1) + h_1 \partial_{xxx} (\kappa_2 (h_1 + h_2) + \kappa_1 h_1), \\ \tilde{\mathcal{R}}_2 &= -\frac{1}{\rho} \partial_x Q_2 - \frac{\nu}{\varepsilon R_e \rho} R_2 + \frac{\kappa_2}{\rho} h_2 \partial_{xxx} (h_1 + h_2). \end{aligned}$$

En général, les modèles bi-couches utilisés dans la littérature ne sont consistants que lorsque l'approximation de Saint Venant est vérifiée : écoulement en faible pente, fluides peu visqueux et conditions de Navier à l'interface des fluides et au fond [54]. Le modèle (1.55-1.57) est le premier, à ma connaissance, obtenu à partir des équations de Navier-Stokes et pour des conditions de continuité à l'interface et de Dirichlet au fond. Kliakhandler [31] a étudié cette situation à l'aide d'un système d'équations de Kuramoto-Sivashinsky pour identifier les différents mécanismes pouvant déstabiliser l'écoulement permanent (tension de surface, inertie, flottaison ou stratification en densité). Cependant, son analyse ne permet pas de décrire la dynamique des deux fluides lorsque le régime est instable (le système d'équations est mal posé). C'est l'intérêt du modèle de Saint Venant proposé ici : d'une part, au moyen d'un calcul de relaxation, on retrouve le système sur  $h_1, h_2$  obtenu par Kliakhandler mais en plus, dans les régimes instables, le système est encore bien posé pourvu que ce système soit hyperbolique. On montrera dans le chapitre suivant que ces modèles ont des solutions de type roll-waves si l'écoulement stationnaire est instable.

## 1.5 Perspectives

Dans ce chapitre, j'ai présenté une méthode formelle permettant d'obtenir systématiquement des modèles de Saint Venant à partir des équations de Navier-Stokes, lorsque l'écoulement est "peu profond" et *laminaire*. En tenant compte de la tension de surface, cette méthode est justifiée rigoureusement pour un fluide *newtonien* pour des oscillations de faible amplitude à la surface libre. S'il semble difficile de

s'affranchir de cette dernière hypothèse, qui apparaît déjà si on veut démontrer le caractère bien posé des équations de Saint Venant visqueuses, on peut éliminer la tension de surface en travaillant sur des intervalles de temps *bornés*. On a eu besoin de la tension de surface pour contrôler des dérivées en  $h$  issues du changement de variable qui fixait le domaine mais aussi pour contrôler des termes raides dus aux forces de gravité lorsque la pente est arbitraire. Je travaille actuellement, en collaboration avec D. Bresch sur la justification d'un modèle de Saint Venant obtenu par Gerbeau et Perthame [26], lorsqu'on remplace la condition de Dirichlet au fond par une condition de Navier et pour une pente faible. Bien qu'ils aient obtenu le modèle à l'aide d'équations intégrées en hauteur, on peut refaire tous les calculs simplement avec des développements de Hilbert et construire une solution approchée de Navier-Stokes à l'aide d'une solution d'un modèle de Saint Venant. Dans ce cas, on peut montrer le caractère bien posé des équations de Navier-Stokes au voisinage de cette solution approchée en passant en coordonnées *lagrangiennes* et justifier un modèle de Saint Venant visqueux.

Pour les fluides non newtoniens, il serait intéressant d'obtenir une justification mathématique, au moins pour les fluides en loi de puissance. Dans ce cas, on a déjà une validation dans le domaine ondes longues, en considérant le critère de stabilité spectral obtenu à partir des équations de Orr Sommerfeld. L'étape suivante est la justification rigoureuse de ces calculs mais il faut d'abord montrer que les équations de Navier-Stokes sont bien posées. Pour les fluides de Bingham, la question est plus délicate puisque le modèle de Saint Venant obtenu n'entre dans aucun cadre classique et une théorie d'existence est à mettre en place. Le problème est qu'on ne peut pas linéariser autour d'une solution stationnaire et il est difficile de décrire la transition entre zone sans déformation et zone en déformation faible. Pour lever cette singularité, on envisage d'obtenir des modèles de Saint Venant pour des versions régularisées de la loi de Bingham en étudiant, par exemple, une loi de Carreau.

Il est important aussi de fournir une information quantitative sur le domaine de validité des modèles obtenus ici à l'aide d'expériences en laboratoire, pour les fluides non newtoniens ou bien à l'aide de simulations numériques. Je pense en particulier aux régimes instables où il y'a formation de roll-waves et pour lesquels on n'a pas obtenu de justification mathématique. Ensuite, de la même manière qu'on l'a fait pour passer des équations de Benney aux équations de Saint Venant en ajoutant la vitesse moyenne dans les inconnues, on pourrait enrichir le modèle de Saint Venant en rajoutant des inconnues. Ruyer Quil et Manneville [56, 57] ont considéré des modèles de Saint Venant augmentés en ajoutant la contrainte au fond comme nouvelle inconnue : une telle approche permettrait sans doute de décrire des instabilités de cisaillements dans le fluide. Enfin, il reste un certain nombre de situations physiques à explorer : on songe en particulier aux écoulements turbulents.

## Chapitre 2

# Existence et stabilité des roll-waves

Ce chapitre regroupe des travaux sur l'analyse d'ondes non linéaires appelées roll-waves. Ce sont des instabilités hydrodynamiques apparaissant à la surface libre d'un écoulement de fluide mince. Elles sont le résultat de la compétition entre les termes de gravité et de la friction due au fond. On modélise l'écoulement à l'aide des équations de Saint Venant. Selon le modèle considéré, avec ou sans viscosité, on obtient des roll-waves continues ou discontinues qui sont proches lorsque la viscosité tend vers 0. L'objectif principal est de montrer l'existence de ces ondes pour des systèmes hyperboliques plus généraux et d'en étudier la stabilité.

- Existence de roll-waves pour des systèmes hyperboliques : on généralise un résultat d'existence de Dressler qu'on applique au modèle de Saint Venant bicouche obtenu au chapitre 1 pour analyser certaines instabilités dans des écoulements à deux couches de fluides [5].
- Persistance des roll-waves discontinues : on prouve que le problème de Cauchy est bien posé au voisinage des roll-waves *discontinues* obtenues par Dressler. On peut le voir comme un résultat de stabilité puisqu'il n'y a pas de singularité supplémentaire qui se forme et la structure n'est pas détruite. [4]
- Stabilité linéaire de roll-waves visqueuses : on montre que les conditions nécessaires de stabilité aux ondes longues de Oh et Zumbrun [49] sont vérifiées, ce qui constitue un premier exemple dans le cadre des lois de conservation. On obtient ensuite des estimations sur les fonctions de Green associées qui permettent de montrer la stabilité linéaire.[6]

## 2.1 Roll-waves discontinues

Le premier résultat d'existence de roll-waves est dû à Dressler [22]. Il les définit comme des ondes progressives périodiques du modèle de Saint Venant

$$(2.1) \quad h_t + (hv)_x = 0, \quad (hv)_t + \left(hv^2 + \frac{h^2}{2F^2}\right) = h - v^2$$

et montre qu'elles sont nécessairement *discontinues*, les discontinuités vérifiant les conditions de chocs de Lax.

**Théorème 2.1.1** *Soit  $F > 2$  alors pour tout  $q > 0$  et tout  $L > 0$ , il existe une vitesse unique  $c(q, F)$  et une solution  $(h, v) = (H, V)(x - ct)$  de (2.1) où  $H, V$  sont  $L$ -périodiques, discontinues aux points  $x_i = iL$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  tel que  $H(c - V) = q$ , et les discontinuités vérifient les conditions de chocs de Lax*

$$[HV]_{iL} = c[H]_{iL}, \quad [HV^2 + \frac{H^2}{2F^2}]_{iL} = c[HV]_{iL}, \quad H(iL^+) < H(iL^-).$$

La condition  $F > 2$  est exactement la condition d'instabilité de la solution stationnaire  $(h, v) = (1, 1)$  et l'existence des roll-waves fournit un scénario de transition vers l'instabilité. Jin et Katsoulakis [30] ont précisément décrit ce scénario de transition pour  $F \approx 2$  en obtenant une équation de Burgers instable à partir de (2.1)

$$r_t + \frac{3}{4}rr_\xi = \left(\frac{F}{2} - 1\right)r$$

qui possède trivialement des roll-waves. La question est de savoir si ces instabilités existent dans d'autres systèmes (par exemple les modèles de Saint Venant bicouches), à quelle condition elles apparaissent et si elles sont observables (stables).

### 2.1.1 Roll-waves dans des systèmes hyperboliques

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$(2.2) \quad u_t + Df(u)u_x = g(u), \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2.$$

On suppose que (2.2) est hyperbolique : les valeurs propres  $\lambda_k(u)$  de  $Df(u)$  sont distinctes et classées par ordre croissant. On note  $r_k(u)$  les vecteurs propres associés et  $\Pi_k(u)$  la projection sur l'espace propre  $\text{Ker}(Df(u) - \lambda_k(u)I)$ . En suivant la terminologie de Dressler, les roll-waves sont des ondes progressives  $u(x, t) = U(x - ct)$ ,  $U$  périodique, solution de (2.2) et vérifiant les conditions de Rankine Hugoniot

$$(2.3) \quad [f(U)]_{(2j+1)L} = c[U]_{(2j+1)L}, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

et les conditions de choc de Lax  $\lambda_k(U_j^+) < c < \lambda_k(U_j^-)$ ,  $\lambda_{k-1}(U_j^-) < c < \lambda_{k+1}(U_j^+)$ . La fonction  $U$  étant périodique, on réécrit (2.2,2.3) comme un problème aux limites

$$(2.4) \quad \begin{aligned} (Df(U(x)) - c)U' &= g(U(x)), \quad \forall x \in (-L, L), \\ f(U(L)) - f(U(-L)) &= c(U(L) - U(-L)). \end{aligned}$$

La condition de Rankine Hugoniot s'écrit aussi

$$(2.5) \quad f(U(L)) - f(U(-L)) - c(U(L) - U(-L)) = \int_{-L}^L g(U(x))dx = 0.$$

On reformule ainsi le problème d'existence de roll-waves en un système d'équations non linéaires  $F(\bar{U}) = 0$  où  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la fonction définie par

$$F(\bar{U}) = f(U(L)) - f(\bar{U}) - c(U(L) - \bar{U}),$$

où  $U$  est solution de  $(Df(U) - c)U' - g(U) = 0$  et  $U(-L) = \bar{U}$ . Notons en plus que les conditions de Lax impliquent que la matrice  $Df(U) - cId$  est nécessairement singulière en un point.

Le cas étudié par Dressler ( $n = 2$ ) se réduit en fait à un problème scalaire puisqu'on élimine la vitesse des inconnues grâce à l'équation de conservation de la masse. On montre alors l'existence de roll-waves de grande amplitude à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. Dans le cas général, on se ramène à un problème scalaire en adaptant la méthode de Jin et Katsoulakis [30] pour obtenir une équation de Burgers instable à partir des équations de Saint Venant. Cette méthode permet, par exemple, de montrer l'existence de "pulsating roll-waves" pour des fonds périodiques [46] mais ne permet d'analyser que les solutions de petite amplitude, le problème général restant ouvert. Soit  $\varepsilon \ll 1$  l'amplitude caractéristique d'une roll-wave et  $L = 2\varepsilon\tau$  ( $\tau > 0$ ) sa période : on cherche  $u$  sous la forme

$$(2.6) \quad u(x) = \bar{u} + \varepsilon v\left(\frac{x - ct}{2\varepsilon\tau}\right),$$

où  $v$  est une fonction régulière, définie sur  $(-1, 1)$ . L'équation (2.4) devient

$$(2.7) \quad (Df(\bar{u} + \varepsilon v(x)) - c)v'(x) = \tau g(\bar{u} + \varepsilon v(x)), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Pour un choc de petite amplitude, les conditions de saut se réduisent à

$$(2.8) \quad \begin{aligned} f(\bar{u} + \varepsilon v(1)) - f(\bar{u} + \varepsilon v(-1)) &= c\varepsilon(v(1) - v(-1)), \\ \lambda_k(\bar{u} + \varepsilon v(-1)) &< c < \lambda_k(\bar{u} + \varepsilon v(1)), \quad \text{pour un } k \text{ donné.} \end{aligned}$$

On peut alors démontrer le résultat suivant.



**Théorème 2.1.2** Soit  $\tau > 0$  fixé et  $\bar{u}_0$  tel que  $g(\bar{u}_0) = 0$ ,  $dg(\bar{u}_0)$  inversible et

$$(2.9) \quad \alpha d\lambda_k(\bar{u}_0).r_k(\bar{u}_0) > 0, \quad \alpha = \frac{\Pi_k(\bar{u}_0)dg(\bar{u}_0).r_k(\bar{u}_0)}{\Pi_k(\bar{u}_0)D^2f(\bar{u}_0).r_k(\bar{u}_0).r_k(\bar{u}_0)}.$$

Alors il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \eta$ , il existe une solution  $(\bar{u}(\varepsilon), v(\varepsilon))$  de (2.7,2.8) avec  $c = \lambda_k(\bar{u})$ , unique tel que  $\bar{u}(0) = \bar{u}_0$ ,  $v(0, x) = v^0(x) = \alpha x r_k(\bar{u}_0)$ .

Les roll-waves obtenues sont uniquement paramétrées par la période  $L = 2\varepsilon\tau$ . On montre le théorème 2.1.2 à l'aide du théorème des fonctions implicites en reformulant (2.7-2.8) comme un système d'équations fonctionnelles  $\mathcal{F}_{\varepsilon,\tau}(\bar{u}, v) = 0$ , où  $\mathcal{F}_{\varepsilon,\tau}$  est la fonction définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\varepsilon,\tau} &: \mathbb{X} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Y} \times \mathbb{R}^n \\ \mathcal{F}_{\varepsilon,\tau}(v, \bar{u})_1 &= \Pi_k(\bar{u}) \left( \frac{Df(\bar{u} + \varepsilon v) - Df(\bar{u})}{\varepsilon} v' - \tau \frac{g(\bar{u} + \varepsilon v) - \langle g(\bar{u} + \varepsilon v) \rangle}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + (1 - \Pi_k(\bar{u})) \left( (Df(\bar{u} + \varepsilon v) - \lambda_k(\bar{u})) v' + \tau (\langle g(\bar{u} + \varepsilon v) \rangle - g(\bar{u} + \varepsilon v)) \right), \\ \mathcal{F}_{\varepsilon,\tau}(v, \bar{u})_2 &= \int_{-1}^1 g(\bar{u} + \varepsilon v(x)) dx, \end{aligned}$$

et  $\langle u \rangle$  est la moyenne spatiale de  $u$  sur  $(-1, 1)$ . On note  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  les espaces

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \mathbb{X}_0 &= \left\{ f \in C^1(-1, 1) / f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \sum_{n \geq 0} (n+1)|a_n| < +\infty \right\} \\ \mathbb{X} &= \{ f \in \mathbb{X}_0 / (1 - \Pi_k(\bar{u}_0)) \langle f \rangle = 0 \}, \\ \mathbb{Y} &= \left\{ f \in C(-1, 1) / f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \sum_{n \geq 0} |a_n| < +\infty \right\} \end{aligned}$$

munis des normes  $\|f\|_{\mathbb{X}} = \sum_{n \geq 0} (n+1)|a_n|$  et  $\|f\|_{\mathbb{Y}} = \sum_{n \geq 0} |a_n|$ . Le théorème 2.1.2 n'est pas satisfaisant puisqu'il ne prend pas en compte des termes sources "réels" de la forme  $g(u) = (0, h(u))^T$ , où  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-j}$  avec  $j \geq 1$  et ne s'applique même pas au système de Saint Venant (2.1). Cependant, on peut encore montrer un résultat d'existence de roll-waves pour (2.7-2.8)

**Théorème 2.1.3** Soit  $\tau > 0$  fixé. Si  $dh(\bar{u}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-j}$  est surjective et les conditions

$$\Pi_k(\bar{u}_0)D^2f(\bar{u}_0).r_k(\bar{u}_0).r_k(\bar{u}_0) \neq 0, \quad \Pi_k(\bar{u}_0)dg(\bar{u}_0).r_k(\bar{u}_0) \neq 0$$

et  $\alpha d\lambda_k(\bar{u}_0).r_k(\bar{u}_0) > 0$  sont vérifiées, alors pour  $\varepsilon = 0$ ,  $(\bar{u}_0, v^0)$  appartient à une variété de dimension  $j$  de zéros de  $\mathcal{F}_{0,\tau}$ . Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, cette famille persiste en un famille de zéros de  $\mathcal{F}_{\varepsilon,\tau}$  de dimension  $j$  pour  $\varepsilon, \tau$  fixé.

Pour montrer ce résultat, on remplace seulement  $\int_{-1}^1 g(\bar{u} + \varepsilon v)$  par  $\int_{-1}^1 h(\bar{u} + \varepsilon v)$  dans la définition de  $\mathcal{F}_{\varepsilon, \tau}$ . Les zéros de cette nouvelle fonction correspondent encore à des roll-waves et l'analyse  $\varepsilon \rightarrow 0$  est identique. On montre alors que la fonction considérée est une submersion en  $(\bar{u}_0, v^0)$  (i.e.  $D\mathcal{F}_{0, \tau}(\bar{u}_0, v^0)$  est surjective et son noyau a un supplémentaire fermé : ici il est de dimension finie égale à  $j$ ). La question est alors de paramétrer ces familles de solutions. On se rend compte en analysant les équations que  $\pi_j(Df(U)U' - cU') = 0$ , où  $\pi_j$  désigne la projection sur les  $j$  premières coordonnées. En supposant que la matrice  $A_0$  définie par

$$(2.11) \quad A_0 = \begin{pmatrix} \pi_j df(\bar{u}_0) \\ dh(\bar{u}_0) \end{pmatrix}$$

est inversible, on montre qu'on peut paramétrer localement la famille de roll-wave par  $j$ -quantités conservées et la période spatiale ce qui est bien une généralisation résultat de Dressler (dans ce cas, les paramètres sont la période et le débit relatif).

On peut étendre ce résultat aux systèmes non conservatifs : le but est de montrer l'existence de roll-waves pour le système de Saint Venant bi-couche obtenu au chapitre 1. Considérons le système hyperbolique  $\partial_t u + \mathcal{A}(u)\partial_x u = g(u)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  : on doit formuler des conditions de saut qui remplacent les conditions de Rankine Hugoniot. On utilise ici la notion de chemins non conservatifs. Ils sont définis par  $\Phi : [0, 1] \times \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ , une fonction localement Lipschitzienne vérifiant  $\Phi(0, u_l, u_r) = u_l$ ,  $\Phi(1, u_l, u_r) = u_r$ ,  $\forall u_l, u_r \in \Omega$  et des hypothèses de régularité sur  $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ . Les conditions de saut à travers une discontinuité de vitesse  $\xi$  sont

$$\int_0^1 \left( \xi Id - \mathcal{A}(\Phi(s, u_l, u_r)) \right) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, u_l, u_r) ds = 0.$$

Lorsque  $\Phi$  est analytique (par exemple la ligne droite), on peut montrer l'existence de roll-waves de petite amplitude, en raisonnant comme pour les systèmes conservatifs car les conditions de saut sont identiques dans ce cas.

On étudie l'existence de roll-waves pour les modèles bicouche obtenus au chapitre 1. On a commencé par déterminer des régimes pour lesquelles ces roll waves peuvent exister en étudiant le régime ondes longues : une fois un régime d'instabilité identifié, on a testé numériquement les conditions d'existence de roll waves du théorème 2.1.3. Lorsque ces conditions d'existence sont vérifiées, on a regardé la forme des vecteurs propres "instables" pour savoir s'ils correspondent à des roll-waves à la surface libre ou à l'interface des fluides.

## 2.1.2 Roll-waves pour des écoulements bi-couche

Pour un écoulement de deux fluides Newtoniens, Kliakhandler a mis en avant certains mécanismes menant à l'instabilité de l'écoulement uniforme (inertie, capilla-

rité, stratification en densité) en utilisant un système d'équations de Benney. Cependant ces équations sont mal posées lorsque l'écoulement stationnaire est instable. Le scénario est identique dans une seule couche et l'utilisation des équations de Saint Venant permet de prédire l'apparition de roll-waves. Pour les modèles bicouches obtenus au chapitre 1, il semble difficile d'analyser la stabilité de l'écoulement stationnaire ou de tester les conditions d'apparition de roll-waves complètement, vu le nombre de paramètres (le rapport de densité, de viscosité, les hauteurs de l'écoulement stationnaire).

On a commencé par étudier la stabilité de l'écoulement stationnaire dans la limite onde longues : un argument de relaxation montre que cela revient à étudier la stabilité pour le modèle obtenu par Kliakhandler [31]. Si on le linéarise en une solution stationnaire  $(h_1, h_2) = (\bar{h}_1, \bar{h}_2)$ , on obtient

$$(2.12) \quad \partial_t \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + J(\bar{h}_i) \partial_x \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \lambda \beta d(\bar{h}_i) \partial_{xx} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

et la relation de dispersion,  $\det(\Lambda Id + ikJ(\bar{h}_i) + k^2 d(\bar{h}_i)) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$ . Les valeurs propres  $\Lambda_j(k), j = 1, 2$  sont données, au voisinage de  $k = 0$  par

$$(2.13) \quad \Lambda_j(k) = -ik\bar{\Lambda}_j - k^2 \frac{\text{tr}(\text{com}(J(\bar{h}_i) - \bar{\Lambda}_j Id)^T d(\bar{h}_i))}{\text{tr}(J(\bar{h}_i)) - 2\bar{\Lambda}_j} + \mathcal{O}(k^3),$$

où  $\bar{\Lambda}_1 > \bar{\Lambda}_2$  désignent les valeurs propres (réelles) de  $J(\bar{h}_i)$ . On en déduit des conditions de stabilité sur le mode à la surface libre (associé à  $\Lambda_1$ ) et le mode à l'interface (associé à  $\Lambda_2$ ) dans le régime ondes longues  $k \approx 0$  :

$$a_1(\rho) \frac{\cot \theta}{R_e} < \lambda a_2(\rho), \quad b_1(\rho) \frac{\cot \theta}{R_e} > \lambda b_2(\rho).$$

On vérifie aisément que la condition de stabilité du mode de surface est simplement  $R_e < f_1(\rho) \cot \theta$ , où  $f_1(\rho) = \frac{a_1(\rho)}{\lambda a_2(\rho)}$ . La situation est plus complexe pour le mode de propagation à l'interface puisque  $b_1$  et  $b_2$  peuvent changer de signe. Si  $b_1(\rho)b_2(\rho) < 0$ , l'interface est stable si  $b_1(\rho) > 0$  et instable sinon. Si  $b_1(\rho)b_2(\rho) > 0$ , l'interface est stable si  $b_1(\rho) > 0$  et  $R_e < f_2(\rho) \cot \theta$  ou  $b_1(\rho) < 0$  et  $R_e > f_2(\rho) \cot \theta$ , avec  $f_2(\rho) = \frac{b_1(\rho)}{\lambda b_2(\rho)}$ . On a choisi ici de présenter le cas particulier  $\nu = 0.3$  et  $h_i = 1$ .

Il existe  $\rho_c \approx 3.3$  au delà duquel  $b_2 < 0$ . Le mode d'interface est alors toujours stable et le système complet n'est stable que si  $R_e < f_1(\rho) \cot \theta$ . Une stratification en densité a priori instable ( $\rho > 1$ ) peut ainsi être stabilisée grâce aux effets conjugués de la flottabilité et de la convection. Si  $\rho < \rho_c$ , les  $b_i$  sont positifs et  $f_1(\rho) < f_2(\rho)$  : lorsque  $R_e$  augmente à partir de 0, le mode de surface est déstabilisé avant le mode à l'interface. Ceci ne donne évidemment aucune information sur la

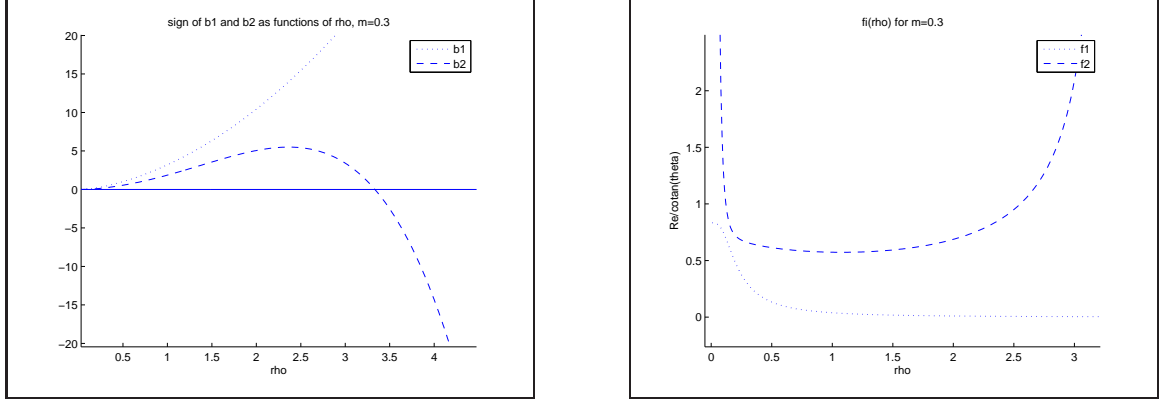


FIG. 2.1 – Graphes de  $b_i, i = 1, 2$  et des courbes critiques  $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$  pour  $\nu = 0.3$  en fonction de  $\rho$

stabilité de l'écoulement stationnaire pour les équations de Saint Venant bi-couche, contrairement au cas monocouche où la condition d'instabilité est la même pour *toutes les longueurs d'onde*. En ce sens, les conditions d'existence de roll-waves obtenues dans la section précédente donnent des critères de stabilité dans le régime hautes fréquences  $k \rightarrow \infty$ . On a ensuite testé les conditions d'existence de roll-waves pour les deux modes s'écoulant vers le bas quand  $\rho = 0.5$ . Dans ce cas, il existe des roll-waves à la surface libre dès que  $R_e > 0.6 \cot \theta$  et à l'interface pour  $R_e > 0.85 \cot \theta$ . On a fait une simulation numérique directe du système de Saint Venant bi-couche lorsque les deux modes sont instables ( $\varepsilon = 0.01$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $R_e = 1$  et  $F^2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ), avec une perturbation de l'ordre de 5% de l'écoulement uniforme : on observe bien la formation de roll-waves dans ce cas.

Dans cette étude préliminaire, le mode de surface est toujours déstabilisé *avant* le mode à l'interface lorsque  $R_e$  augmente à partir de 0. Ceci pourrait nous amener à croire que c'est un comportement générique de ces écoulements. Il n'en est rien et on a mis en évidence certains cas où la situation est inversée (par exemple  $\nu = 0.7$  et  $\rho = 0.3$ ).

### 2.1.3 Persistance des roll-waves non visqueuses

Considérons une roll-wave de longueur d'onde  $L$  se propageant à la vitesse  $c$  et dont le profil est donné par  $\xi \mapsto H(\xi)$ . Pour montrer que les équations de Saint Venant (2.1) sont bien posées pour toute condition initiale "proche" de cette roll-wave, on reformule le problème en travaillant dans l'espace des fonctions  $C^1$  par morceaux avec des discontinuités aux points  $X_i \approx ct + iL$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Les chocs sont

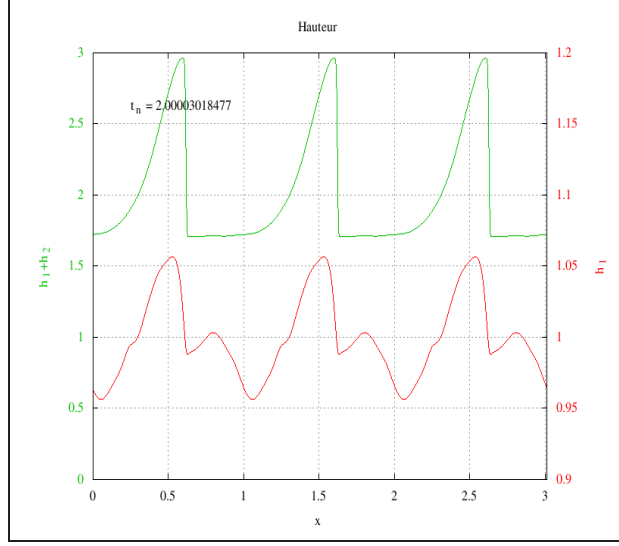


FIG. 2.2 – Formation d’une roll-wave lorsque les modes de surface et d’interface sont instables

fixés à l’aide d’un changement de variable  $\xi : x \mapsto \xi(x, t)$  affine par morceaux tel que  $\xi(X_i(t), t) = ct + iL$  et les équations reformulées avec les invariants de Riemann  $r = u + 2\frac{\sqrt{h}}{F} = \phi_1(h, u)$ ,  $s = u - 2\frac{\sqrt{h}}{F} = \phi_2(h, u)$ . Le système (2.1) devient

$$(2.14) \quad \begin{aligned} r_t + \frac{L}{X_{i+1} - X_i} \left( \lambda_1(r, s) - (\dot{X}_i + \gamma_i(\xi))(\dot{X}_{i+1} - \dot{X}_i) \right) r_\xi &= Q(r, s), \\ s_t + \frac{L}{X_{i+1} - X_i} \left( \lambda_2(r, s) - (\dot{X}_i + \gamma_i(\xi))(\dot{X}_{i+1} - \dot{X}_i) \right) s_\xi &= Q(r, s). \end{aligned}$$

où  $\gamma_i(\xi) = \frac{\xi - iL}{L} \in (0, 1)$ ,  $\lambda_1 = \frac{3r}{4} + \frac{s}{4}$  et  $\lambda_2 = \frac{3s}{4} + \frac{r}{4}$ . Les discontinuités vérifient

$$(2.15) \quad \begin{aligned} [(r+s)(r-s)^2]_{X_i} &= 2\dot{X}_i [(r-s)^2]_{X_i}, \\ [(r-s)^4 + 8(r-s)^2(r+s)^2]_{X_i} &= 16\dot{X}_i [(r+s)(r-s)^2]_{X_i}, \end{aligned} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

La roll-wave (notée  $R, S, X_i = ct + iL$ ) devient alors une solution stationnaire de (2.14, 2.15). Cette formulation permet, entre autre, d’étudier la stabilité spectrale des roll-waves [46]. Dans cette section, on montre que (2.14, 2.15) est bien posé.

**Théorème 2.1.4** *Soit  $F$  tel que  $2 < F < F_c$ , ( $F_c > 12$ ). Il existe  $\rho > 0$  tel que pour tout  $(r_0, s_0) \in (R, S) + H^{m+\frac{1}{2}}(\Omega)$  avec  $m > 2$  et  $(X_{0,i} - iL)_{i \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ , vérifiant des relations de compatibilité adéquates et*

$$\|(r_0, s_0) - (R, S)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \rho, \quad \|X_{0,i+1} - X_{0,i} - L\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leq \rho,$$

il existe  $T > 0$  et une unique solution  $(r, s) \in (R, S) + H^m(\Omega \times [0, T])$  et  $(X_i - (ct + iL))_{i \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, H^{m+1}(0, T))$  de (2.14), (2.15) tel que

$$(r, s)|_{t=0} = (r_0, s_0), \quad X_i(t=0) = X_{0,i}.$$

La structure de la roll-wave n'est pas détruite sur l'intervalle  $(0, T)$ , ce qui constitue un résultat de "stabilité" des roll-waves puisque en général des singularités supplémentaires peuvent se former en temps fini. L'hypothèse  $F > 2$  est la condition d'existence des roll-waves alors que l'hypothèse  $F < F_c$  assure que les conditions de chocs de Rankine Hugoniot sont dissipatives. Le nombre  $F$  joue le rôle d'un nombre de Froude qui mesure si l'écoulement est fluvial ou torrentiel. Le théorème suggère que pour un écoulement torrentiel la structure de roll-wave risque d'être détruite. La preuve du théorème 2.1.4 repose sur l'étude détaillée d'un système linéarisé au voisinage d'une solution "approchée" et sur une méthode de point fixe pour traiter le problème complet. Soit  $(R_i, S_i, X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  une solution approchée de (2.14, 2.15). On étudie une version linéarisée de (2.14, 2.15) au voisinage de cette solution.

$$(2.16) \quad \partial_t r_i + \tilde{\Lambda}_1^i \partial_x r_i = F_i^1, \quad \partial_t s_i + \tilde{\Lambda}_2^i \partial_x s_i = F_i^2, \quad \forall x \in (0, L), \forall i \in \mathbb{Z},$$

où  $r_i = r|_{(iL, (i+1)L)}$ ,  $s_i = s|_{(iL, (i+1)L)}$  et  $\tilde{\Lambda}_i^k = \frac{L}{X_{i+1} - X_i} \lambda_k(R_i, S_i)$ . Les conditions de Rankine Hugoniot linéarisées complètent (2.16)

$$(2.17) \quad \begin{aligned} [\mathbb{Q}(R_i, S_i)] \dot{\epsilon}_i &= \left[ \left( \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial R} - \dot{X}_i \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial R} \right) r + \left( \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial S} - \dot{X}_i \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial S} \right) s \right]_{iL} + \tilde{a}_{1,i}, \\ [H(R_i, S_i)] \dot{\epsilon}_i &= \left[ \left( \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial R} - \dot{X}_i \frac{\partial H}{\partial R} \right) r + \left( \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial S} - \dot{X}_i \frac{\partial H}{\partial S} \right) s \right]_{iL} + \tilde{a}_{2,i}, \end{aligned} \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

où les fonctions  $\mathbb{Q} = HU$ ,  $\mathbb{F} = \frac{H^2}{2F} + HU^2$  sont vues comme des fonctions des invariants de Riemann  $(H, U) = \phi^{-1}(R, S)$ . On peut réécrire les équations (2.17) sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_i \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{B}_i(r_i^\pm, s_i^\pm) + \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \end{pmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour les chocs simples, on commence par faire une analyse spectrale du système lorsque la solution approchée et la solution exacte coïncident. On obtient une relation de dispersion qu'on appelle déterminant de Lopatinskiï et, sous certaines hypothèses, on obtient des estimations d'énergie sur le problème linéarisé grâce aux symétriseurs de Kreiss[15], [42]. Pour le problème (2.16-2.17), si  $(R_j, S_j, X_j) = (R, S, ct + jL)$ , on peut écrire une relation de dispersion analogue à la condition de Lopatinskiï. Le système (2.14) homogène devient

$$(2.18) \quad \partial_t r_i + a(H(\xi)) \partial_\xi r_i = 0, \quad \partial_t s_i + b(H(\xi)) \partial_\xi s_i = 0, \quad \forall \xi \in (0, L),$$

où  $\xi \mapsto a(H(\xi))$  s'annule au point sonique  $\xi_0$  tel que  $H(\xi_0) = 1$  et  $b < 0$ . Si on cherche des solutions de (2.18) sous la forme  $(r_k, s_k, \varepsilon_k) = e^{ik\theta} e^{\lambda t} (r(\xi), s(\xi), \varepsilon)$ , on obtient, en utilisant (2.17), la relation de dispersion

$$\Delta(\lambda, \theta) = \frac{2[H]}{1 + \sqrt{F}} \lambda \left( (H_+^{\frac{3}{2}} + H_+^{-\frac{3}{2}} + 2) - (H_-^{\frac{3}{2}} + H_-^{-\frac{3}{2}} + 2) e^{i\theta - \lambda} \int_0^L \frac{ds}{b(H(s))} \right) = 0.$$

où  $H_+, H_-$  vérifient la condition de Rankine Hugoniot  $H_+ + H_- = \frac{2}{H_+ H_-}$ . Sur l'ensemble  $\Re(\lambda) > 0$ , la fonction  $\Delta$  s'annule pour  $\lambda = 0$  (et tout  $\theta$ ) et pour

$$-\Re(\lambda) \int_0^L \frac{ds}{b(H(s))} = \log \left( \frac{H_+^{\frac{3}{2}} + H_+^{-\frac{3}{2}} + 2}{H_-^{\frac{3}{2}} + H_-^{-\frac{3}{2}} + 2} \right), \quad \theta = \Im(\lambda) \int_0^L \frac{ds}{b(H(s))} [2\pi].$$

Puisque  $b(H) < 0$  et  $H_+^{\frac{3}{2}} + H_+^{-\frac{3}{2}} + 2 > H_-^{\frac{3}{2}} + H_-^{-\frac{3}{2}} + 2$ , on obtient une ligne de modes instables. Ceci n'implique pas, comme dans le cas d'un choc simple que le problème est mal posé. En fait, la fonction  $\Delta$  n'est pas homogène, contrairement au déterminant de Lopatinskii, et l'existence de modes instables n'induit pas l'existence de modes instables avec un taux de croissance exponentiel arbitrairement grand. Ici ce taux de croissance reste *borné* : on montre même qu'il converge vers 0 lorsque  $L \rightarrow \infty$ . Dans ce cas les termes d'ordre 0 jouent un rôle important dans la stabilité spectrale [46]. Dans ce qui suit, on obtient directement des estimations d'énergie sur (2.16,2.17) sans recourir aux symétriseurs de Kreiss : la preuve est plus simple mais moins générique. On démontre la proposition suivante.

**Proposition 2.1.5** *Soit  $F$  tel que  $2 < F < F_c$  ( $F_c > 12$ ). Il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $m > 0$ , il existe  $C = C(m)$  et  $\gamma_0 = \gamma_0(m)$  tel que pour toute solution approchée  $(R_i, S_i, X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  Lipschitzienne et bornée vérifiant*

$$\begin{aligned} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( \|\dot{X}_i - c\|_\infty + \|X_{i+1} - X_i - L\|_\infty + \|R_i - R, S_i - S\|_\infty \right) &\leq \eta, \\ \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( |\partial_x(R_i, S_i)|_\infty + |\dot{X}_i|_\infty \right) &\leq m, \end{aligned}$$

et pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$ ,  $(F^1, F^2) \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $(a_1, a_2) \in l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{D}(\mathbb{R}))$ , toute solution  $(r_i, s_i, \varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de (2.16), (2.17) vérifie l'estimation d'énergie :

$$(2.19) \quad \gamma \|e^{-\gamma t}(r, s)\|_{L^2(\mathbb{R}/\{iL\} \times \mathbb{R})}^2 + \|e^{-\gamma t}(r_i^\pm, s_i^\pm)\|_{l^2(\mathbb{Z}, L^2(\mathbb{R}))}^2 + \|e^{-\gamma t} \varepsilon_i\|_{l^2(\mathbb{Z}, H^1(\mathbb{R}))}^2 \\ \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|e^{-\gamma t}(F^1, F^2)\|_{L^2(\mathbb{R}/\{iL\} \times \mathbb{R})}^2 + \|e^{-\gamma t}(a_1, a_2)\|_{l^2(\mathbb{Z}, L^2(\mathbb{R}))}^2 \right).$$

L'estimation (2.19) résulte simplement du fait que les conditions saut sont dissipatives pour  $F < F_c$ . On montre alors l'existence d'une solution faible de (2.16,2.17) dans  $L_\gamma^2(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  tel que  $e^{-\gamma t} f \in L^2(\Omega)$ .

**Proposition 2.1.6** *Il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $m > 0$ , il existe  $\gamma_0 = \gamma_0(m)$  tel que si  $(X_i, R_i, S_i)$  vérifie*

$$\begin{aligned} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( \|\dot{X}_i - c\|_\infty, \|X_{i+1} - X_i - L\|_\infty, \|R_i - \bar{R}\|_\infty, \|S_i - \bar{S}\|_\infty \right) &\leq \eta, \\ \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( \|\dot{X}_{i+1} - \dot{X}_i\|_\infty, \|R_i\|_{W^{1,\infty}}, \|S_i\|_{W^{1,\infty}} \right) &\leq m, \end{aligned}$$

alors pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$ ,  $f \in L_\gamma^2(\Omega)^2$ ,  $g \in l^2(\mathbb{Z}, L_\gamma^2(\mathbb{R}))^2$ , il existe une unique solution  $((r, s), \varepsilon) \in L_\gamma^2(\Omega)^2 \times l^2(\mathbb{Z}, H_\gamma^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$  de (2.16-2.17). De plus  $(r_i^\pm, s_i^\pm)_{i \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, L_\gamma^2(\mathbb{R}^4))$ ;  $\varepsilon \in l^2(\mathbb{Z}, H_\gamma^1(\mathbb{R}))$  et vérifient

$$\gamma \|(r, s)\|_{L_\gamma^2(\Omega)^2}^2 + \|(r^\pm, s^\pm)\|_{l^2(\mathbb{Z}, L_\gamma^2(\mathbb{R}^4))}^2 + \|\varepsilon\|_{l^2(\mathbb{Z}, H_\gamma^1(\mathbb{R}))}^2 \leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\gamma^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{l^2(\mathbb{Z}, L_\gamma^2(\mathbb{R}))}^2 \right).$$

Considérons le problème adjoint de (2.16, 2.17)

$$(2.20) \quad -\partial_t p_i - \partial_x(\tilde{\Lambda}_i^1 p_i) = F_i^1, \quad -\partial_t q_i - \partial_x(\tilde{\Lambda}_i^2 q_i) = F_i^2,$$

pour tout  $x \in (0, L)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  avec les conditions aux limites

$$(2.21) \quad \partial_t (N_{2,i}(p_i^\pm, q_i^\pm)_1) = a_{1,i}, \quad C_i(p_i^\pm, q_i^\pm) = a_{2,i}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

On peut montrer l'estimation d'énergie

$$(2.22) \quad \begin{aligned} &\gamma \|e^{\gamma t}(p, q)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e^{-\gamma t}(p_i^\pm, q_i^\pm)\|_{l^2(\mathbb{Z}, L^2(\mathbb{R}))}^2 \\ &\leq C \left( \frac{1}{\gamma} \|e^{\gamma t}(F^1, F^2)\|_{L^2(\mathbb{R}/\{iL\} \times \mathbb{R})}^2 + \|e^{\gamma t}(a_1, a_2)\|_{l^2(\mathbb{Z}, L^2(\mathbb{R}))}^2 \right). \end{aligned}$$

On démontre la proposition 2.1.6 à l'aide d'un argument de dualité. L'estimation (2.22) permet de définir une application linéaire continue sur l'image de l'opérateur adjoint et qu'on prolonge grâce au théorème de Hahn Banach sur  $L_\gamma^2 \times L_\gamma^2$ . Le théorème de Riesz fournit alors l'existence d'une solution faible vérifiant (2.19).

La solution obtenue est "forte" ( $\varepsilon \in H^1$ ) : pour le montrer, on commence par régulariser dans la direction  $t$ . La suite des régularisées vérifie (2.19) mais on ne peut pas en déduire directement qu'elles sont dans  $H^1$  en utilisant les équations, comme on le fait pour un choc non caractéristique. Ici, il y'a un point sonique entre *chaque choc* et le coefficient devant  $r_\xi$  s'annule. Pour démontrer la régularité  $H^1$ , on sépare la solution (régularisée en  $t$ ) entre une partie qui s'annule près des chocs et qu'on régularise dans la direction d'écoulement et une autre dont le support est proche des chocs. La première partie de la solution vérifie (2.19) car il n'y a pas de trace aux discontinuités alors qu'on traite la seconde partie de la solution comme dans le



cas d'un choc simple. La fonction ainsi régularisée est de Cauchy et converge vers la solution faible, ce qui conclut la preuve de la proposition.

On montre ensuite que le problème linéaire (2.16,2.17) avec condition initiale nulle est bien posé et que pour des coefficients plus réguliers, cette solution est plus régulière. Dans la suite, on notera  $I_T = (0, T)$ .

**Proposition 2.1.7** *Supposons les hypothèses de la proposition 2.1.6 satisfaites et  $\|(R_i - R, S_i - S)\|_{l^2(\mathbb{Z}, H^k((0,L) \times I_T))} \leq \mu$ ,  $\|(R_i^\pm - R^\pm, S_i^\pm - S^\pm)\|_{l^2(\mathbb{Z}, H^k(I_T))} \leq \mu$  et  $\|\dot{X}_i - c, X_{i+1} - X_i - L\|_{l^2(\mathbb{Z}, H^k(I_T))} \leq \mu$ , alors pour tout  $f \in H^k(\Omega_T)$  et  $g \in l^2(\mathbb{Z}, H^k(I_T))$  tel que  $f|_{t<0} = 0$ ,  $g|_{t<0} = 0$ , la solution  $(r, s)$  vérifie  $(r, s)|_{t<0} = 0$ . Elle appartient à  $H^k(\Omega_T)$ ,  $(r^\pm, s^\pm)$  appartient à  $l^2(\mathbb{Z}, H^k(I_T))$  et  $\varepsilon$  à  $l^2(\mathbb{Z}, H^{k+1}(I_T))$  avec l'estimation*

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \|(r, s)\|_{H^k(\Omega_T)}^2 + \|r^\pm, s^\pm\|_{l^2(\mathbb{Z}, H^k(I_T))} + \|\varepsilon\|_{l^2(\mathbb{Z}, H^{k+1}(I_T))}^2 \\ \leq C(k, \mu) \left( T \|f\|_{H^k(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{l^2(\mathbb{Z}, H^k(I_T))}^2 \right). \end{aligned}$$

On montre généralement l'existence de solutions fortes pour des systèmes de lois de conservation dans les espaces  $H^s$  tel que  $H^s \subset C^1$ . Pour les problèmes avec des conditions aux limites, cela impose des conditions de compatibilité sur la donnée initiale. Sous cette hypothèse de compatibilité, on construit une solution *approchée*  $(r_a, s_a, X_a)$  de (2.14,2.15) et proche de la roll-wave si  $T$  est petit. On renvoie le lecteur à [4] pour le détail de ce calcul. On cherche ensuite une solution de (2.14,2.15) sous la forme  $r = r_a + \tilde{r}$ ,  $s = s_a + \tilde{s}$  et  $X_i = X_{a,i} + \varepsilon_i$  et  $\tilde{r}|_{t=0} = \tilde{s}|_{t=0} = 0$ ,  $\varepsilon_i|_{t=0} = 0$ . La fonction  $\tilde{r}, \tilde{s}, \varepsilon_i$  est obtenue à l'aide d'un schéma itératif : on pose  $r^{(0)} = s^{(0)} = 0$ ,  $\varepsilon^{(0)} = 0$  et  $(r^{(k)}, s^{(k)})$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  sont définies à l'aide de la proposition 2.1.7 comme l'unique solution du problème à donnée de Cauchy nulle

$$(2.23) \quad \partial_t r_i^{(k)} + \tilde{\Lambda}_i^{1,(k-1)} \partial_x r_i^{(k)} = f_i^{1,(k-1)}, \quad \partial_t s_i^{(k)} + \tilde{\Lambda}_i^{2,(k-1)} \partial_x s_i^{(k)} = f_i^{2,(k-1)},$$

où les fonctions  $f_i^{n,(k-1)}$ ,  $n = 1, 2$  sont données par

$$\begin{aligned} f_i^{1,(k-1)} &= Q_i^{(k-1)} - \partial_t r_i^{(k-1)} - \tilde{\Lambda}_i^{1,(k-1)} \partial_x r_i^{(k-1)}, \\ f_i^{2,(k-1)} &= Q_i^{(k-1)} - \partial_t s_i^{(k-1)} - \tilde{\Lambda}_i^{2,(k-1)} \partial_x s_i^{(k-1)}, \end{aligned}$$

et  $Q_i^{(k)} = Q(r_{a,i} + r^{(k)}, s_{a,i} + s^{(k)})$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_i^{n,(k)} &= \frac{L}{X_{a,i+1} - X_{a,i} + \varepsilon_{i+1}^{(k)} - \varepsilon_i^{(k)}} \left( \lambda_n(r_{a,i} + r^{(k)}, s_{a,i} + s^{(k)}) \right. \\ &\quad \left. - \left( \dot{X}_{a,i} + \dot{\varepsilon}_i^{(k)} + \frac{x}{L} (\dot{X}_{a,i+1} - \dot{X}_{a,i} + \dot{\varepsilon}_{i+1}^{(k)} - \dot{\varepsilon}_i^{(k)}) \right) \right). \end{aligned}$$

Les conditions de Rankine Hugoniot, qu'on réinterprète comme des conditions de transmission, deviennent

$$(2.24) \quad \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_i^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{B}_i^{(k-1)}(r_i^{(k),\pm}, s_i^{(k),\pm}) + \begin{pmatrix} g_i^{1,(k-1)} \\ g_i^{2,(k-1)} \end{pmatrix},$$

avec  $g_i^{n,(k)}$  définies par

$$\begin{pmatrix} g_i^{1,(k)} \\ g_i^{2,(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{X}_{a,i} + F(r_{a,i}^\pm + r_i^{(k),\pm}, s_{a,i}^\pm + s_i^{(k),\pm}) \\ G(r_{a,i}^\pm + r_i^{(k),\pm}, s_{a,i}^\pm + s_i^{(k),\pm}) \end{pmatrix} - \underline{B}_i^{(k)}(r_i^{(k),\pm}, s_i^{(k),\pm}).$$

Pour  $T$  suffisamment petit, on montre alors que la suite  $(r_k, s_k, \varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, ce qui prouve le théorème de persistance des roll-waves en dimension 1.

## 2.2 Stabilité linéaire de roll-waves visqueuses

### 2.2.1 Analyse spectrale

Considérons le modèle de Saint Venant sans dimension

$$(2.25) \quad h_t + (hv)_x = 0, \quad (hv)_t + \left( \frac{h^2}{2F^2} + hv^2 \right)_x = h - v^2 + \varepsilon(hv_x)_x.$$

où  $\varepsilon = (R_\varepsilon)^{-1}$  est un nombre de Reynolds. Le système (2.25) possède une famille d'ondes progressives périodiques qui convergent vers les roll-waves de Dressler lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On peut montrer le résultat suivant.

**Proposition 2.2.1** *Il existe  $\varepsilon_0$  tel que  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  et  $F^2 > 4$ , il existe, pour tout  $L > 0$  et tout  $q > 0$  un débit relatif donné, une vitesse d'onde  $c_{hopf}(q, \varepsilon, F) < c < c_{sol}(q, \varepsilon, F)$  tel qu'il existe une unique fonction  $H$ ,  $L$ -périodique, solution de*

$$(2.26) \quad \varepsilon \left( \frac{qH'}{H} \right)' - \left( \frac{H^2}{2F^2} + \frac{q^2}{H} \right)' + H - \left( c - \frac{q}{H} \right)^2 = 0.$$

*De plus lorsque  $c \rightarrow c_{sol}(q, \varepsilon, F)$ , la famille de solutions périodiques converge vers une onde solitaire ( $L \rightarrow \infty$ ).*

On obtient une solution de (2.25) en posant  $V = c - qH^{-1}$ . Si  $\varepsilon > 0$  est fixé, on montre cette proposition à l'aide du théorème de bifurcation de Hopf lorsque  $c \approx c_{hopf}(q, \varepsilon, F)$ . Pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , cette bifurcation est dégénérée et il faut utiliser des arguments de perturbations singulières dans les EDO (théorèmes de Fenichel) pour

montrer l'existence de solutions périodiques qui convergent vers les roll-waves de Dressler [46]. Si  $\varepsilon \ll 1$ , on montre en plus que cette famille de solutions périodiques converge vers une onde solitaire lorsque  $c \rightarrow c_{sol}$  [27]. Dans la suite du chapitre, la viscosité est *fixée* et on commence par étudier la stabilité *spectrale* de ces solutions.

Soit  $(H, V)$  une solution  $L$ -périodique et de vitesse d'onde  $c$ . Une fois qu'on a fait le changement de repère  $\xi = x - ct$ , les équations de Saint Venant linéarisées au voisinage de  $(H, V)$  s'écrivent, en notant  $u = (h, v)$

$$(2.27) \quad \partial_t u - \mathcal{L}_{c,q} u = 0,$$

où  $\mathcal{L}_{c,q}$  est défini par  $\mathcal{L}_{c,q}(h, v)_1 = -(v - ch)_\xi$  et

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{c,q}(h, v)_2 = & -\left(\left(\frac{H}{F} - \frac{V^2}{H^2}\right)h + \left(\frac{2V}{H} - c\right)v\right)_\xi + \left(1 + \frac{2V^2}{H^3}\right)h \\ & - \frac{2V}{H^2}v + \varepsilon\left(v_\xi - \frac{V}{H}h_\xi - H'\left(\frac{v}{H} - \frac{V}{H^2}h\right)\right)_\xi. \end{aligned}$$

On cherche les solutions *bornées* du problème spectral  $\mathcal{L}_{c,q} u = \lambda u$ . En posant  $Y = (v, h, h')$ , on transforme ce problème en un système différentiel d'ordre un

$$(2.29) \quad Y'(x) = A(x, \lambda, c)Y(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le spectre de  $\mathcal{L}_{c,q}$  est composé de spectre essentiel : il est formé de la réunion de sous problèmes spectraux où on ajoute la condition  $Y(\xi + L) = \sigma Y(\xi)$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{S}^1$ , au système (2.29). Si on note  $\Psi(\cdot, \lambda, c, q)$  la résolvante de (2.29) alors  $\lambda$  est valeur propre si et seulement si il existe  $\sigma \in \mathbb{S}^1$  tel que

$$(2.30) \quad D(\lambda, \sigma, c, q) = \det(\Psi(L(c, q), \lambda, c, q) - \sigma Id_3) = 0.$$

La fonction  $D(\cdot, \cdot, c, q)$  est appelée *fonction de Evans*. On étudie d'abord  $D$  au voisinage de  $\lambda = 0$  (perturbations basses fréquences). Si  $\lambda = 0$ , l'équation (2.29) est équivalente à

$$(2.31) \quad v = ch + \alpha, \quad \mathcal{L}_0 h = \alpha \left( \frac{2V}{H^2} + \left( \varepsilon \frac{H'}{H} + \frac{2V}{H} \right)' \right),$$

où  $\alpha$  est une constante et  $\mathcal{L}_0$  l'opérateur différentiel défini par

$$(2.32) \quad \mathcal{L}_0 h = \varepsilon q \frac{h''}{H} - \left( \left( \frac{H}{F^2} - \frac{q^2}{H^2} + \varepsilon q \left( \frac{H'}{H^2} \right) h \right)' + \left( 1 - 2 \frac{q}{H^2} \left( c - \frac{q}{H} \right) \right) h \right).$$

L'équation  $\mathcal{L}_0 h = 0$  correspond à la linéarisation de (2.26) au voisinage de  $H$ . On obtient une base de solutions de (2.29) pour  $\lambda = 0$  en choisissant une base de solutions  $(h_1, h_2)$  de  $\mathcal{L}_0 h = 0$  puis en calculant une solution  $h_3$  de (2.31) pour

$\alpha = 1$ . Les fonctions  $Y_i = (ch_i + \delta_{i,3}, h_i, h'_i)$ ,  $i = 1..3$ , forment alors une base de (2.31). Calculons les  $h_i$  : en utilisant l'invariance par translation, on montre que  $h_1 = H'$  est solution de  $\mathcal{L}_0 h = 0$ . C'est un vecteur propre associé à  $(\lambda, \sigma) = (0, 1)$ . En utilisant la théorie de Floquet, il existe  $h_2$  solution de  $\mathcal{L}_0 h = 0$  et tel que  $h_2(x + L) = \rho h_2(x)$  où  $\rho$  est l'exposant de Floquet

$$(2.33) \quad \rho = \exp \int_0^L \frac{1}{\varepsilon q} \left( \frac{H^2(x)}{F^2} - \frac{q^2}{H(x)} \right) dx.$$

La bifurcation de Hopf étant surcritique, on montre que  $\rho < 1$ . Enfin, pour calculer le dernier vecteur propre, on remarque qu'en dérivant (2.26) par rapport à  $q$ , la fonction  $h_3 = \frac{\partial H}{\partial q}$  vérifie (2.31) pour  $\alpha = 1$ , ce qui conclut la construction d'une base de solution de (2.29) pour  $\lambda = 0$ .

Passons au calcul du développement asymptotique de la fonction de Evans au voisinage de  $(\lambda, \sigma) = (0, 1)$ . Soit  $Y_i = (V_i, H_i, H'_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  une base de solution de (2.29) qui coïncide avec la base qu'on vient de calculer pour  $\lambda = 0$ . On la développe sous la forme  $Y_i = Y_{i,0} + \lambda Y_{i,1} + \lambda^2 Y_{i,2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$  où  $Y'_{i,k} - AY_{i,k} = L(Y_j, j < k)$ . On résout successivement ces systèmes par méthode de variation de la constante en utilisant la base de la solution calculée précédemment. On obtient

$$(2.34) \quad \begin{aligned} D(\lambda, \sigma) = & (1 - \rho) \left( 2 \int_0^L \frac{\partial H}{\partial c} \frac{\partial L}{\partial q} - \int_0^L \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial L}{\partial c} \right) \lambda^2 \\ & + \left( \int_0^L \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial c} \right) \lambda (\sigma - 1) - (\sigma - 1)^2 + \mathcal{O}(|\lambda| + |\sigma - 1|)^3. \end{aligned}$$

La partie principale de  $D$  est un polynôme homogène de degré 2, noté  $P$ , la dimension de la variété des solutions  $L$ -périodiques. Dans le cas des équations de conservations (de taille  $n$ ), Oh et Zumbrun [49] ont montré que ce polynôme "principal" était, de manière générique, de degré  $n + 1$ . De (2.34), on déduit des conditions nécessaires de stabilité. Etudions d'abord le cas des perturbations  $L$ -périodiques en considérant les zéros de  $D(\cdot, 1)$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ , on a une base de solution  $(Y_i(\lambda, \cdot))_{i=1..3}$  de (2.29)  $(Y_i(\lambda, \cdot))_{i=1..3}$  dont le développement asymptotique est donné par  $Y_i(x, \lambda) = e^{\mu_i(\lambda)x} V_i(x, \lambda)$  avec  $V_i(\lambda, \cdot)$  périodiques et

$$\mu_1(\lambda) = \frac{\lambda \langle H \rangle}{q} + \frac{\langle H^2 \rangle}{\varepsilon F q} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \mu_2(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \mathcal{O}(1), \quad \mu_3(\lambda) = -\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + \mathcal{O}(1).$$

La fonction de Evans vérifie  $D(\lambda, 1) \sim (e^{\mu_1(\lambda)L} - 1)(e^{\mu_2(\lambda)L} - 1)(1 - e^{-\mu_3(\lambda)L})$ . Ainsi,  $D(\lambda, 1) < 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ . Il faut donc que le coefficient devant  $\lambda^2$  soit strictement négatif pour avoir stabilité spectrale

$$(2.35) \quad \left( 2 \int_0^L \frac{\partial H}{\partial c} \frac{\partial L}{\partial q} - \int_0^L \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial L}{\partial c} \right) < 0, \quad (H_1).$$

La deuxième condition est obtenue en étudiant les zéros de  $P$  au voisinage de  $(\lambda, \sigma) \approx (0, 1)$ . Si on pose  $\sigma = 1 + ik + \mathcal{O}(k^2)$ , on obtient  $\lambda_j = ika_j + \mathcal{O}(k^2)$ , où  $a_j$  est racine de  $P(X, 1)$ . Si  $a_j \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ , le spectre traverse l'axe des imaginaires et les roll-waves sont instables. La condition  $a_j \in \mathbb{R}$  se traduit par

$$(2.36) \quad \left(\frac{\partial L}{\partial c} - \int_0^L \frac{\partial H}{\partial q}\right)^2 + 8 \int_0^L \frac{\partial H}{\partial c} \frac{\partial L}{\partial q} > 0, \quad (H_2).$$

Cette dernière condition peut être réinterprétée comme une condition d'hyperbolicité des équations de modulations [64] : on l'a vérifiée numériquement (on renvoie à [6]) et on espère montrer le caractère bien posé des équations de Saint Venant au voisinage d'une roll-wave sur des intervalles de temps inversement proportionnels à la taille des perturbations ondes longues. Il est difficile d'aller plus loin dans l'étude du spectre sans faire une étude numérique. On a alors une description complète du spectre au voisinage de  $(0, 1)$  et lorsque  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

### 2.2.2 Stabilité linéaire

Supposons que  $\sigma(\mathcal{L}_{c,q}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} / \Re(\lambda) \geq 0\} = \{0\}$ . Montrons que toute solution du problème de Cauchy

$$(2.37) \quad \partial_t u - \mathcal{L}_{c,q} u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0$$

converge (dans une norme à définir) vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ . On “diagonalise” le système (2.37) en introduisant la variable visqueuse  $w = v - \frac{V}{H}h$  et on le réécrit sous la forme  $\tilde{u}_t - \mathcal{L}\tilde{u} = 0$ ,  $\tilde{u} = (h, w)$ . L'opérateur  $\mathcal{L}$  est fermé, de domaine  $H^1 \times H^2$ , dense dans  $L^2 \times L^2$ . Il génère un semi-groupe  $e^{t\mathcal{L}}$  vérifiant  $|e^{t\mathcal{L}}|_{L^2} \leq Ce^{\omega t}$  pour un  $\omega > 0$ . Ceci permet de donner une formule de représentation de  $e^{t\mathcal{L}}$ . Si on note  $G(x, y, t) = e^{t\mathcal{L}}\delta(x - y)$  et  $G_\lambda(x, y) = (\mathcal{L} - \lambda)^{-1}\delta(x - y)$ , on obtient, pour  $\eta > 0$  assez grand

$$(2.38) \quad G(x, y, t) = P.V. \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{\lambda t} G_\lambda(x, y) d\lambda.$$

Pour montrer la stabilité linéaire, on pousse le contour d'intégration  $\eta + i\omega\mathbb{R}$  dans le demi plan complexe  $\{\lambda \in \mathbb{C} / \Re(\lambda) < 0\}$ . On a une première contribution, lorsque le contour rencontre les courbes de spectre dans les basse fréquences, à travers une somme d'intégrales le long de courbes de spectre essentiel de  $e^{\lambda t}[G_\lambda]$  (où  $[G_\lambda(x, y)]$  mesure le saut de  $G_\lambda$ ). L'analyse dans ce cas est similaire à celle développée par Oh et Zumbrun [50] pour les systèmes de lois de conservation. La deuxième contribution vient des hautes fréquences. La viscosité est dégénérée et

introduit un mode hyperbolique qui décroît exponentiellement vite en temps. On décrit précisément  $G_\lambda$  dans ces régimes asymptotiques.

Pour les basses fréquences, une description du spectre essentiel est suffisante. Le spectre de  $\mathcal{L}$  au voisinage de l'origine est la réunion de deux courbes  $\Lambda_1, \Lambda_2$  tel que  $\lambda_j(k) = -ia_jk - b_jk^2 + o(k^2)$ ,  $j = 1, 2$  où  $\text{Re } b_j > 0$  et  $a_j \in \mathbb{R}$  sont *distincts* [49]. On note  $q_j(k, \cdot)$  et  $\tilde{q}_j(k, \cdot)$  les vecteurs propres à droite et à gauche de  $\mathcal{L}_k$ , restriction de l'opérateur  $\mathcal{L}$  aux fonctions  $u$  telles que  $u(x + L) = e^{ik}u(x)$ .

Pour les fréquences intermédiaires et si  $\sigma(\mathcal{L}) \cap \{\Re(\lambda) \geq 0\} = \{0\}$ , on montre que sur tout sous ensemble compact de l'ensemble résolvant de  $\mathcal{L}$ , noté  $\rho(\mathcal{L})$ , la fonction  $G_\lambda$  est analytique en  $\lambda$  et il existe  $C, \theta > 0$  tel que

$$|G_\lambda(x, y)|, \left| \frac{\partial}{\partial y} G_\lambda(x, y) \right| \leq C e^{-\theta|x-y|}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}.$$

L'analyse est plus délicate pour les hautes fréquences, à cause de la viscosité dégénérée. Pour comprendre la situation, on gèle les coefficients du système différentiel : un calcul direct sur la relation de dispersion montre que si  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , il y'a une valeur propre d'ordre  $\mathcal{O}(|\lambda|)$  (le mode hyperbolique) et deux valeurs propres d'ordre  $\sqrt{|\lambda|}$  (les modes visqueux). On peut également obtenir un développement asymptotique des vecteurs propres par rapport à  $\lambda$ . Pour justifier cette approche, on fait le changement de variable  $x \mapsto |\lambda|x$  et on se ramène au calcul d'une base de solution d'un système différentiel à coefficients lentement variables. On sépare le mode hyperbolique des modes visqueux en diagonalisant par blocs. On diagonalise ensuite le bloc visqueux à l'aide de changements de variable à coefficients lentement variables. On obtient ainsi la description de  $G_\lambda$  pour  $|\lambda|$  grand.

**Proposition 2.2.2** *Si  $\sigma(\mathcal{L}) \cap \{\Re(\lambda) \geq 0\} = \{0\}$  alors  $\forall r > 0$ , il existe  $\alpha(r) > 0$  tel que  $\Omega_1 = \{\lambda/\text{Re}\lambda \geq -\alpha(r)\} \setminus B(0, r) \subset \rho(\mathcal{L})$ . De plus si  $R > 0$  est suffisamment grand, alors  $\forall (x, y) \in \Omega_1 \setminus B(0, R) : G_\lambda(x, y) = H_\lambda(x, y) + P_\lambda(x, y) + \Theta_\lambda(x, y)$  où*

$$(2.39) \quad H_\lambda(x, y) = e^{(\lambda \frac{\langle H \rangle}{q} + \frac{\langle H^2 \rangle}{\varepsilon F^2 q})(x-y)} F(\lambda, x, y) 1_{]0, \infty[}(y-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec  $F(\lambda, \dots)$   $L$ -periodique en  $x$  et  $y$ . Le terme d'erreur vérifie

$$\Theta_\lambda(x, y) = \frac{B(x, y, \lambda)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} R(x, y, \lambda),$$

où  $B(x, y, \lambda) = e^{\lambda \frac{\langle H \rangle}{q}(x-y)} b(\lambda, x, y) 1_{]0, \infty[}(y-x) (1, 0)^T$  et  $|b(x, y, \lambda)| \leq C e^{-\theta|x-y|}$ . La fonction  $R(x, y, \lambda)$  vérifie  $R(x, y, \lambda) = \mathcal{O}(e^{-\theta(1+\text{Re}\lambda)|x-y|} + e^{-\theta\sqrt{|\lambda||x-y|}})$  pour un certain  $\theta > 0$ . Tous ces termes sont analytiques en  $\lambda$ . Enfin la partie parabolique  $P_\lambda$  est analytique sur  $\Omega = \{\lambda/\text{Re}\lambda > \theta_1 - \theta_2|\text{Im}\lambda|\}$  et vérifie

$$\frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a \partial y^b} P_\lambda(x, y) = \mathcal{O}(|\lambda|^{a+b-\frac{1}{2}} e^{-\theta\sqrt{|\lambda||x-y|}}).$$

Ceci achève la description de  $G_\lambda$  : on calcule ensuite la fonction  $G$ , à l'aide d'une transformée de Laplace inverse. En poussant le contour d'intégration dans le demi plan  $\{\lambda \in \mathbb{C}/\Re(\lambda) < 0\}$ , on obtient d'une part une contribution hyperbolique due aux hautes fréquences et une contribution parabolique due aux basses fréquences. L'analyse est, de ce point de vue, identique à celle proposée par Oh et Zumbrun [50] et on obtient le théorème.

**Théorème 2.2.3** *La fonction  $G(x, y, t)$  s'écrit  $G = \mathcal{H} + \mathcal{D} + \mathcal{R}$  avec*

$$(2.40) \quad \mathcal{H}(x, y, t) = \frac{H^3(y)}{qH^2(x)} e^{-\int_0^t \frac{H(z(y,s)) ds}{\varepsilon F}} \delta_{x-\bar{a}(x,t)t}(-y) 1_{]x, \infty[}(y) (1, 0)^T.$$

où  $z$  désigne la caractéristique  $\frac{dz}{dt} = -\frac{q}{H(z)}$ ,  $z(0, x) = x$  et  $\bar{a}(x, t) = -\frac{1}{t} \int_0^t \frac{q}{H(z(x,s))} ds$ . Le terme parabolique  $\mathcal{D}$  s'écrit

$$\mathcal{D}(x, y, t) = \sum_{i=1,2} \frac{d_i}{\sqrt{4\pi b_i t}} e^{-\frac{|x-y-a_i t|^2}{4b_i t}} q_i(0, x) \tilde{q}_i^*(0, y),$$

pour des constantes  $d_i$  fixées et, pour  $M > 0$  suffisamment grand, la fonction  $\mathcal{R}$  est donnée par

$$\mathcal{R}(x, y, t) = \mathcal{O}\left(e^{-\eta t} e^{-\frac{|x-y|^2}{Mt}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\frac{|x-y-a_1 t|^2}{Mt}} + e^{-\frac{|x-y-a_2 t|^2}{Mt}}}{\sqrt{t}\sqrt{t+1}}\right).$$

On déduit de cette estimation un résultat de stabilité  $L^1 \cap L^p \rightarrow L^p$  [50]. On ne peut pas aller plus loin sans avoir plus d'information sur la dynamique non linéaire des perturbations basses fréquences. En dimension un, l'estimation obtenue est insuffisante pour dominer les termes non linéaires. En étudiant les équations de Whitham (ici un système hyperbolique de dimension 2), on espère obtenir un résultat d'existence en temps inversement proportionnel à l'amplitude de la perturbation hyperbolique.

## 2.3 Perspectives

Dans ce chapitre, j'ai mis en place un schéma d'étude des roll-waves, visqueuses et non visqueuses, analogue à celui développé pour les chocs multidimensionnels : existence, stabilité pour les chocs visqueux, persistance pour les chocs non visqueux et limite faible viscosité. J'ai d'abord donné un théorème d'existence de roll-waves de petite amplitude dans des systèmes hyperboliques de taille quelconque [5]. Ceci permet d'étudier, par exemple, des instabilités dans des écoulements de fluides minces avec plusieurs couches (roll-waves "internes" et roll-waves à surface libre).

J'ai ensuite abordé la question de la *persistance* des roll-waves non visqueuses. A l'aide de changements de variables fixant *tous* les chocs d'une perturbation d'une roll-wave, j'ai pu fournir un cadre mathématique permettant d'étudier la stabilité spectrale des roll-waves pour les équations de Saint Venant [46]. Comme dans le cas d'un choc simple multidimensionnel, on a construit une sorte de déterminant de Lopatinskiï  $\Delta(\lambda, \sigma)$  où  $\sigma \in \mathbb{S}^1$  joue le rôle d'une variable transverse. Cette formulation nous a permis de démontrer la persistance de ces roll-waves lorsque le nombre de Froude n'est pas trop grand [4]. J'ai obtenu directement des estimations d'énergie sur le problème linéarisé simplement en diagonalisant le système à l'aide des invariants de Riemann (et donc sans utiliser  $\Delta$ ). Il faudra certainement avoir recours aux symétriseurs de Kreiss pour étendre ce résultat à des systèmes hyperboliques quelconques et pour traiter des perturbations multidimensionnelles. Il serait également intéressant de faire une étude numérique directe lorsque les conditions de chocs ne sont plus dissipatives pour voir si les roll-waves sont détruites.

J'ai aussi étudié la stabilité des roll-waves visqueuses. L'étude de la stabilité des ondes progressives périodiques pour des systèmes de lois de conservation [49, 50, 51, 64] est loin d'être aussi avancée que pour les chocs simples. En particulier, on a peu de résultats sur la stabilité non linéaire [51]. J'ai abordé dans ce chapitre la question de la stabilité spectrale et linéaire des roll-waves des équations de Saint Venant avec viscosité *réelle*. La première étape a été de déterminer un développement asymptotique de la fonction de Evans au voisinage des basses fréquences. Ceci fournit des conditions nécessaires de stabilité, qu'on a vérifiées numériquement. Les équations de Saint Venant avec terme source sont un des premiers systèmes de lois de conservation pour lequel ces conditions sont vérifiées. On en a ensuite déduit la stabilité linéaire par une méthode proche de celle de Oh et Zumbrun. C'est habituellement la première étape à franchir avant de montrer la stabilité non linéaire. Cependant, Zumbrun a montré que ça n'était vrai qu'en dimension supérieure à trois. En dimension un ou deux, il faut plus d'informations sur la dynamique *non linéaire* des basses fréquences (on renvoie le lecteur aux travaux de Doelman et co-auteurs pour les équations de réaction-diffusion [21]). Cette dynamique est donnée par les équations de Whitham. C'est un système d'EDP du premier ordre. Serre a montré que ces équations étaient bien posées (en fait hyperbolique) si et seulement si les conditions nécessaires de stabilité de Oh et Zumbrun [64] étaient vérifiées. Ceci nous permet d'affirmer que les équations de Whitham sont hyperboliques pour les roll-waves. Une étape intéressante serait de justifier ces équations de Whitham dans notre cas : on pourrait ainsi construire des solutions des équations de Saint Venant proches des roll-waves et sur des temps inversement proportionnels à la taille des perturbations. Pour aller plus loin, il faudrait ensuite obtenir les termes "visqueux" des équations de Whitham.

Enfin, il reste à analyser la limite faible viscosité dans les équations de Saint



Venant. Si on sait montrer que les roll-waves continues convergent vers les roll-waves discontinues de Dressler [46], on n'a pas encore établi de lien entre leurs propriétés de "stabilité". Dans le cas multidimensionnel, on sait établir un lien entre la condition de Lopatinskii (donnant la persistance des roll-waves) et le développement de la fonction de Evans pour les basses fréquences. Si on a bien construit une sorte de déterminant de Lopatinskii et un développement de la fonction de Evans pour les basses fréquences, on est encore loin d'avoir pu établir un lien entre les deux, s'il en existe un. On peut déjà se demander si les solutions discontinues des équations de Saint Venant ont un analogue visqueux. F. Rousset a démontré ce résultat à l'aide de fonctions de Green approchées [55]. Là encore, la condition de Lopatinskii joue un rôle important puisque un problème linéarisé avec condition de Rankine Hugoniot linéarisées est utilisé pour construire une solution approchée du problème avec faible viscosité. Une difficulté supplémentaire à traiter ici est le caractère périodique des équations : la construction de la fonction de Green approchée est alors plus compliquée du fait de la présence de plusieurs chocs.

## Chapitre 3

# Localisation d'énergie dans des systèmes hamiltoniens

Dans ce chapitre, on s'intéresse au phénomène de localisation d'énergie dans des systèmes hamiltoniens (finis) de particules couplées non linéairement. Le but est de comprendre quels sont les mécanismes permettant d'expliquer un processus de dissociation. Un des possibilités concerne la localisation d'énergie vibrationnelle sur quelques liaisons qui, en dépassant l'énergie de liaison entre particules, provoquerait la dissociation. Mathématiquement, on peut les définir comme des solutions périodiques ou relativement périodiques (i.e. périodiques dans un repère en rotation) dont seules quelques particules ont un mouvement de grande amplitude (breathers).

On étudie le cas où deux groupes de particules de masses caractéristiques très différentes interagissent. Lorsque le rapport de masse est infini, on obtient un système simplifié où les masses légères bougent dans un champ de potentiel créé par les masses lourdes immobiles. On peut alors construire des solutions de type breathers et toute la difficulté consiste à "continuer" ces solutions pour des rapports de masse finis : on présente deux cas pour lesquels on justifie cette approche.

- Breathers dans des systèmes invariants par transformation euclidienne : on présente ici un cadre général de continuation de solutions exactement périodiques et réversibles dans des systèmes de particules quelconques. Travail en collaboration avec G. James [7].
- Orbites périodiques relatives dans un système à trois atomes : on considère un système à 2 masses lourdes et une masse légère : dans ce cas, on peut continuer des solutions relativement périodiques et non réversibles aussi bien théoriquement que numériquement. Collaboration avec G. James et Y. Sire [8].

## 3.1 Solutions localisées réversibles dans des systèmes hamiltoniens

### 3.1.1 Description de la limite "anticontinue"

Considérons un système de  $N + n$  masses  $\gamma M_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ,  $N \geq 2$ ),  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) dont l'interaction est décrite par un potentiel non harmonique  $V$ , invariant par transformations euclidiennes. On étudie ici la limite *anticontinue*  $\gamma \rightarrow +\infty$ . L'hamiltonien du système s'écrit

$$(3.1) \quad H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\gamma M_i} P_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i^2 + V(Q_1, \dots, Q_N, q_1, \dots, q_n),$$

où  $Q_i(t), q_i(t), P_i(t), p_i(t) \in \mathbb{R}^2$ , i.e. on se restreint à des mouvements plans. On supposera par la suite que ce système possède une ou plusieurs familles d'équilibres (en sachant que les rotations et les translations génèrent une famille continue d'équilibres). Les équations du mouvement sont données par le système

$$(3.2) \quad \gamma M \frac{d^2 Q}{dt^2} = F, \quad m \frac{d^2 q}{dt^2} = f,$$

où  $F = -\nabla_Q V$ ,  $f = -\nabla_q V$ , et  $M, m$  sont les matrices de masse

$$M = \text{diag}(M_1, M_1, \dots, M_N, M_N), \quad m = \text{diag}(m_1, m_1, \dots, m_n, m_n).$$

Pour étudier la limite  $\gamma \rightarrow \infty$ , on fait deux types de changements de variables. Les premiers vont éliminer l'invariance du système par les translations et les rotations, le second est spécialement adapté à la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  puisqu'on va décomposer le mouvement des masses lourdes en une partie statique et une partie de petite amplitude et à moyenne nulle [34]. On fera alors apparaître les solutions périodiques de (3.2) comme les zéros d'une fonction définie sur des espaces de fonctions périodiques.

Commençons par éliminer les invariances par translation et rotation. La quantité de mouvement totale du système  $\sum_{i=1}^N \gamma M_i \frac{dQ_i}{dt} + \sum_{i=1}^n m_i \frac{dq_i}{dt}$  étant préservée, on suppose que le centre de gravité du système est en 0

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^N \gamma M_i Q_i + \sum_{i=1}^n m_i q_i = 0.$$

Pour éliminer l'invariance par rotation, on choisit un axe dans le plan dans la direction de la masse  $M_1$ . On définit ainsi l'angle  $\theta$  tel que  $Q_1 = \varrho(\cos \theta, \sin \theta)^t$  et on introduit de nouvelles coordonnées  $X_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) telles que

$$(3.4) \quad Q_i = R_\theta X_i, \quad q_i = R_\theta x_i, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi  $X_1 = (\varrho, 0)^t$ . Dans la suite, on notera  $X_i^\perp = R_{\pi/2} X_i$  et  $X = (X_1, \dots, X_N)^t$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ . La condition (3.3) permet d'éliminer  $X_N$  des équations

$$(3.5) \quad X_N(\varrho, Z, x, \gamma) = -\frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{N-1} M_i X_i - \frac{1}{\gamma M_N} \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Le moment angulaire  $J$ , qui est une quantité conservée du mouvement, s'écrit

$$(3.6) \quad J = J_{vib} + \tilde{I} \dot{\theta}, \quad J_{vib} = \sum_{i=1}^N \gamma M_i X_i \wedge \frac{dX_i}{dt} + \sum_{i=1}^n m_i x_i \wedge \frac{dx_i}{dt}$$

où  $\tilde{I} = \sum_{i=1}^N \gamma M_i X_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$  est le moment d'inertie du système. L'équation (3.6) permet de définir  $\dot{\theta}$

$$(3.7) \quad \dot{\theta} = \Omega(\varrho, Z, x, \frac{d\varrho}{dt}, \frac{dZ}{dt}, \frac{dx}{dt}, \gamma, J/\gamma).$$

On peut alors écrire un système d'équations en  $(\varrho, Z, x)$  où  $Z = (X_2, \dots, X_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{2N-4}$  en utilisant  $J$  comme paramètre supplémentaire. Le système (3.2) devient

$$(3.8) \quad \gamma M_1 \frac{d^2 \varrho}{dt^2} = \tilde{G}, \quad \gamma \tilde{M} \left( \frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{d\Omega}{dt} Z^\perp \right) = \tilde{F}, \quad m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d\Omega}{dt} x^\perp \right) = \tilde{f},$$

$$\tilde{F}_i = F_i((\varrho, 0)^t, Z, X_N, x) + \Omega^2 \gamma M_i X_i - 2\Omega \gamma M_i \frac{dX_i^\perp}{dt}, \quad i = 2, \dots, N-1,$$

$$\tilde{f}_i = f_i((\varrho, 0)^t, Z, X_N, x) + \Omega^2 m_i x_i - 2\Omega m_i \frac{dx_i^\perp}{dt}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{G} = F_1^{(1)}((\varrho, 0)^t, Z, X_N, x) + \Omega^2 \gamma M_1 \varrho,$$

et  $F_1^{(1)}$  est la première composante de  $F_1$  alors que  $\tilde{M}$  est la matrice de masse réduite  $\tilde{M} = \text{diag}(M_2, M_2, \dots, M_{N-1}, M_{N-1})$ . Dans ce système de coordonnées, une solution périodique de (3.8) correspond à une solution de (3.2) relativement périodique (i.e. périodique dans un repère en rotation). La vitesse angulaire est la valeur moyenne de  $\dot{\theta}$  donnée par (3.7) et qui est en général non nulle (même si  $J = 0$ ).

Dans la suite, on considère des solutions  $T$ -périodiques de (3.8). On introduit maintenant des variables adaptées à la limite  $\gamma \rightarrow \infty$  en décomposant le mouvement des particules lourdes entre une partie statique d'amplitude  $O(1)$  et une partie oscillante de petite amplitude (et de moyenne nulle) qui tend vers 0 pour  $\gamma \rightarrow \infty$  [34]. Plus précisément, on pose  $\epsilon = \gamma^{-1/2}$  et  $Z = \bar{X} + \epsilon Y$ ,  $\varrho = \bar{\varrho} + \epsilon r$  telles que

$$(3.9) \quad \int_0^T Y(t) dt = 0, \quad \int_0^T r(t) dt = 0.$$

On introduit en plus  $\bar{X}_N$  et  $Y_N$  donnant la position de la  $N$ -ième masse lourde  $X_N = \bar{X}_N + \epsilon Y_N$  et définies à l'aide de (3.5) :

$$(3.10) \quad M_N \bar{X}_N = -M_1(\bar{\varrho}, 0)^t - \sum_{i=2}^{N-1} M_i \bar{X}_i, \quad M_N Y_N = -M_1(r, 0)^t - \sum_{i=2}^{N-1} M_i Y_i - \epsilon \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Il faut aussi mettre à l'échelle la vitesse angulaire  $\Omega$  définie par (3.6)-(3.7) en posant  $\omega = \gamma^{1/2} \Omega$ . On obtient ainsi

$$(3.11) \quad \omega = I^{-1} \left( \epsilon J - \sum_{i=2}^N M_i \bar{X}_i \wedge \frac{dY_i}{dt} - \epsilon \sum_{i=2}^N M_i Y_i \wedge \frac{dY_i}{dt} - \epsilon \sum_{i=1}^n m_i x_i \wedge \frac{dx_i}{dt} \right),$$

où le moment d'inertie mis à l'échelle  $I = \tilde{I}/\gamma = M_1 \bar{\varrho}^2 + \sum_{i=2}^N M_i \bar{X}_i^2 + O(\epsilon) = \bar{I} + O(\epsilon)$ . Le système (3.8) devient, à cette échelle

$$(3.12) \quad M_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = \epsilon \tilde{G}(\bar{\varrho}, \bar{X}, r, Y, x, \epsilon, \epsilon J),$$

$$(3.13) \quad \tilde{M} \left( \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} \bar{X}^\perp + \epsilon \frac{d\omega}{dt} Y^\perp \right) = \epsilon \tilde{F}(\bar{\varrho}, \bar{X}, r, Y, x, \epsilon, \epsilon J),$$

$$(3.14) \quad m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \epsilon \frac{d\omega}{dt} x^\perp \right) = \tilde{f}(\bar{\varrho}, \bar{X}, r, Y, x, \epsilon, \epsilon J).$$

Le champ de force de (3.12)-(3.13) est d'ordre  $O(\epsilon)$  : on verra par la suite, grâce au théorème des fonctions implicites que  $(r, Y) = O(\epsilon)$ . Pour obtenir des informations sur la partie statique du mouvement des masses lourdes, il faut remarquer que les solutions  $T$ -périodiques de (3.9)-(3.14) doivent vérifier des conditions de compatibilités obtenues en intégrant (3.12), (3.13), (3.14) sur une période. En particulier, sur le mouvement des masses lourdes (3.12), (3.13), on obtient

$$(3.15) \quad \bar{G}(\bar{\varrho}, \bar{X}, r, Y, x, \epsilon, \epsilon J) = 0, \quad \bar{F}(\bar{\varrho}, \bar{X}, r, Y, x, \epsilon, \epsilon J) = 0,$$

où  $\bar{F} = (\bar{F}_2, \dots, \bar{F}_{N-1})^t$  et  $\bar{G}$  sont définies par

$$\begin{aligned} T \bar{G} &= \int_0^T F_1^{(1)}((\bar{\varrho}, 0)^t + \epsilon(r, 0)^t, \bar{X} + \epsilon Y, \bar{X}_N + \epsilon Y_N, x) dt + M_1 \bar{\varrho} \int_0^T \omega^2 dt \\ &\quad + \epsilon M_1 \int_0^T \omega^2 r dt, \\ T \bar{F}_i &= \int_0^T F_i((\bar{\varrho}, 0)^t + \epsilon(r, 0)^t, \bar{X} + \epsilon Y, \bar{X}_N + \epsilon Y_N, x) dt + M_i \bar{X}_i \int_0^T \omega^2 dt \\ &\quad + \epsilon M_i \int_0^T \omega^2 Y_i dt - M_i \int_0^T \omega \frac{dY_i^\perp}{dt} dt. \end{aligned}$$

On utilisera ces équations supplémentaires pour obtenir la partie statique  $(\bar{\varrho}, \bar{X})$  du mouvement des masses lourdes : dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , on considère le système étendu (3.9)-(3.15), les deux dernières conditions ne pouvant être obtenues pour  $\epsilon = 0$ . Il existe également 2 limites différentes selon l'ordre de grandeur de  $J$  : soit  $J$  est d'ordre  $O(1)$  soit d'ordre  $O(\epsilon^{-1})$  et on posera  $J = j/\epsilon$  dans (3.9)-(3.15).

On passe à la description du cas  $\epsilon = 0$  en commençant par la répartition (statique) des masses lourdes. Le système (3.12)-(3.14) devient

$$(3.16) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} \bar{X}^\perp = 0, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = f^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, x),$$

où  $f^*$  est donné par  $f_i^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, x) = f_i((\bar{\varrho}, 0)^t, \bar{X}, \bar{X}_N, x)$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $\bar{X}_N, Y_N$  sont définis par (3.10) avec  $\epsilon = 0$  et  $\omega = \bar{I}^{-1}(j - \sum_{i=2}^N M_i \bar{X}_i \wedge \frac{dY_i}{dt})$ . On posera  $j = 0$  lorsque le moment angulaire est borné. Si  $\bar{\varrho} \neq 0$  et  $\bar{X}_N \cdot (1, 0)^t \neq \bar{\varrho}$ , les solutions  $T$ -périodiques de (3.9)-(3.15) pour  $\epsilon = 0$  vérifient nécessairement  $r = 0, Y = 0$  et le système réduit

$$(3.17) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = f^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, x),$$

où  $f_i^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, x) = -\nabla_{q_i} V((\bar{\varrho}, 0)^t, \bar{X}, \bar{X}_N, x)$  pour  $i = 1, \dots, n$ . De plus

$$(3.18) \quad \frac{1}{T} \int_0^T F_i((\bar{\varrho}, 0)^t, \bar{X}, \bar{X}_N, x) dt + M_i \bar{X}_i \bar{I}^{-2} j^2 = 0, \quad i = 2, \dots, N-1,$$

$$(3.19) \quad \frac{1}{T} \int_0^T F_1^{(1)}((\bar{\varrho}, 0)^t, \bar{X}, \bar{X}_N, x) dt + M_1 \bar{\varrho} \bar{I}^{-2} j^2 = 0.$$

On passe à l'analyse du système réduit (3.17)-(3.19) : on va montrer l'existence de modes normaux non linéaires et de breathers. Les modes normaux non linéaires sont des solutions périodiques de (3.17)-(3.19) proches des modes normaux classiques, i.e. des solutions périodiques des équations (3.17)-(3.19) linéarisées au voisinage d'un équilibre. Les breathers sont également des solutions périodiques mais seul un petit nombre d'atomes sont en mouvement, les autres étant au repos.

### Modes normaux non linéaires

Supposons qu'il existe une solution stationnaire  $(Q^*, q^*) = ((\varrho^*, 0)^t, X^*, X_N^*, x^*)$  de (3.2) qui correspond à une solution stationnaire  $\Gamma^* = (\varrho^*, X^*, x^*)$  de (3.17)-(3.19) pour  $j = 0$ . Montrons que pour  $j \approx 0$  et sous certaines conditions, il existe une solution stationnaire et des solutions périodiques proches de  $\Gamma^*$ . On commence par résoudre (3.17) en considérant que  $(\bar{\varrho}, \bar{X}) \approx (\varrho^*, X^*)$  sont des paramètres. Dans la suite, on notera  $\bar{U} = (\bar{\varrho}, \bar{X})^t, U^* = (\varrho^*, X^*)^t$ . Le potentiel  $V$  vérifie les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 1** *La différentielle partielle seconde  $D_q^2V(Q^*, q^*)$  est inversible et possède  $p$  valeurs propres réelles positives ( $p \geq 1$ ).*

Si cette hypothèse est vérifiée alors, pour  $\bar{U} = U^*$ , l'équation (3.17) linearisée en  $x = x^*$  devient

$$(3.20) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -L_*x,$$

où  $L_* = m^{-1}D_q^2V(Q^*, q^*)$  et possède  $p$  valeurs propres positives notées  $\omega_1^{*2}, \dots, \omega_p^{*2}$  avec leurs vecteurs propres associés  $\zeta_1^*, \dots, \zeta_p^*$ . On fait ensuite une hypothèse classique de non résonance

**Hypothèse 2** *La fréquence  $\omega_1^*$  vérifie  $k\omega_1^* \neq \omega_2^*, \dots, \omega_p^*$ , for all  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Pour appliquer le théorème du centre de Lyapounov, on montre d'abord, grâce au théorème des fonctions implicites et l'hypothèse 1 qu'il existe une famille d'équilibres  $\bar{x}(\bar{\varrho}, \bar{X})$ , unique, telle que  $\bar{x}(\bar{\varrho}^*, \bar{X}^*) = x^*$ . On se ramène ensuite en 0 en posant  $x = \bar{x} + y$  et (3.17) devient

$$(3.21) \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = g^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, y),$$

où  $g^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, y) = -\nabla_y \bar{V}(\bar{\varrho}, \bar{X}, y)$  avec  $\bar{V}(\bar{\varrho}, \bar{X}, y) = V((\bar{\varrho}, 0)^t, \bar{X}, \bar{X}_N, \bar{x} + y)$ . Par construction  $g^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, 0) = 0$ , i.e.  $y = 0$  est une solution stationnaire de (3.21) pour tout  $\bar{U} \approx U^*$ . Le linéarisé de (3.21) en 0 possède  $p$  valeurs propres positives  $\omega_i^2 \approx \omega_i^{*2}$  associées à des vecteurs propres  $\zeta_i$  si  $(\bar{\varrho}, \bar{X}) \approx (\varrho^*, X^*)$ . Ces valeurs propres vérifient une hypothèse de non résonance analogue à l'hypothèse 2. On peut alors appliquer le théorème du centre de Lyapounov à ce système et montrer l'existence d'une famille de solutions périodiques qu'on peut écrire (dans les variables de départ)

$$(3.22) \quad x(t; \alpha, \bar{\varrho}, \bar{X}) = \bar{x}(\bar{\varrho}, \bar{X}) + \alpha \cos(\Omega t + \phi) \zeta_1 + O(\alpha^2),$$

où  $\alpha \approx 0$  est l'amplitude des oscillations,  $\Omega(\alpha, \bar{\varrho}, \bar{X})$  est la fréquence de  $x$  ( $\Omega$  est paire en  $\alpha$ ) et  $\Omega = \omega_1 + O(\alpha^2)$ . La fonction  $x$  est paire si on choisit  $\phi = 0$  et elle est régulière en les variables  $(\bar{\varrho}, \bar{X})$ .

On cherche ensuite à déterminer la position des masses lourdes en calculant une solution  $(\bar{\varrho}, \bar{X})$  de (3.18)-(3.19), en sachant que  $x$  est une fonction  $(\bar{\varrho}, \bar{X})$  définie par (3.22). Si on pose  $T = 2\pi/\Omega$  et  $x(t) = \tilde{x}(\Omega t)$  dans (3.18)-(3.19), on obtient la condition

$$(3.23) \quad G(j, \alpha, \bar{\varrho}, \bar{X}) = 0$$

où  $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2N-3} \rightarrow \mathbb{R}^{2N-3}$  est définie par  $G = (G_1^{(1)}, G_2, \dots, G_{N-1})$ ,

$$(3.24) \quad G_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_i((\bar{\varrho}, 0)^t, \bar{X}, \bar{X}_N, \tilde{x}(t; \alpha, \bar{\varrho}, \bar{X})) dt + M_i \bar{X}_i \bar{I}^{-2} j^2 \in \mathbb{R},$$

$$(3.25) \quad G_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1^{(1)}((\bar{\varrho}, 0)^t, \bar{X}, \bar{X}_N, \tilde{x}(t; \alpha, \bar{\varrho}, \bar{X})) dt + M_1 \bar{\varrho} \bar{I}^{-2} j^2 \in \mathbb{R}^2.$$

Pour  $\alpha = j = 0$ ,  $(\bar{\varrho}, \bar{X})^t = U^* = (\varrho^*, X^*)^t$  est une solution de (3.23) correspondant à la solution stationnaire  $\Gamma^* = (\varrho^*, X^*, x^*)$  de (3.17)-(3.19). On résout ensuite (3.24,3.25) pour  $(\alpha, j) \approx (0, 0)$  à l'aide du théorème des fonctions implicites. On fait deux hypothèses.

**Hypothèse 3** *L'équilibre  $(Q^*, q^*)$  vérifie la condition géométrique*

$$(3.26) \quad \varrho^* \neq 0, \quad X_N^* \cdot (1, 0)^t \neq \varrho^*.$$

Cette condition correspond à la condition déjà formulée pour écrire le système réduit et elle est en générale vérifiée (en renumérotant les masses lourdes si nécessaire).

**Hypothèse 4** *Le noyau de  $D^2V(Q^*, q^*)$  est de dimension 3.*

Le potentiel  $V$  étant invariant par rotation et translation, le noyau de  $D^2V(Q^*, q^*)$  est au moins de dimension 3 : on suppose donc qu'il n'y a pas d'éléments supplémentaires dans le noyau. Si ces hypothèses sont vérifiées,  $D_{\bar{U}}G(0, 0, U^*)$  est inversible : en appliquant le théorème des fonctions implicites, on obtient l'existence de différentes familles de solutions périodiques de (3.17-3.19).

**Théorème 3.1.1** *On suppose que les hypothèses 1-4 sont vérifiées. Pour tout  $j \approx 0$ , le système (3.17)-(3.19) a deux familles de solutions, proches de  $\Gamma^* = (\varrho^*, X^*, x^*)$  (existant pour  $j = 0$ )*

*i) une unique solution stationnaire  $\bar{\Gamma}(j) = \Gamma^* + O(j^2)$ , correspondant à un équilibre de(3.1) dans la limite d'un rapport de masse infini,*

*ii) une famille de solutions périodiques à deux paramètres  $\Gamma(\alpha, j)$  proches de  $\bar{\Gamma}(j)$  (les deux paramètres sont  $\alpha$  l'amplitude et la phase  $\phi$ ). Ces solutions sont paires si  $\phi = 0$ . Elles correspondent à des modes normaux relatifs non linéaires de (3.1) associés à  $\bar{\Gamma}(j)$  dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

## Breathers

On considère le cas où certains degrés de liberté de  $x$  sont découplés des autres à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . On sépare  $x$  en deux groupes  $x = (\xi_0, \xi_1)^t$  où  $\xi_i \in \mathbb{R}^{2n_i}$  où



$n_0 + n_1 = n$ . On suppose que le potentiel  $V$  est de la forme

$$(3.27) \quad V(X, x) = V_0(X, \xi_0) + V_1(X, \xi_1).$$

Un breather est une solution périodique dont les oscillations porteront essentiellement sur  $\xi_0$  alors que l'amplitude des oscillations de  $\xi_1$  sera beaucoup plus petite. On construit ces solutions pour  $\epsilon = 0$  en choisissant simplement  $X$  et  $\xi_1$  au repos et  $\xi_0$  oscillant. On prolongera ensuite ces solutions pour  $\epsilon \neq 0$  et pour un faible couplage entre  $\xi_0$  et  $\xi_1$ . On reprend les notations de la section précédente et on résout (3.17) pour  $(\bar{\varrho}, \bar{X}) \approx (\varrho^*, X^*)$ . L'équation (3.17) est scindée en deux :

$$(3.28) \quad \tilde{m}_0 \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = f_0^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, \xi_0),$$

$$(3.29) \quad \tilde{m}_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = f_1^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, \xi_1),$$

où  $f_i^*(\bar{\varrho}, \bar{X}, \xi_i) = -\nabla_{\xi_i} V_i((\bar{\varrho}, 0)^t, \bar{X}, \bar{X}_N, \xi_i)$  et  $\tilde{m}_0, \tilde{m}_1$  sont les matrices de masse diagonales sur chaque composante  $\xi_0, \xi_1$ . On remplace l'hypothèse 1 par :

**Hypothèse 5** *Les différentielles partielles secondes  $D_{\xi_0}^2 V_0(Q^*, \xi_0^*)$  et  $D_{\xi_1}^2 V_1(Q^*, \xi_1^*)$  sont inversibles. De plus  $D_{\xi_0}^2 V_0(Q^*, \xi_0^*)$  possède  $p$  valeurs propres positives ( $p \geq 1$ ).*

La matrice  $D_{\xi_1}^2 V_1(Q^*, \xi_1^*)$  étant inversible, on peut prolonger l'équilibre  $\xi_1^*$  de (3.29) en une unique famille d'équilibre  $\bar{\xi}_1(\bar{\varrho}, \bar{X})$  tel que  $\bar{\xi}_1(\varrho^*, X^*) = \xi_1^*$ . On fixera par la suite  $\xi_1 = \bar{\xi}_1(\bar{\varrho}, \bar{X})$ . On étudie (3.28) de la même manière que pour les modes normaux non linéaires. Sous une hypothèse de non résonance, on construit une famille de solutions périodiques de (3.28) au voisinage de  $\xi_0^*$ . On peut les écrire sous la forme

$$(3.30) \quad \xi_0(t; \alpha, \bar{\varrho}, \bar{X}) = \bar{\xi}_0(\bar{\varrho}, \bar{X}) + \alpha \cos(\Omega t + \phi) \zeta_1 + O(\alpha^2),$$

où  $\alpha \approx 0$  mesure l'amplitude,  $\phi$  la phase. La fonction  $\xi_0$  est paire si  $\phi = 0$ . Il reste à résoudre (3.18)-(3.19) en  $(\bar{\varrho}, \bar{X})$  sachant que  $x(t) = (\xi_0(t; \alpha, \bar{\varrho}, \bar{X}), \bar{\xi}_1(\bar{\varrho}, \bar{X}))^t$ . Sous les hypothèses 3, 4 et en appliquant le théorème des fonctions implicites, on peut encore résoudre (3.18-3.19) au voisinage de l'équilibre  $(\bar{\varrho}^*, \bar{X})$  et pour  $\alpha, j \approx 0$  : on notera cette solution  $\bar{U}_b(\alpha, j) = U^* + O(\alpha^2 + j^2)$ . On a ainsi construit un breather, solution de (3.17-3.19) et qu'on peut développer sous la forme

$$(3.31) \quad \Gamma_b(t; \alpha, j) = \Gamma^* + (0, \alpha \cos(\Omega t + \phi) \zeta_1^*, 0) + O(\alpha^2 + j^2), \quad \Omega = \omega_1^* + O(\alpha^2 + j^2).$$

### 3.1.2 Continuation des solutions périodiques et réversibles

Dans cette section, on donne des conditions générales permettant de prolonger une famille de solutions  $T$ -périodiques et paires de (3.12)-(3.15) pour  $\epsilon \neq 0$  : on

en déduira l'existence de modes normaux non linéaires et de breathers solutions de (3.2). On restreint la discussion au cas  $J = 0$  : la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  définie par (3.6) est impaire et  $T$ -périodique, ainsi  $\theta$  est  $T$ -périodique et paire. Les solutions  $(Q, q)$  obtenues seront donc  $T$ -périodiques et paires dans le repère fixe de référence. Dans ce qui suit, on travaillera dans des espaces de fonctions paires en temps. Le potentiel  $V(Q, q, \eta)$  dépend d'un paramètre supplémentaire  $\eta$  qui peut varier autour d'une valeur de référence (qu'on choisira égale à 0). Les solutions périodiques de (3.12)-(3.15) sont les zéros de  $\mathcal{F} : \mathbb{X} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Y}$ ,  $(U, \epsilon, \eta) \mapsto \mathcal{F}(U, \epsilon, \eta)$ ,

$$\mathcal{F}(U, \epsilon, \eta) = \begin{cases} \overline{G} \\ \overline{F} \\ M_1 \frac{d^2 r}{dt^2} - \epsilon(\tilde{G} - \overline{G}) \\ \tilde{M} \left( \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} \overline{X}^\perp + \epsilon \frac{d\omega}{dt} Y^\perp \right) - \epsilon(\tilde{F} - \overline{F}) \\ m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \epsilon \frac{d\omega}{dt} x^\perp \right) - \tilde{f}, \end{cases}$$

où  $U = (\overline{\varrho}, \overline{X}, r, Y, x)$  et  $J = 0$  dans (3.11), définissant  $\omega$ . Les espaces de Hilbert  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont définis par  $\mathbb{X} = \{U \in \mathbb{R}^{2N-3} \times (H_0^2(\mathbb{T}))^{2N-3} \times (H^2(\mathbb{T}))^{2n}, U(t) = U(-t)\}$ ,  $\mathbb{Y} = \{U \in \mathbb{R}^{2N-3} \times (L_0^2(\mathbb{T}))^{2N-3} \times (L^2(\mathbb{T}))^{2n}, U(t) = U(-t)\}$ , munis de leurs normes usuelles. De plus  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$  et  $H^2(\mathbb{T})$  est l'espace de Sobolev des fonctions  $T$ -périodiques. Les sous espaces  $L_0^2(\mathbb{T})$  et  $H_0^2(\mathbb{T})$  correspondent aux fonctions de  $L^2(\mathbb{T})$  et  $H^2(\mathbb{T})$  et de moyenne nulle. Ainsi les solutions  $T$ -périodiques de (3.12)-(3.15) (paire si  $J = 0$ ) sont les zéros de  $\mathcal{F}$ . Supposons que le système (3.12)-(3.15) a une solution  $T$ -périodique  $U_0 = (\overline{\varrho}_0, \overline{X}_0, 0, 0, x_0)$  si  $\epsilon = \eta = 0$ , i.e. c'est un zéro de  $\mathcal{F}(\cdot, 0, 0)$ . On a obtenu deux familles de solutions dans la section précédente et on va montrer un résultat de prolongement pour  $\epsilon \neq 0$  et  $\eta \neq 0$  à l'aide du théorème des fonctions implicites. Pour cela, montrons que  $D_U \mathcal{F}(U_0, 0, 0)$  est inversible. Soit  $g_1 \in \mathbb{R}$ ,  $g_2 \in \mathbb{R}^{2N-4}$ ,  $h \in (L^2(\mathbb{T}))^{2n}$ ,  $p \in L_0^2(\mathbb{T})$ ,  $q \in (L_0^2(\mathbb{T}))^{2N-4}$ . Il faut montrer qu'il existe une unique solution  $(\delta\overline{\varrho}, \delta\overline{X}, \delta r, \delta Y, \delta x) \in \mathbb{X}$  de

$$(3.32) \quad D_U \mathcal{F}(U_0, 0, 0)(\delta\overline{\varrho}, \delta\overline{X}, \delta r, \delta Y, \delta x) = (g_1, g_2, p, q, h).$$

Ce système est diagonal par bloc. On a d'un coté la linéarisation des 2 premières équations de (3.16) sur la partie oscillatoire du mouvement des masses lourdes qu'on inverse facilement si l'hypothèse de non dégénérescence géométrique est vérifiée. De l'autre coté, on a simplement la linéarisation de (3.17-3.19) et sur laquelle porte l'essentiel des hypothèses assurant l'inversibilité de  $D_U \mathcal{F}(U_0, 0, 0)$ . La linéarisation de (3.17) conduit à

$$(3.33) \quad \mathcal{L}(\delta x) = \partial_{\overline{\varrho}} f^*(\overline{\varrho}_0, \overline{X}_0, x_0(t)) \delta \overline{\varrho} + D_{\overline{X}} f^*(\overline{\varrho}_0, \overline{X}_0, x_0(t)) \delta \overline{X} + h,$$

où  $\mathcal{L}(\delta x) = m \frac{d^2}{dt^2} \delta x - D_x f^*(\bar{\varrho}_0, \bar{X}_0, x_0(t)) \delta x$ . L'invariance de (3.12)-(3.15) par translation en temps implique nécessairement que  $\dot{x}_0$  est dans le noyau de  $\mathcal{L}$ . On fait l'hypothèse.

**Hypothèse 6** *Le noyau de  $\mathcal{L} : (H^2(\mathbb{T}))^{2n} \rightarrow (L^2(\mathbb{T}))^{2n}$  est engendré par  $\dot{x}_0$ ,*

Alors sur l'espace des fonctions paires de  $(H^2(\mathbb{T}))^{2n}$ , on a  $\text{Ker } \mathcal{L} = \{0\}$ . L'opérateur  $\mathcal{L}$  étant Fredholm et d'indice 0, on en déduit que  $\mathcal{L}$  est inversible : on note  $\mathcal{L}^{-1}$  son inverse. On peut alors écrire  $\delta x$  sous la forme

$$(3.34) \quad \delta x(t) = A_0(t) \delta \bar{\varrho} + B_0(t) \delta \bar{X} + \mathcal{L}^{-1}(h)(t).$$

Il reste à résoudre le système donné par les conditions de compatibilité linéarisées. En insérant (3.34) dans (3.32), on obtient le système linéaire

$$(3.35) \quad \begin{aligned} A_1 \delta \bar{\varrho} + B_1 \delta \bar{X} &= g_1 - \frac{1}{T} \int_0^T D_x F_1^{(1)}((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, x_0(t)) \mathcal{L}^{-1}(h)(t) dt, \\ A_i \delta \bar{\varrho} + B_i \delta \bar{X} &= g_{2i} - \frac{1}{T} \int_0^T D_x F_i((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, x_0(t)) \mathcal{L}^{-1}(h)(t) dt, \end{aligned}$$

où  $A_1 \in \mathbb{R}$ ,  $B_1 \in M_{1,2N-4}(\mathbb{R})$  et  $A_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $B_i \in M_{2,2N-4}(\mathbb{R})$  pour  $i = 2 \dots N-1$ . Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \partial_{\bar{\varrho}} F_1^{(1)}((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, x_0(t)) + D_x F_1^{(1)}((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, x_0(t)) A_0(t) dt, \\ A_i &= \frac{1}{T} \int_0^T \partial_{\bar{\varrho}} F_i((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, x_0(t)) + D_x F_i((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, x_0(t)) A_0(t) dt, \\ B_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T D_{\bar{X}} F_1^{(1)}((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, x_0(t)) + D_x F_1^{(1)}((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, \bar{x}_0(t)) B_0(t) dt, \\ B_i &= \frac{1}{T} \int_0^T D_{\bar{X}} F_i((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, \bar{x}_0(t)) + D_x F_i((\bar{\varrho}_0, 0)^t, \bar{X}_0, \bar{X}_{0N}, x_0(t)) B_0(t) dt. \end{aligned}$$

On fait alors l'hypothèse suivante

**Hypothèse 7** *La matrice  $B \in M_{2N-3}(\mathbb{R})$  définie par*

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_{N-1} & B_{N-1} \end{pmatrix}$$

*est inversible.*

Il existe donc une unique solution  $(\delta\bar{\varrho}, \delta\bar{X})$  de (3.35) et  $\delta x$  est donné par (3.34). L'opérateur  $D_U\mathcal{F}(U_0, 0, 0)$  est inversible et en appliquant le théorème des fonctions implicites, on obtient l'existence de solutions périodiques de (3.8) pour  $\epsilon \ll 1$  et qui prolongent celle obtenues pour  $\epsilon = 0$ . Dans le cas des modes normaux non linéaires et des breathers, on vérifie simplement les hypothèses 6,7 en un équilibre du système. On obtient les théorèmes d'existence.

### **Théorème 3.1.2 (modes normaux non linéaires)**

*Supposons que les hypothèses 2-3 sont vérifiées. Considérons un mode normal non linéaire  $\Gamma(t, \alpha, 0) = (\bar{\varrho}, \bar{X}, x(t))$  donné par 3.1.1, et solution de (3.17)-(3.19) pour  $j = 0$ , et  $\alpha$  suffisamment petit. On choisit  $\Gamma(\cdot, \alpha, 0)$  pair et  $T$ -périodique. Pour  $\gamma$  suffisamment grand, il existe une solution  $T$ -périodique  $\Gamma_\gamma = (\varrho(t), Z(t), x(t))$  de (3.8) pour  $J = 0$ , tel que  $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \Gamma_\gamma = \Gamma(\cdot, \alpha, 0)$  dans  $(H^2(\mathbb{T}))^{2N-3} \times (H^2(\mathbb{T}))^{2n}$ .*

Pour montrer la persistance des breathers, on fait l'hypothèse supplémentaire

**Hypothèse 8**  $n^2 \omega_1^{*2} \notin Sp(L_{1*})$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , où  $L_{1*} = \tilde{m}_1^{-1} D_{\xi_1}^2 V_1(Q^*, \xi_1^*)$ .

qui permet de vérifier l'hypothèse 6. C'est une hypothèse classique lorsqu'on cherche à démontrer l'existence de breathers [34, 35].

### **Théorème 3.1.3 (breathers)**

*Considérons un potentiel  $V$  défini par (3.27), dépendant d'un petit paramètre de couplage  $\eta$ . Pour  $\eta = 0$ , on suppose que les hypothèses 2, 3, 4 et 5 sont vérifiées ainsi que l'hypothèse de non résonance 8. Soit une solution type breather  $\Gamma_b(t, \alpha, 0) = (\bar{\varrho}, \bar{X}, \xi_0(t), \xi_1)$  de (3.17)-(3.19) pour  $j = \eta = 0$  et  $\alpha$  suffisamment petit. On choisit  $\Gamma_b(\cdot, \alpha, 0)$  paire et  $T$ -périodique. Pour  $\gamma$  assez grand et  $\eta \approx 0$ , il existe une solution  $T$ -périodique  $\Gamma_{\gamma, \eta} = (\varrho(t), Z(t), x(t))$  de (3.8) pour  $J = 0$ , tel que  $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty, \eta \rightarrow 0} \Gamma_{\gamma, \eta} = \Gamma_b(\cdot, \alpha, 0)$  dans  $(H^2(\mathbb{T}))^{2N-3} \times (H^2(\mathbb{T}))^{2n}$ .*

## **3.2 Orbites périodiques relatives localisées dans un système triatomique**

### **3.2.1 Continuation analytique**

On étudie un système de deux atomes lourds et un atome léger dont l'hamiltonien est défini par

$$(3.36) \quad \tilde{H} = \frac{1}{2\gamma} (\tilde{P}_1^2 + \tilde{P}_2^2) + \frac{1}{2} \tilde{p}_1^2 + U(\|\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_2\|) + W(\|\tilde{Q}_1 - \tilde{q}_1\|) + W(\|\tilde{Q}_2 - \tilde{q}_1\|).$$

Ici  $\gamma$  représente la masse des atomes lourds,  $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 \in \mathbb{R}^2$  (resp.  $\tilde{q}_1$ ) sont les positions des masses lourdes (resp. légère) et  $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{p}_1$  leurs quantités de mouvement. On suppose que  $U, W$  sont régulières sur  $(0, +\infty)$  et que les forces d'interaction  $U', W'$  s'annulent en  $D^*, d^* > 0$  avec  $U''(D^*) > 0, W''(d^*) > 0$  et  $d^* > D^*/2$ , ceci pour permettre les configurations d'équilibre triangulaires. On fixe encore le centre de gravité en 0, i.e.  $\gamma(\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2) + \tilde{q}_1 = 0$  et on travaille dans un repère en rotation uniforme et de vitesse angulaire  $\Omega = \epsilon\bar{\omega}$  où  $\epsilon = \gamma^{-\frac{1}{2}}$ . Si on note  $Q_1, Q_2, q_1$  les nouvelles coordonnées dans ce repère, l'hamiltonien devient

$$H = \frac{\epsilon^2}{2}(Y_1^2 + Y_2^2) + \frac{1}{2}y_1^2 - \Omega(Q_1^t K Y_1 + Q_2^t K Y_2 + q_1^t K y_1) \\ + U(\|Q_1 - Q_2\|) + W(\|Q_1 - q_1\|) + W(\|Q_2 - q_1\|),$$

où  $K = -R_{\frac{\pi}{2}}$ . Notons que  $H = \tilde{H} - \Omega\tilde{J}$ , où  $\tilde{J} = \tilde{Q}_1 \wedge \tilde{P}_1 + \tilde{Q}_2 \wedge \tilde{P}_2 + \tilde{q}_1 \wedge \tilde{p}_1$  est le moment angulaire : c'est également une quantité conservée au cours du temps. Pour simplifier encore l'écriture, on utilise le système des coordonnées de Jacobi,  $u_1 = Q_2 - Q_1, u_2 = q_1 - \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$ . L'hamiltonien s'écrit alors

$$(3.37) \quad H = \epsilon^2\|w_1\|^2 + U(\|u_1\|) - \epsilon\bar{\omega}u_1^t K w_1 \\ + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right)\|w_2\|^2 + W\left(\|u_2 + \frac{u_1}{2}\|\right) + W\left(\|u_2 - \frac{u_1}{2}\|\right) - \epsilon\bar{\omega}u_2^t K w_2,$$

où  $w_1 = \frac{1}{2\epsilon^2}(\dot{u}_1 - \epsilon\bar{\omega}K u_1), w_2 = (1 + \frac{\epsilon^2}{2})^{-1}(\dot{u}_2 - \epsilon\bar{\omega}K u_2)$  sont les variables conjuguées à  $(u_1, u_2)$ . On cherche des solutions  $T$ -périodiques dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  de type breathers, où les masses lourdes ont un mouvement de faible amplitude. On pose  $u_1(t) = \bar{u} + \epsilon r_1(t)$  où  $\int_0^T r_1(s)ds = 0$  et  $w_1 = \epsilon^{-1}v_1$ . Pour simplifier les notations, on écrira également  $u_2 = r_2, w_2 = v_2$  et  $u^\perp = -K u$ . Les équations du mouvement sont

$$(3.38) \quad \dot{r}_1 = 2v_1 - \bar{\omega}(\bar{u} + \epsilon r_1)^\perp, \quad \dot{v}_1 = -\epsilon\left(\bar{\omega}v_1^\perp + \mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2)\right), \\ \dot{r}_2 = \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right)v_2 - \epsilon\bar{\omega}r_2^\perp, \quad \dot{v}_2 = -\epsilon\bar{\omega}v_2^\perp - \mathcal{G}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2),$$

avec  $\mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}}, \mathcal{G}_{\epsilon, \bar{u}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  données par

$$\mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2) = U'(\|\bar{u} + \epsilon r_1\|)\frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{\|\bar{u} + \epsilon r_1\|} + W'(\|r_2 + \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}\|)\frac{r_2 + \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}}{2\|r_2 + \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}\|} \\ - W'(\|r_2 - \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}\|)\frac{r_2 - \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}}{2\|r_2 - \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}\|}, \\ \mathcal{G}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2) = W'(\|r_2 + \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}\|)\frac{r_2 + \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}}{\|r_2 + \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}\|} + W'(\|r_2 - \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}\|)\frac{r_2 - \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}}{\|r_2 - \frac{\bar{u} + \epsilon r_1}{2}\|}.$$

Le système (3.38) a deux quantités conservées : l'hamiltonien  $H$  et le moment angulaire redimensionné  $J = \epsilon \tilde{J} = \bar{u} \wedge v_1 + \epsilon(r_1 \wedge v_1 + r_2 \wedge v_2)$ . De plus, ce système possède une symétrie de réversibilité (les deux masses lourdes étant identiques) : si  $(\bar{u}, r_1, r_2)$  est une solution du système différentiel d'ordre 2 issu de (3.38) alors  $(-S\bar{u}, -S r_1(-t), S r_2(-t))$  est aussi solution avec  $S(a, b) = (-a, b)$ . L'invariance de (3.38) par rotation fait qu'on ne va pas pouvoir appliquer directement le théorème des fonctions implicites et un changement de variable supprimant cette invariance (comme dans le cas précédent) introduirait une singularité artificielle qui nous empêcherait de continuer certaines solutions intéressantes (ici les inversions).

Dans cette section, on adapte une approche introduite par MacKay et Sepulchre et généralisée par Munoz-Almaraz pour la "continuation" d'orbites périodiques possédant plusieurs intégrales premières : on introduit dans les équations du mouvement des termes dissipatifs artificiels par rapport à chaque quantité conservée, ici  $H$  et  $J$ . On choisit ici  $\alpha \nabla H + \beta \nabla J$ . Le problème est alors équivalent à chercher les zéros d'un opérateur dont on montrera que c'est une *submersion* pour  $\epsilon = 0$  et sous certaines conditions de non dégénérescence. En utilisant un théorème de structure des zéros d'une submersion, cette famille de solutions (correspondant à des solutions périodiques) persiste pour  $\epsilon \neq 0$ . On montre en plus que pour avoir des solutions périodiques du système "dissipatif", il faut  $\alpha = \beta = 0$ , ce qui permet d'obtenir des solutions exactes du problème de départ.

Dans la suite, on travaillera dans des espaces de fonctions 1-périodiques (il suffit de faire le changement de variable  $t \mapsto t/T$ , où  $T$  est une inconnue). On considère le système différentiel "dissipatif"

$$(3.39) \quad \begin{aligned} \dot{r}_1 &= T \left( 2v_1 - \bar{\omega}(\bar{u} + \epsilon r_1)^\perp + \alpha \epsilon (\mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2) + \bar{\omega} v_1^\perp) - \beta \epsilon v_1^\perp \right), \\ \dot{v}_1 &= T \left( -\epsilon (\bar{\omega} v_1^\perp + \mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2)) + \alpha (2v_1 - \bar{\omega}(\bar{u} + \epsilon r_1)^\perp) + \beta (\bar{u} + \epsilon r_1)^\perp \right), \\ \dot{r}_2 &= T \left( \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) v_2 - \epsilon \bar{\omega} r_2^\perp + \alpha (\epsilon \bar{\omega} v_2^\perp + \mathcal{G}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2)) - \beta \epsilon v_2^\perp \right), \\ \dot{v}_2 &= T \left( -\epsilon \bar{\omega} v_2^\perp - \mathcal{G}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2) + \alpha \left( \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) v_2 - \epsilon \bar{\omega} r_2^\perp \right) + \beta \epsilon r_2^\perp \right), \end{aligned}$$

où la fonction  $r_1$  a une moyenne nulle :

$$(3.40) \quad \int_0^1 r_1(s) ds = 0.$$

Dans la suite, on notera  $u = (r_1, r_2, v_1, v_2)^t$ . La relation entre les solutions périodiques de (3.39)-(3.40) et celles du système de départ (3.38) est donnée par le lemme

**Lemme 3.2.1** *Soit  $u$  une solution 1-périodique de (3.39)-(3.40) et  $\tilde{u}(t) = u(t/T)$ . S'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\nabla J(\tilde{u}(t_0))$  et  $\nabla H(\tilde{u}(t_0))$  sont libres. Alors  $\alpha = \beta = 0$  et  $\tilde{u}$  est une solution  $T$ -périodique de (3.38).*

On réduit ensuite la recherche de solutions périodiques de (3.39)-(3.40) à celle des zéros d'une fonction bien choisie. Comme dans le cas, général, il faut une équation sur la partie statique  $\bar{u}$  pour  $\epsilon = 0$ . Le problème portant sur  $\bar{u}$  est invariant par rotation : à une rotation près, on peut choisir  $\bar{u} = \bar{\varrho}(1, 0)^t$ . On a juste besoin d'écrire une équation sur  $\bar{\varrho}$ . En prenant le produit scalaire de  $\bar{u}$  avec les 2 premières équations de (3.39), on obtient  $\frac{1}{T} \int_0^1 (\dot{v}_1, \bar{u}) dt = \epsilon \mathcal{I}$ , où

$$(3.41) \quad \mathcal{I} = -(1 + \alpha^2) \int_0^1 (\bar{\omega}v_1^\perp + \mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2), \bar{u}) dt + \beta \int_0^1 (r_1^\perp + \alpha v_1^\perp, \bar{u}) dt.$$

Du fait de la périodicité,  $\int_0^1 (\dot{v}_1, \bar{u}) dt = 0$  et  $\mathcal{I} = 0$  pour  $\epsilon \neq 0$ . On ajoute cette condition de compatibilité à (3.39). Elle fixe  $\bar{u}$  pour  $\epsilon = 0$  et s'écrit

$$(3.42) \quad \int_0^1 (\bar{\omega}v_1^\perp + \mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}}(r_1, r_2), \bar{u}) dt = \frac{\beta}{1 + \alpha^2} \int_0^1 (r_1^\perp + \alpha v_1^\perp, \bar{u}) dt.$$

On réécrit (3.39)-(3.42) comme un système d'équations fonctionnelles

$$(3.43) \quad F_{\epsilon, \bar{\omega}}(r_1, v_1, r_2, v_2, \bar{\varrho}, T, \alpha, \beta) = 0$$

où

$$F_{\epsilon, \bar{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1 - T \left( 2v_1 - \bar{\omega}(\bar{u} + \epsilon r_1)^\perp + \alpha \epsilon (\mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}} + \bar{\omega}v_1^\perp) - \beta \epsilon v_1^\perp \right) \\ \dot{v}_1 - T \left( -\epsilon (\bar{\omega}v_1^\perp + \mathcal{F}_{\epsilon, \bar{u}}) + \alpha (2v_1 - \bar{\omega}(\bar{u} + \epsilon r_1)^\perp) + \beta (\bar{u} + \epsilon r_1)^\perp - \epsilon \mathcal{I} \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|^2} \right) \\ \dot{r}_2 - T \left( \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right) v_2 - \epsilon \bar{\omega} r_2^\perp + \alpha (\epsilon \bar{\omega} v_2^\perp + \mathcal{G}_{\epsilon, \bar{u}}) - \beta \epsilon v_2^\perp \right) \\ \dot{v}_2 - T \left( -\epsilon \bar{\omega} v_2^\perp - \mathcal{G}_{\epsilon, \bar{u}} + \alpha \left( \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right) v_2 - \epsilon \bar{\omega} r_2^\perp \right) + \beta \epsilon r_2^\perp \right) \\ \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

et  $\bar{u} = \bar{\varrho}(1, 0)^t$ . Notons que la seconde composante de  $F_{\epsilon, \bar{\omega}}$  multipliée par  $(1, 0)^t$  a une moyenne nulle. Les potentiels  $U, W$  étant réguliers, la fonction  $F_{\epsilon, \bar{\omega}}$  est  $C^k$  sur un ouvert de  $\mathbb{X}$  et à valeurs dans  $\mathbb{Y}$ , où  $\mathbb{X} = \mathbb{H}_0^1 \times (\mathbb{H}^1)^3 \times \mathbb{R}^4$ ,  $\mathbb{Y} = \mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}_0^2 \times (\mathbb{L}^2)^2 \times \mathbb{R}$ . De plus  $\mathbb{H}_0^1$  désigne l'espace des fonctions  $r \in \mathbb{H}^1$  tel que  $\int_0^1 r(s) ds = 0$ , et  $v \in \mathbb{L}_0^2$  si  $v \in \mathbb{L}^2$  et  $\int_0^1 (v(s), (1, 0)^t) ds = 0$ .

On calcule d'abord les solutions périodiques du problème pour  $\epsilon = 0$  i.e. les zéros de  $F_{0, \bar{\omega}_0}$  et on montrera que c'est une submersion en ces points. En utilisant un théorème de structure des zéros d'une submersion, on obtiendra une solution  $T$ -périodique du problème (3.39)-(3.42) et donc du problème (3.38) pour  $\epsilon \ll 1$  et  $\bar{\omega} \approx \bar{\omega}_0$ . Si  $\epsilon = 0$ , une solution  $T$ -périodique doit vérifier  $\alpha = \beta = 0$  et  $r_1 = 0$ ,

$v_1 = \frac{1}{2}\bar{\omega}\bar{u}^\perp$ . Pour le mouvement de la masse légère et la partie statique  $\bar{u}$ , on obtient le système couplé

$$(3.44) \quad \ddot{r}_2 + T^2 \nabla_{r_2} V(\bar{\varrho}(1, 0)^t, r_2) = 0, \quad \int_0^1 \overline{\mathcal{F}}_1(\bar{\varrho}(1, 0)^t, r_2(s)) ds = \bar{\omega}^2 \bar{\varrho},$$

où  $\overline{\mathcal{F}}_1$  est la première composante de  $\overline{\mathcal{F}}$ . On étudie le cas  $\bar{\omega} = 0$ , le cas  $\bar{\omega} \neq 0$  étant traité de manière perturbative. On se restreint aux configurations isocèles en choisissant  $r_2(t) = (0, R(Tt))$  ( $R$  est  $T$ -périodique) et  $\bar{\rho} = \bar{\varrho}/2$ . Le système (3.44) devient

$$(3.45) \quad R'' + \frac{\partial V_0}{\partial R}(R, \bar{\rho}) = 0,$$

$$(3.46) \quad \int_0^T \frac{\partial V_0}{\partial \bar{\rho}}(R(t), \bar{\rho}) dt = 0,$$

où  $V_0(R, \bar{\rho}) = 2W(\sqrt{R^2 + \bar{\rho}^2}) + U(2\bar{\rho})$ . Le système (3.45)-(3.46) possède les solutions d'équilibre  $(R, \bar{\rho}) = (\pm R^*, \rho^*)$ , i.e.  $\nabla V_0(\pm R^*, \rho^*) = 0$ . Pour les configurations isocèles, le problème est très simplifié puisque l'équation (3.45) est intégrable. On va, comme pour le cas général, calculer les solutions  $T$ -périodiques de l'équation (3.45) puis étudier l'équation non linéaire obtenue en insérant cette solution périodique dans la condition (3.46). Les potentiels  $V, W$  vérifient les conditions :

**Hypothèse 9** *Les fonctions  $U, W$  sont analytiques sur  $\mathbb{R}^+$  et  $U', W'$  s'annulent uniquement en  $D^*, d^* > 0$  respectivement, avec  $U''(D^*) > 0$ ,  $W''(d^*) > 0$  et  $d^* > \rho^* = D^*/2$ . De plus, on choisit  $W$  convexe sur  $(0, d^*]$ .*

Pour avoir l'existence d'une solution périodique de (3.45, 3.46), il faut  $\bar{\rho} < d^*$ . On supposera cette hypothèse vérifiée par la suite. L'hypothèse 9 implique que  $V_0$  est un potentiel à double puits avec les points critiques 0 (point selle) et  $\pm R_0(\bar{\rho})$  où  $R_0(\bar{\rho}) = \sqrt{d^{*2} - \bar{\rho}^2}$  (centres). Le signe de  $h(\bar{\rho}) = [\frac{\partial^2 V_0}{\partial R^2} \frac{\partial^4 V_0}{\partial R^4} - \frac{5}{3} (\frac{\partial^3 V_0}{\partial R^3})^2]_{R=R_0(\bar{\rho})}$  détermine si la fréquence augmente ou diminue avec l'amplitude. L'allure du potentiel est représentée dans la figure 3.1 (figure de gauche).

La fonction  $W$  étant strictement croissante sur  $(d^*, +\infty)$  et décroissante sur  $(0, d^*)$ , il existe  $d_{min}$  tel que  $d_{min} = \text{Inf}\{d \in (0, d^*), W(d) < W_\infty\}$ . Si  $\bar{\rho} \in (d_{min}, d^*)$  alors  $W(\bar{\rho}) < W_\infty$  et  $V_0$  a un maximum local en 0 et global en  $+\infty$ . Les trajectoires sont données par la figure 3.1 (figure de droite) au moins jusqu'aux orbites homoclines à 0. A l'intérieur, les orbites périodiques sont les prolongements des modes normaux linéaires jusqu'à l'orbite homocline et la configuration reste triangulaire. Au delà de l'orbite homocline, les solutions périodiques correspondent à des modes d'inversions. On a deux situations différentes selon que  $W_\infty = +\infty$  ou  $W_\infty < \infty$  : ou bien les orbites périodiques de type inversion remplissent tout l'espace



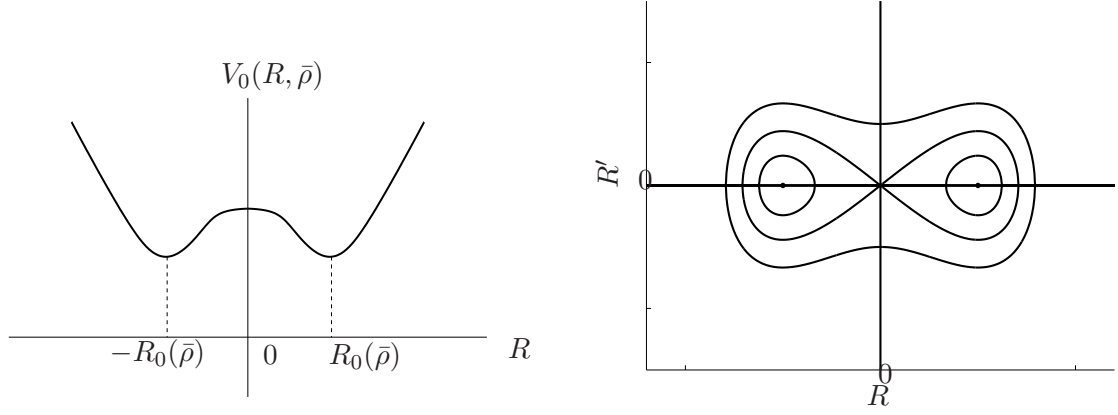


FIG. 3.1 – Figure de gauche : Comportement local du potentiel  $V_0(\cdot, \bar{\rho})$ , Figure de droite : Plan de phase du système (3.45) pour  $\bar{\rho} \in (d_{min}, d^*)$ , au voisinage des orbites homoclines à 0.

des phases ( $W_\infty = +\infty$ ) ou bien elles restent confinées entre deux orbites hétéroclines symétriques joignant  $(\pm\infty, 0)$ . On supposera par la suite que  $\rho^* > d_{min}$  pour préserver les propriétés du potentiel  $V_0$ . Pour paramétrer les solutions périodiques, on introduit le paramètre d'énergie  $E = 2[W(\sqrt{R(0)^2 + \bar{\rho}^2}) - W(d^*)]$ . La valeur  $E = 0$  correspond à l'équilibre  $R = R_0(\bar{\rho})$  et  $E \rightarrow E_{max}(\bar{\rho}) = 2(W(\bar{\rho}) - W(d^*))$  lorsqu'on s'approche de l'orbite homocline. Au delà  $E > E_{max}(\bar{\rho})$ , il existe des solutions périodiques en inversion tant que  $E < E^* = 2(W_\infty - W(d^*))$ . Ainsi, pour chaque valeur de  $E \in [0, E_{max}(\bar{\rho})] \cup (E_{max}(\bar{\rho}), E^*)$ , il existe une unique solution  $T(E, \bar{\rho})$ -périodique et paire qu'on notera  $R_{E, \bar{\rho}}$ . On a ainsi obtenu les solutions périodiques de (3.45) : en insérant cette solution dans (3.46), on réduit le problème du calcul des solutions périodiques de (3.45-3.46) à la recherche des zéros de la fonction  $f$  définie par

$$(3.47) \quad f(E, \bar{\rho}) = \frac{1}{T_{E, \bar{\rho}}} \int_0^{T_{E, \bar{\rho}}} \frac{\partial V_0}{\partial \bar{\rho}}(R_{E, \bar{\rho}}(t), \bar{\rho}) dt.$$

La figure 3.2 (figure de gauche) représente les zéros de  $f$  calculés numériquement pour les potentiels de Morse. La ligne mince représente l'ensemble  $(E_{max}(\bar{\rho}), \bar{\rho})$ , noté  $\Gamma_1$ . La ligne de niveau des zéros de  $f$  s'étend jusqu'à  $(E_0, \rho_0) \approx (0.04, 0.81) \in \Gamma_1$ . La branche des solutions en dessous de  $\Gamma_1$  représente la branche des modes normaux non linéaires alors que celle située au dessus représente les modes en inversions. On ne peut étendre numériquement le calcul mais il semble qu'en ce point de rebroussement, les deux branches soient tangentes. On obtient ainsi le théorème d'existence suivant

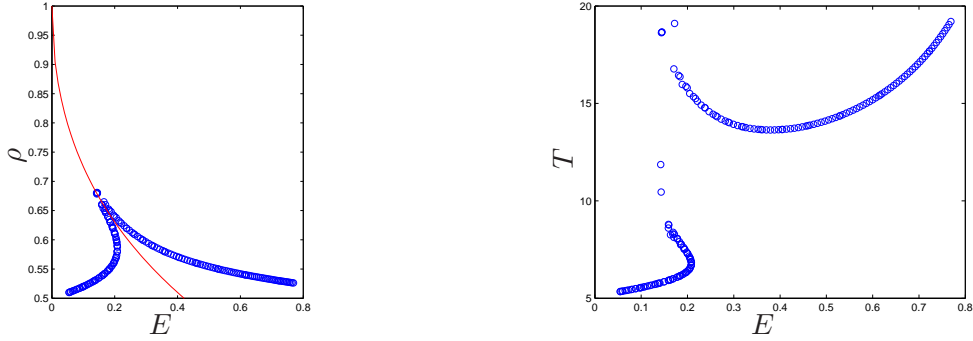


FIG. 3.2 – Figure de gauche : Ensemble des zéros de  $f$ , noté  $\Delta_0$ , calculé pour les potentiels de Morse  $U(x) = W(x) = \frac{1}{2}(e^{-(x-1)} - 1)^2$ . Figure de droite : Période des solutions de (3.45) en fonction de  $E$  lorsque  $(E, \bar{\rho})$  suit la ligne des zéros de  $f$ .

**Théorème 3.2.2** *Supposons que l'hypothèse 9 soit vérifiée,  $d_{min} < \rho^*$  et le zéro  $\bar{\rho} = \rho_0$  de  $f(E_{max}(\bar{\rho}), \bar{\rho})$  soit simple. Alors on a*

*i) Pour tout  $\bar{\rho} \in (\rho^*, \rho_0)$ , il existe  $T > 0$  et une fonction  $R$   $T$ -périodique de (3.45)-(3.46) avec  $0 < E < E_{max}(\bar{\rho})$  et tel que*

- a)  $R$  est paire en  $t$ ,  $R(t) > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,*
- b)  $T \rightarrow 2\pi/\omega_1^*$ ,  $E \rightarrow 0$  et  $R \rightarrow R^*$  dans  $C_b^2(\mathbb{R})$  lorsque  $\bar{\rho} \rightarrow \rho^*$ . Dans cette limite les solutions sont paramétrées par  $\alpha \approx 0$  l'amplitude :*

$$R(t) = R^* + \alpha \cos \Omega t + O(\alpha^2), \quad \Omega = \omega_1^* + O(\alpha^2), \quad \bar{\rho} = \rho^* + O(\alpha^2),$$

*c)  $T \rightarrow +\infty$ ,  $E \rightarrow E_{max}(\rho_0)$  et  $R \rightarrow R_{\rho_0}^h$  (uniformément sur tout compact) si  $\bar{\rho} \rightarrow \rho_0$ .*

*ii) Pour tout  $T$  assez grand, il existe  $\bar{\rho} \in (d_{min}, d^*)$  et une fonction  $R$   $T$ -périodique vérifiant (3.45)-(3.46), avec  $E > E_{max}(\bar{\rho})$  et tel que*

- a)  $R$  paire en  $t$ ,  $R(t) > 0$  pour tout  $t \in [0, T/4)$ ,  $R(t + T/2) = -R(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,*
- b)  $\bar{\rho} \rightarrow \rho_0$ ,  $E \rightarrow E_{max}(\rho_0)$  et  $R \rightarrow R_{\rho_0}^h$  (uniformément sur tout compact) si  $T \rightarrow +\infty$ .*

On a représenté dans la figure 3.2 (figure de droite) la dépendance de la période  $T$  par rapport à  $E$  lorsqu'on parcourt la ligne de solutions de (3.45,3.46).

On passe maintenant au problème du prolongement de ces solutions pour  $\epsilon \neq 0$ . Considérons une solution 1-périodique de (3.44) notée  $\bar{u}_0 = (\bar{\varrho}_0, 0)^t$ ,  $r_2^0$  pour  $T = T_0$  et de vitesse angulaire  $\bar{\omega}_0$ . On veut montrer que  $F_{0, \bar{\omega}_0}$  est une *submersion* en  $(r_1, v_1, r_2, v_2, \bar{\varrho}, T, \alpha, \beta) = X_0$  où  $X_0 = (0, \frac{1}{2}\bar{\omega}_0\bar{u}_0^1, r_2^0, v_2^0, \bar{\varrho}_0, T_0, 0, 0)$  et  $T_0^{-1}r_2^0 = v_2^0$ . Rappelons que  $F_{0, \bar{\omega}_0} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  est une submersion en  $X_0$  si  $DF_{0, \bar{\omega}_0}(X_0)$  est surjective

et son noyau a un complémentaire fermé dans  $\mathbb{X}$ . Comme dans le cas général à  $N+n$  particules, les conditions pour que  $F_{0,\bar{\omega}_0}$  soit une submersion, portent essentiellement sur les équations du mouvement de la particule légère et la contrainte de compatibilité. Soit  $\mathcal{L} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$  l'opérateur linéaire défini par  $\mathcal{L}v = \ddot{v} + T_0^2 D_{r_2} \bar{\mathcal{G}}(\bar{u}_0, r_2^0)v$ . On fait l'hypothèse de non dégénérescence :

**Hypothèse 10**  $\text{Ker}\mathcal{L} = \langle \dot{r}_2^0 \rangle$ .

L'opérateur  $\mathcal{L}$  étant Fredholm et d'indice 0, ceci permet d'énoncer des conditions simples pour la résolution d'un problème du type  $\mathcal{L}v = h$ . La deuxième condition porte sur la linéarisation de la contrainte de compatibilité. Soit  $h_2^0$  solution de  $\mathcal{L}h_2^0 = -T_0^2 D_{\bar{u}} \bar{\mathcal{G}}(\bar{u}_0, r_2^0)\bar{u}_0$ . On définit le coefficient  $\Delta_1$  correspondant à la dérivée partielle dans la direction  $\bar{u}$  de la contrainte de compatibilité en la solution périodique  $X_0$  pour  $\epsilon = 0$  :

$$(3.48) \quad \Delta_1 = \int_0^1 \left( D_{\bar{u}} \bar{\mathcal{F}}(\bar{u}_0, r_2^0)\bar{u}_0 + D_{r_2} \bar{F}(\bar{u}_0, r_2^0)h_2^0, \bar{u}_0 \right) dt.$$

On fait alors l'hypothèse, analogue à celle sur l'inversibilité de la matrice  $B$  de la section précédente

**Hypothèse 11** *Le coefficient  $\Delta_1$  défini par (3.48) ne s'annule pas.*

Si ces hypothèses sont vérifiées, on montre que  $DF_{0,\bar{\omega}_0}(X_0)$  est une submersion. Plus précisément, on montre que  $DF_{0,\bar{\omega}_0}(X_0)$  est surjective et son noyau est de dimension deux. On obtient alors un résultat général de persistance de solutions périodiques

**Théorème 3.2.3** *On fixe  $\epsilon = 0$ ,  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0$  dans (3.40)-(3.39)-(3.42) et on choisit une solution 1-périodique, associée à  $T = T_0$ ,  $(r_1, v_1, r_2, v_2, \bar{u}) = U_0$  non stationnaire de ce système. Si les hypothèses 10, 11 sont vérifiées alors  $U_0$  appartient localement à une famille de solutions périodiques à trois paramètres de (3.40)-(3.39)-(3.42) (pour  $\epsilon = 0$ ,  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0$ ), paramétrées par la phase, la rotation et la période  $T \approx T_0$ . Cette famille persiste pour  $\epsilon \approx 0$  (grand rapport de masse) et  $\bar{\omega} \approx \bar{\omega}_0$  (vitesses angulaires proches). Pour  $\epsilon \neq 0$ , les solutions du système hamiltonien (3.37) qui leur sont associées vérifient  $u_1 - \langle u_1 \rangle = O(\epsilon^2)$ , avec des oscillations portant essentiellement sur  $u_2$  lorsque  $\epsilon \approx 0$ .*

En combinant les théorèmes 3.2.2 et 3.2.3, on obtient des branches globales de solutions périodiques de (3.40)-(3.39)-(3.42), paramétrées par la période  $T$ , le rapport de masse  $\epsilon$  et la vitesse angulaire  $\bar{\omega}$  (à un déphasage et une transformation Euclidienne près). Cette branche est globable au sens où  $T$  est non borné mais reste une branche locale dans les directions transverses  $\epsilon \approx 0$  et  $\bar{\omega} \approx \bar{\omega}_0$ .

**Théorème 3.2.4** *On suppose que les hypothèses du théorème 3.2.2 sont vérifiées et on choisit une solution  $T_0$ -périodique (non constante)  $(R, \bar{\rho})$  de (3.45)-(3.46) donnée par le théorème 3.2.2. On définit une solution 1-périodique solution  $U_0$  de (3.40)-(3.39)-(3.42) associée à  $T = T_0$ ,  $\epsilon = 0$ ,  $\bar{\omega} = 0$  par  $(r_1, v_1, r_2, v_2, \bar{u}) = U_0$  et  $\bar{u} = (2\bar{\rho}, 0)^t$ ,  $r_1 = v_1 = 0$ ,  $r_2(t) = (0, R(t))^t$ ,  $T_0^{-1} \dot{r}_2 = v_2$ . On suppose en plus que  $(R, \bar{\rho})$  est tel que les hypothèses 10, 11 sont vérifiées (c'est le cas pour 3.2.2-i) si on choisit une solution proche d'un équilibre triangulaire avec  $\rho^*$  qui n'est pas un multiple de  $R^*$  et si le coefficient  $h(\rho^*) = [\frac{\partial^2 V_0}{\partial R^2} \frac{\partial^4 V_0}{\partial R^4} - \frac{5}{3} (\frac{\partial^3 V_0}{\partial R^3})^2]_{R=R_0(\bar{\rho})}$  ne s'annule pas). Alors  $U_0$  appartient à une famille de solutions de (3.40)-(3.39)-(3.42), paramétrée par la phase, la rotation, la période  $T \approx T_0$ ,  $\epsilon \approx 0$  et  $\bar{\omega} \approx 0$ .*

### 3.2.2 Continuation numérique

On a calculé numériquement des prolongements de modes en inversion obtenus au théorème 3.2.2 pour  $\epsilon \neq 0$  et  $\bar{\omega} \neq 0$  en procédant en deux étapes. On fixe  $\bar{\omega} = 0$  et on calcule un prolongement par rapport à  $\epsilon$ . Dans ce cas, la configuration isocèle est préservée et on utilise simplement une procédure de "continuation" d'orbites périodiques paires. Plus précisément, si on pose  $\bar{u} + \epsilon r_1(t) = (2\rho(t), 0)^t$  et  $r_2(t) = (0, R(t))^t$ . On cherche simplement des solutions périodiques et paires de

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \rho'' &= -\epsilon^2 \left( U'(2\rho) + W'(\sqrt{R^2 + \rho^2}) \frac{\rho}{\sqrt{R^2 + \rho^2}} \right), \\ R'' &= -(2 + \epsilon^2) W'(\sqrt{R^2 + \rho^2}) \frac{R}{\sqrt{R^2 + \rho^2}}. \end{aligned}$$

en calculant les points fixes de l'application  $(R(0), \rho(0)) \mapsto (R(T), \rho(T))$  où

$$(R(T), R'(T), \rho(T), \rho'(T)) = \phi_T(R(0), 0, \rho(0), 0),$$

où  $\phi_T$  est le flot associé à (3.49) à l'instant  $T$ . Ce problème est résolu en augmentant  $\epsilon$  d'un cran  $\delta\epsilon$  et en se servant de la solution calculée à l'étape précédente pour démarrer les itérations de Newton (la jacobienne de l'application est inversible puisqu'on cherche des fonctions paires). Le résultat du calcul est représenté par le graphe de l'hamiltonien  $\tilde{H}_\epsilon$  en fonction de  $\epsilon$  (figure 3.3). On a fait le calcul pour la solution en inversion correspondant à  $T = 15$  lorsque  $\epsilon = 0$ . On a pu mener la procédure de continuation jusqu'à  $\epsilon = 0.4$ . Au delà, la solution est trop instable. Plus précisément, en analysant le spectre de Floquet, on montre que  $+1$  est valeur propre double et une autre paire de valeurs propres, complexes conjuguées est sur le cercle unité tant que  $\epsilon < 0.23$ , au delà, cette paire collisionne en  $+1$  et passe sur l'axe des réels pour former une paire de valeurs propres instables.

On procède ensuite à la continuation de la solution obtenue pour  $\bar{\omega} \neq 0$ . Dans ce cas, la configuration isocèle n'est plus maintenue et on doit résoudre le système

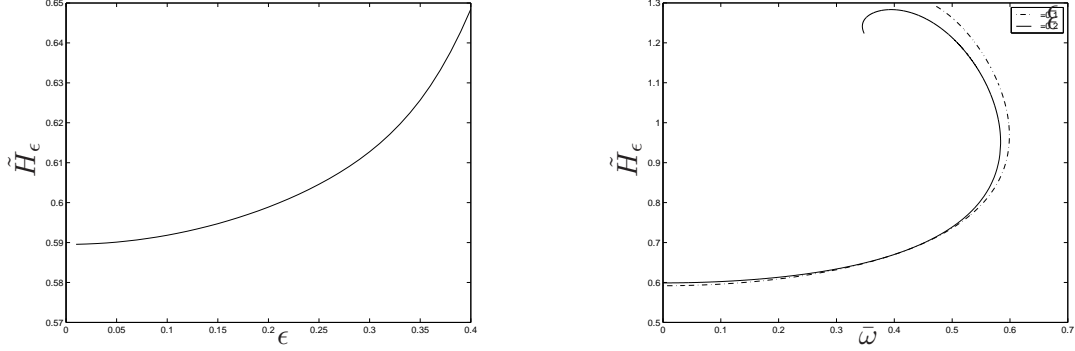


FIG. 3.3 – Figure de gauche : l’Hamiltonien  $\tilde{H}_\epsilon$  en fonction du rapport de masse  $\epsilon$  lorsque la fonction  $(R_0, \bar{\rho}_0)$  de (3.40,3.39,3.42) calculée pour  $\epsilon = 0$  est continuée par rapport à  $\epsilon$ . On a fait la continuation jusqu’à  $\epsilon = 0.4$ . Figure de droite : Prolongement de modes d’inversion pour  $\epsilon = 0.1$  (ligne en pointillés) et  $\epsilon = 0.2$  (ligne continue) lorsque  $\bar{\omega}$  varie.

différentiel complet sur les variables de Jacobi et de dimension 8. On a représenté le résultat de la continuation pour  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.2$  lorsque  $\bar{\omega}$  varie. En calculant le spectre de Floquet, on montre que la branche située après le premier point de rebroussement est instable (au moins au voisinage de ce point). Pour  $\epsilon = 0.1$ , la valeur du point de retournement  $\bar{\omega} \approx 0.6$  semble liée à une bifurcation du même type sur les équilibres relatifs. Comme le montre la figure 3.4, une paire de configuration triangulaire isocèle semble émerger du point  $R = 0$  pour  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_\epsilon \approx 0.49$ .

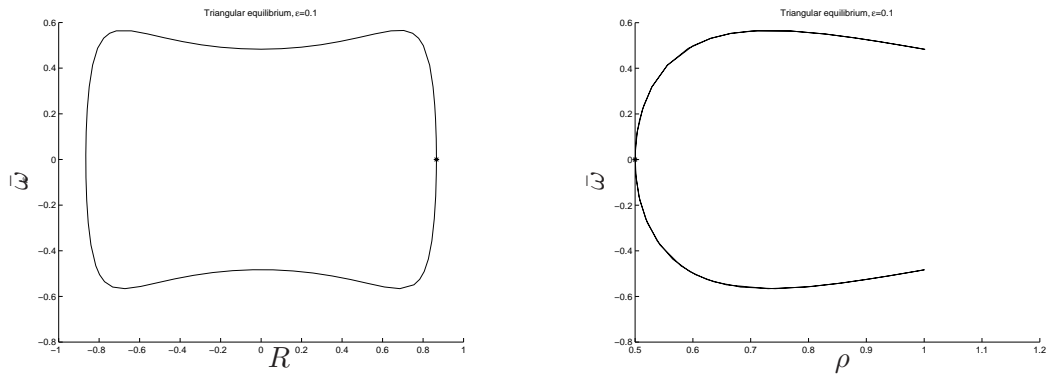


FIG. 3.4 – Famille d’équilibres relatifs avec  $u_1 = (2\rho, 0)^t$  et  $u_2 = (0, R)^t$  émergeant de la configuration isocèle ( $R = \pm\sqrt{3}/2, \rho = 1/2$ ) lorsque  $\bar{\omega}$  augmente, pour  $\epsilon = 0.1$ . Les calculs sont réalisés à l’aide de CL\_MATCONT [20].

On termine par des considérations dynamiques sur le problème complet : on

souhaite analyser l'effet de l'instabilité des modes en inversions et voir si on observe un phénomène de dissociation. On a effectué une perturbation de l'ordre de 5% de l'énergie totale du système. Dans ce cas, on observe une dislocation partielle où la masse légère reste attachée à l'un des atomes lourds alors que l'autre atome est ejecté (figure 3.5, à gauche). On a également effectué une perturbation d'un mode stable et représenté la composante verticale de  $u_2$  : même si la solution n'est plus périodique, on voit que la dynamique s'organise encore autour des inversions (figure 3.5, à droite).

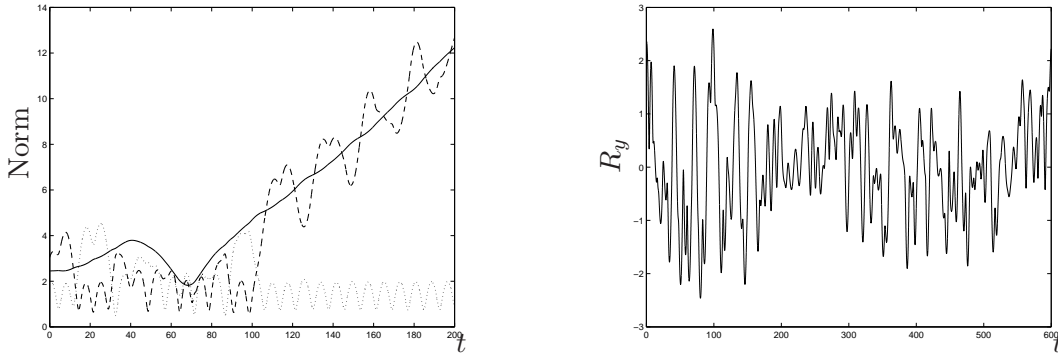


FIG. 3.5 – Figure de gauche : perturbation d'une solution  $T$ -périodique instable associée à  $\epsilon = 0.2$  et  $\bar{\omega} = 0.4869$  sur la figure 3.3 (branche du haut). La distance entre masses lourdes est représentée par ligne continue, les lignes discontinues donnent les distances de la masse légère au deux masses lourdes. Figure de droite : perturbation d'une solution  $T$ -périodique stable associée à  $\epsilon = 0.2$  et  $\bar{\omega} = 0.4869$  sur la figure 3.3 (branche du bas). On représente la composante verticale de  $u_2$

### 3.3 Perspectives

On a présenté une méthode de construction de breathers périodiques ou relativement périodiques pour des molécules dans le plan, lorsqu'un groupe d'atomes possède une masse caractéristique très supérieure à la masse des autres atomes. Cette méthode permet ensuite de calculer numériquement des breathers pour des rapports de masses qui ne sont pas nécessairement très grands. Pour  $\epsilon = \bar{\omega} = 0$ , on a restreint le calcul aux configurations isocèles et il serait intéressant d'étudier d'autres types de solutions périodiques susceptibles d'être prolongées pour  $\epsilon \neq 0$  et  $\bar{\omega} \neq 0$ . Ensuite, pour les modes en inversion, on a fait le lien entre une bifurcation d'équilibres relatifs et deux branches (une stable et une instable) de breathers relativement périodiques. Une analyse de stabilité de ces équilibres au voisinage de la

bifurcation nous permettrait de mieux comprendre la stabilité des breathers proches de ces équilibres.

Un autre problème important est celui de la généralisation à la dimension trois de nos résultats. Dans ce cas, la structure des transformations euclidiennes laissant invariantes le système est plus riche. On pourrait commencer par étudier le cas particulier de la configuration tétraédrique pour laquelle, il existe un certain nombre de résultats (numériques) dans le cas de la molécule  $SnD_4$  [28]. Enfin, les résultats obtenus concernent *l'existence* de breathers : on ne sait rien dire de leur stabilité (à part numériquement). Il serait donc intéressant de mettre en avant des mécanismes permettant de passer d'une configuration où l'énergie est équidistribuée à une situation où l'énergie est localisée. C'est une question difficile auquel on ne sait répondre que très partiellement à travers une étude numérique de stabilité linéaire.

# Bibliographie

## Liste des travaux présentés pour l'habilitation

- [1] D. BRESCH, P. NOBLE, Mathematical Justification of a Shallow Water Model, *Methods Appl. Anal.* 14 (2007), 87-117.
- [2] M. BOUTOUNET, L. CHUPIN, P. NOBLE, J.-P. VILA, Shallow waters viscous flows for arbitrary topography, *Commun. Math. Sci.* 6 (2008), no. 1, 29-55.
- [3] E.D. FERNANDEZ-NIETO, P. NOBLE, J.-P. VILA Shallow Water Equations for Non Newtonian Fluids, *soumis.* 2009.
- [4] P. NOBLE, Persistence of roll-waves for the Saint Venant equations, *SIAM J. Math. Anal.* 40 (2008/09), no. 5, 1783-1814.
- [5] P. NOBLE, Existence of small amplitude roll-waves in hyperbolic systems with source term, *SIAM J. Appl. Math.* 67 (2007), no 4, p. 1202-1212.
- [6] P. NOBLE. Linear stability of viscous roll-waves, *Comm. Partial Differential Equations* 32 (2007), no. 10-12, 1681-1713.
- [7] G. JAMES, P. NOBLE, Weak coupling limit and localized oscillations in Euclidean invariant Hamiltonian systems, *J. Nonlinear Sci* 18 (2008), no. 4, 431-461.
- [8] G. JAMES, P. NOBLE, Y. SIRE, Continuation of relative periodic orbits in a class of triatomic Hamiltonian systems, *Annales de l'IHP (C)* 26 (2009), no. 4, 1237-1264.

## Liste des autres articles

- [9] R. ABRAHAM AND J.E. MARSDEN, Foundations of Mechanics, *Second Edition*, Addison-Wesley Publishing Company (1987).
- [10] N.J. BALMFORTH, R.V. CRASTER, A consistent thin-layer theory for Bingham plastics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 84 (1999) p. 65-81.
- [11] N.J. BALMFORTH, R.V. CRASTER, A.C. RUST, R. SASSI, Viscoplastic flow over an inclined surface, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 142 (2007) p. 219-243.



- [12] N.J. BALMFORTH, J.J. LIU, Roll waves in mud, *J. Fluid. Mech.* 519 (2004) p. 33-54.
- [13] J.T. BEALE, The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations with a Free Surface, *Comm. Pure Appl. Math.* 34 (1981), no. 3, p. 359-392.
- [14] J.T. BEALE, Large-Time Regularity of Viscous Surface Waves, *Arch. Rational. Mech. Anal.* 84 (1984), p. 307-352.
- [15] S. BENZONI-GAVAGE, D. SERRE, Multidimensional hyperbolic partial differential equations. First-order systems and applications. *Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.*
- [16] P. BINDER AND A.V. USTINOV. Exploration of a rich variety of breather modes in Josephson ladders, *Phys. Rev. E* 66, 016603 (2002).
- [17] F. BOUCHUT, M. WESTDICKENBERG, Gravity driven shallow water models for arbitrary topography, *Comm. Math. Sci.* 2 (2004), no. 3, p. 359-389.
- [18] D. BRESCH, E.D. FERNANDEZ-NIETO, I. IONESCU, P. VIGNEAUX, Augmented Lagrangian Method and Compressible Visco-Plastic Flows : Applications to Shallow Dense Avalanches *Preprint* 2008.
- [19] V. CORNISH Ocean Waves and Kindred Geophysical Phenomena, *Cambridge University Press* 1934.
- [20] E.J. DOEDEL ET AL. Computation of periodic solutions of conservative systems with application to the 3-body problem, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13, n. 6, 1353-1381 (2003).
- [21] A. DOELMAN, B. SANDSTEDTE, A. SCHEEL, G. SCHNEIDER, The dynamics of modulated wave trains, *Mem. Amer. Math. Soc.* 199 (2009), no. 934.
- [22] R. DRESSLER, Mathematical Solution of the problem of Roll Waves in inclined open channels, *Comm. Pure Appl. Math.* 2 (1949), p. 149-194.
- [23] J. EDLER AND P. HAMM, Self-trapping of the amide I band in a peptide model crystal, *J. Chem. Phys.* 117, 2415-2424 (2002).
- [24] R.A. GARDNER, On the structure of the spectra of periodic travelling waves, *J. Math. Pures Appl.*(9) 72 (1993), no. 5, p. 415-439.
- [25] R.A. GARDNER, Spectral analysis of long wavelength periodic waves and applications, *J. Reine Angew. Math* 491, (1997), pp. 149-181.
- [26] J.-F. GERBEAU, B. PERTHAME, Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow-Water : Numerical Validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, (2001), 89-102.
- [27] J. HÄRTERICH Existence of rollwaves in a viscous shallow water equation, *EQUADIFF 2003* (2005) 511-516.

- [28] M. HALONEN ET AL. Vibrational energy localization in the stretching vibrational ( $1000A_1/F_2$ ) ( $2000A_1/F_2$ ) and ( $3000A_1/F_2$ ) band systems in  $^{120}\text{SnD}_4$ , *J. Chem. Phys.* 108, 9285-9290 (1998).
- [29] H. ITO, Best Constants in Körn-Poincaré's Inequalities on a Slab, *Math. Methods in the Applied Sciences*, 17 (1994), p. 525-549.
- [30] S. JIN, M.A. KATSOULAKIS, Hyperbolic Systems with Supercharacteristic Relaxations and Roll Waves, *SIAM J. Appl. Math.* 61 (2000), no. 1, p. 273-292.
- [31] I.L. KLIAKHANDLER, Long interfacial waves in multilayer thin films and coupled Kuramoto-Sivashinsky equations, *J. Fluid. Mech.* 391 (1999) p. 45-65.
- [32] B. ALVAREZ-SAMANIEGO, D. LANNES, Large time existence for 3D water-waves and asymptotics *Invent. Math.* 171 (2008), no. 3, p. 485-541.
- [33] B. ALVAREZ-SAMANIEGO, D. LANNES, A Nash-Moser theorem for singular evolution equations. Application to the Serre and Green-Naghdi equations. *Indiana Univ. Math. J.* 57 (2008), no. 1, p. 97-131.
- [34] R. LIVI, M. SPICCI AND R.S. MACKAY, Breathers on a diatomic FPU chain, *Nonlinearity* 10, 1421-1434 (1997).
- [35] R.S. MACKAY, S. AUBRY, Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators, *Nonlinearity* 7, 1623-1643 (1994).
- [36] R.S. MACKAY, Defects in solids, large molecules and space structures, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 456, 1883-1895 (2000).
- [37] R.S. MACKAY, Optic discrete breathers in Euclidean invariant systems, *I. J. Nonlin. Sci. Num. Sim.* 1, 99-103 (2000).
- [38] A. MAJDA, The stability of multidimensional shock fronts, *Memoirs Amer Math Soc*, vol. 275, 1983.
- [39] D. MANDELIK ET AL. Observation of mutually-trapped multi-band optical breathers in waveguide arrays, *Phys. Rev. Lett.* 90, 253902 (2003).
- [40] M.E. MANLEY ET AL. Formation of a new dynamical mode in  $\alpha$ -uranium observed by inelastic X-ray and neutron scattering, *Phys. Rev. Lett.* 96, 125501 (2006).
- [41] F. MARCHE Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects, *Eur. J. Mech. B Fluids* 26 (2007), no. 1, 49-63.
- [42] G. MÉTIVIER, Stability of multidimensional shocks; Advances in the theory of shock waves, *volume 47 of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, p.25-103. Birkhauser Boston, Boston, MA, 2001.
- [43] K.R. MEYER, Periodic solutions of the  $N$ -body problem, *Lecture notes in mathematics* 1719, Springer-Verlag (1999).

- [44] F.J. MUÑOZ-ALMARAZ ET AL. Continuation of periodic orbits in conservative and Hamiltonian systems, *Physica D* 181, 1-38 (2003).
- [45] D J. NEEDHAM J H. MERKIN : On Roll-Waves down an open inclined channel. *Proc. R. Soc. Lond.* A394, pp259-278, 1984.
- [46] P. NOBLE Méthodes de variétés invariantes pour les équations de Saint Venant et les systèmes Hamiltoniens discrets, *Ph. D. Thesis, University Paul Sabatier Toulouse 3 (2003) (french)*.
- [47] C.-O. NG, C.C. MEI, Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid, *J. Fluid Mech.* 263 (1994) p. 151-183.
- [48] T. NISHIDA, Y. TERAMOTO, H.A. WIN, Navier-Stokes flows down an inclined plane : downward periodic motion, *J. Math. Kyoto Univ.* 33-3 (1993), p. 787-801.
- [49] M. OH, K. ZUMBRUN, Stability of periodic solutions of conservation laws with viscosity : analysis of the Evans function, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 166 (2003), no. 2, p. p. 99-166.
- [50] M. OH, K. ZUMBRUN, Stability of periodic solutions of conservation laws with viscosity : pointwise bounds on the Green function, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 166 (2003), no. 2, p. 167-196.
- [51] M. OH, K. ZUMBRUN, Stability and asymptotic behavior of periodic travelling wave solutions of viscous conservation laws in several dimensions *Preprint* 2008.
- [52] A. ORON, S.H. DAVIS, S.G. BANKOFF, Long-scale evolution of thin fluid film, *Rev. Mod. Phys.* 69 (1997), p. 931-980.
- [53] J.-M. PIAU, Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane, *Journal of Rheology* 40 (1996) no. 4, p. 711-723.
- [54] J.D.D. ZABSONRÉ, G. NARBONA-REINA Existence of global weak solution for a 2D viscous bi-layer shallow water model. *Nonlinear Anal. Real World Appl* 10 (2009), no. 5, 2971-2984.
- [55] F. ROUSSET Viscous approximation of strong shocks of systems of conservation laws, *SIAM J. Math. Anal.* 35 (2003), no 2, p. 492-519.
- [56] C.RUYER-QUIL, P. MANNEVILLE, Modeling film flows down inclined plane, *Eur. Phys. J. B* 6 (1998), p. 277-298.
- [57] C. RUYER-QUIL, P. MANNEVILLE, Improved modeling of flows down inclined plane, *Eur. Phys. J. B* 15 (2000), p. 357-369.
- [58] M. SATO ET AL, Study of intrinsic localized vibrational modes in micromechanical oscillator arrays, *Chaos* 13, 702-715 (2003).
- [59] D.S. SCHMIDT. Hopf's bifurcation theorem and the center theorem of Liapunov, *The Hopf bifurcation theorem and its applications, J.E. Marsden and M. McCracken ed., Applied Math. Sc.* 19, Springer, New York, 95-104 (1976).

- [60] U.T. SCHWARZ, L.Q. ENGLISH, AND A.J. SIEVERS, Experimental generation and observation of intrinsic localized spin wave modes in an antiferromagnet, *Phys. Rev. Lett.* 83, 223-226 (1999).
- [61] A.C. SCOTT., Nonlinear Science : Emergence and Dynamics of Coherent Structures, *Second edition, Oxford University Press, Oxford (2003)*.
- [62] V.Y SHKADOV, Wave conditions in the flow of a thin layer of a viscous liquid under the action of gravity *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaza* 2 (1967), p.43-51.
- [63] J.-A. SEPULCHRE, R.S. MACKAY. Localized oscillations in conservative or dissipative networks of weakly coupled autonomous oscillators, *Nonlinearity* 10, 679-713 (1997).
- [64] D. SERRE, Spectral stability of periodic solutions of viscous conservation laws : large wavelength analysis, *Comm. Partial Differential Equations* 30 (2005), no. 1-3, p. 259-282.
- [65] A.J. SIEVERS AND S. TAKENO, Intrinsic localized modes in anharmonic crystals, *Phys. Rev. Lett.* 61, 970-973 (1988).
- [66] R. TEMAM, M. ZIANE, Navier Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions, *Adv. in Diff. Equation*, 1 (1996), no. 4, p. 499-546.
- [67] Y. TERAMOTO, On the Navier–Stokes Flows Down an Inclined Plane, *J. Math. Kyoto Univ.*, 32-3 (1992), p. 593-619.
- [68] H. UECKER, Self-Similar Decay of Spatially Localized Perturbations of the Nusslet Solutions for the Inclined Film Problem, *Arch. Rational Mech. Anal.* 184 (2007), p. 401-447.
- [69] A.J. SIEVERS AND S. TAKENO, Intrinsic localized modes in anharmonic crystals, *Phys. Rev. Lett.* 61, 970-973 (1988).
- [70] J.-P. VILA, A two moments closure of shallow water type for gravity driven flows, *in preparation*.
- [71] G.B. WHITHAM : Linear and NonLinear waves, *Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York, 1974*.