Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Option: M2AO 2007-2008

Série n°2 :
Résolution numériques des EDO.

Exercice 1. Propriétés de stabilité du schéma d'Euler

a) Un schéma d'Euler implicite Montrer que le schéma suivant est convergent et d'ordre un

$$\begin{cases} u^{n+1} \;=\; u^n \;+\; h\, f(t^{n+1}, u^{n+1}), \\ u^0 \;=\; u_0. \end{cases}$$

b) Un schéma d'Euler modifié Montrer que le schéma suivant est convergent et d'ordre deux

$$\begin{cases} u^{n+1/2} \;=\; u^n \;+\; \dfrac{h}{2}\, f(t^n, u^n), \\[2ex] u^{n+1} \;=\; u^n \;+\; h\, f(t^{n+1/2}, u^{n+1/2}), \quad t^{n+1/2} = t^n + h/2, \\[2ex] u^0 \;=\; u_0. \end{cases}$$

c) Application. Soit l'équation différentielle ($k > 0$)

$$y' + k\, y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$$

(i) Résoudre cette équation différentielle. Quelle est sa limite en $t \to \infty$?

(ii) Écrire le schéma d'Euler explicite et étudier le comportement de la solution lorsque n tend vers l'infini.

(iii) On considère le schéma

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} \;+\; k\, \left(\frac{y^{n+1} + y^n}{2}\right)^2 \;=\; 0.$$

Calculer la solution y^{n+1} en fonction de y^n k et Δt et en déduire une condition sur Δt pour que le comportement de la solution numérique soit correct lorsque $n \to \infty$. Montrer que le schéma est consistant d'ordre deux.

Exercice 2. Un nouveau schéma d'ordre élevé

Soit f une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous considérons l'équation différentielle ordinaire suivante

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

avec une donnée initiale $u(0) = u_0$.

Nous définissons $f^{(m)} \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\begin{cases} f^{(0)}(t, u(t)) \;=\; f(t, u(t)) \\ f^{(m+1)}(t, u(t))) \;=\; \dfrac{\partial f^{(m)}}{\partial t}(t, u(t)) + \left(\dfrac{\partial f^{(m)}}{\partial u}(t, u(t))\right) f(t, u(t)), \quad m \geq 0. \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que $u^{(m+1)}(t) = f^{(m)}(t, u(t))$.

b) Nous posons

$$\psi_p(t, u, \Delta t) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\Delta t^j}{(j+1)!} f^{(j)}(t, u)$$

et définissons le schéma suivant

$$\begin{cases} u^0 = u_0 \\ u^{n+1} = u^n + \Delta t \, \psi_p(t^n, u^n, \Delta t) \end{cases}$$

Montrer que ce schéma est consistant d'ordre p

c) Montrer que le schéma est stable et en déduire que le schéma est convergent d'ordre p, c'est-à-dire, il existe $C > 0$ telle que

$$|u(t^n) - u^n| \leq C \, \Delta t^p.$$

Exercice 3. Un schéma d'ordre deux

Soit f une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous considérons l'équation différentielle ordinaire suivante

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

avec une donnée initiale $u(0) = u_0$. Nous nous proposons d'étudier le schéma suivant

$$\begin{cases} u^0 = u_0 \\ u^{n+1} = u^n + \dfrac{\Delta t}{2} \left(f(t^n, u^n) + f(t^{n+1}, u^n + \Delta t \, f(t^n, u^n)) \right). \end{cases}$$

a) Montrer que ce schéma est consistant d'ordre deux.

b) Montrer que le schéma est stable et en déduire que ce schéma est convergent d'ordre deux.

Exercice 4. Les schémas de type Runge-Kutta

Nous considérons $b_1, b_2, c_1, c_2, a \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq 1$. Puis nous introduison des points intermédiaires:

$$t^{n,i} = t^n + c_i \, h, \quad i = 1, 2$$

et des valeurs intermédiaires

$$u^{n,1} = u^n, \qquad u^{n,2} = u^n + h \, a \, f(t^{n,1}, u^{n,1})$$

Considérons alors le schéma suivant de Runge-Kutta explicite à deux points intermédiaires:

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{2} b_j \, f(t^{n,j}, u^{n,j}), \\ \\ u^0 = u_0. \end{cases}$$

a) Quelles valeurs de coefficients faut-il choisir pour avoir un schéma d'ordre un et deux ?

b) Le schéma d'Euler modifié entre-t-il dans ce cadre?

1 Correction des exercices

Exercice 1.

Soit un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(t) = f(t, u(t)), \end{cases} \tag{1}$$

La solution u vit sur l'intervalle $[0, T]$. Nous décomposons en N petits sous-intervalles $[t^n, t^{n+1}]$ avec $t^n = n\,\Delta t$ et $\Delta t = T/N$. On note v^n la solution approchée de $u(t^n)$; les schémas à un pas s'écrivent Nous définissons un schéma à un pas pour la résolution numérique de (1) de la manière suivante :

$$\begin{cases} v^0 = u(t^0) \\ v^{n+1} \;=\; v^n \;+\; \Delta t\;\phi(t^n, v^n, \Delta t), \end{cases} \tag{2}$$

où ϕ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et est obtenue en cherchant une approximation de $f(t^n, u(t^n))$.

Nous chercherons de plus à évaluer l'erreur de discrétisation $e^n = u(t^n) \,-\, v^n$, et plus précisément, à obtenir des estimations d'erreur de la forme

$$|e^n| = |u(t^n) \,-\, v^n| \;\leq\; C\,\Delta t^\alpha,$$

où C ne dépend que de la solution exacte, du temps final T mais surtout pas du pas de temps Δt; tandis que α donne l'ordre de la convergence.

Proposition 1 (Caractérisation de la consistance) *Considérons le schéma à un pas (2) associé à l'équation différentielle (1). Si la fonction* $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *et si*

$$\phi(t, u, 0) \;=\; f(t, u), \quad t \in [0, T].$$

Alors, le schéma (2) est consistant.

Proposition 2 (Caractérisation de la stabilité) *Considérons le schéma à un pas (2) associé à l'équation différentielle (1). Si la fonction* $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ *et si*

$$\|\phi(t, u, \Delta t) - \phi(t, v, \Delta t)\| \;\leq\; \Gamma\,\|u - v\|$$

Alors, le schéma (2) est stable.

Théorème 1 (Consistance + Stabilité ⇔ Convergence) *Nous supposons que le schéma (2) est consistant d'ordre p : il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de f, T, u_0 (et surtout pas de Δt) telle que*

$$\|R(t, u, \Delta t)\| \;\leq\; C\,\Delta t^p, \;\; \textit{pour tout } t \geq 0.$$

De plus, le schéma (2) est "stable" par rapport aux erreurs.

Alors, la solution numérique fournie par le schéma converge vers la solution exacte de (1). De plus, l'erreur vérifie l'estimation

$$\|e^n(\Delta t)\| \;\leq\; C\,\left[\Delta t^p \;+\; \|e^0(\Delta t)\|\right],$$

pour tout $n = 0, ..., N$.

Exercice 2.

1. Nous vérifions que

$$u^{(1)}(t) \;=\; u'(t) \;=\; f(t, u(t)) \;=\; f^{(0)}(t, u(t)).$$

Nous supposons que l'assertion est vraie à l'ordre m c'est-à-dire que

$$u^{(m)}(t) = f^{(m-1)}(t, u(t)).$$

Montrons alors que $u^{(m+1)}(t) = f^{(m)}(t, u(t))$. Pour cela, nous écrivons que

$$u^{(m+1)}(t) \;=\; (u^{(m)}(t))' \;=\; \frac{d}{dt} u^{(m)}(t) = \frac{d}{dt}\left(f^{(m-1)}(t, u(t)) \right)$$

Ainsi par composition des dérivées

$$u^{(m+1)}(t) \;=\; \frac{\partial f^{(m-1)}}{\partial t}(t, u(t)) + u'(t)\, \frac{\partial f^{(m-1)}}{\partial u}(t, u(t))$$

et puisque $u'(t) = f(t, u(t))$, nous obtenons

$$u^{(m+1)}(t) \;=\; f^{(m)}(t, u(t)).$$

2. Nous posons $\phi(t, u, \Delta t) = \psi_p(t, u, \Delta t)$, c'est un schéma à un pas explicite. Pour démontrer la consistance nous vérifions que ϕ est continue et $\phi(t, u, 0) = f(t, u)$.

En effet, puisque f est de classe $C^\infty(I\!R^+ \times I\!R, I\!R)$, la fonction ϕ qui contient les dérivées jusqu'à l'ordre p de f est bien continue. Ensuite

$$\phi(t, u, 0) = \frac{0^0}{1!} f^{(0)}(t, u) = f(t, u).$$

Le schéma est bien consistant.

Pour l'ordre, nous calculons

$$R(t, u, h) = \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \phi(t, u(t), h)$$

En remplaçant ϕ par son expression, nous avons

$$\phi(t, u(t), h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\Delta t^j}{(j+1)!}\, f^{(j)}(t, u(t))$$

Or, nous avons vu que pour la solution exacte $u^{(m+1)}(t) = f^{(m)}(t, u(t))$, donc en remplaçant, nous obtenons

$$\phi(t, u(t), h) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!}\, u^{(j+1)}(t)$$

Et donc

$$R(t, u, h) = \frac{1}{h} \left(u(t+h) - u(t) - \sum_{j=1}^{p} \frac{h^j}{j!}\, u^{(j)}(t) \right).$$

Ceci représente un développement de Taylor tronquée de u et nous savons que

$$u(t+h) = u(t) - \sum_{j=1}^{p} \frac{h^j}{j!}\, u^{(j)}(t) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\, u^{(p+1)}(\xi).$$

En remplaçant dans l'expression de R, nous avons donc

$$R(t, u, h) = \frac{h^p}{(p+1)!}\, u^{(p+1)}(\xi),$$

En supposant que $u^{(p+1)}$ est bornée, nous avons donc: il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|R(t, u, h)| \;\leq\; C h^p,$$

le schéma est d'ordre p.

2. Pour la stabilité, il faut supposer que f est de classe C^∞ et que toutes ses dérivées sont bornées. Ainsi, toutes les fonctions $f^{(j)}$, pour $j = 0, \ldots, p$ sont Lipschitziennes et donc ϕ est Lipschitzienne par rapport à la variable u. Le schéma est donc stable.

En appliquant le théorème du cours, le schéma est convergent d'ordre p, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u(t^n) - u^n| \le Ch^p.$$

Exercice 3.

1. Pour la consistance, nous appliquons le même raisonnement que dans l'exercice précédent. Pour montrer que le schéma est d'ordre deux, c'est différent. C'est aussi un schéma à un pas

$$\phi(t, u, h) = \frac{1}{2}\left(f(t, u) + f(t + h, u + h\, f(t, u))\right).$$

Le schéma est d'ordre deux lorsque

$$R(t, u, h) = \frac{u(t + h) - u(t)}{h} - \frac{1}{2}\left(f(t, u(t)) + f(t + h, u(t) + h\, f(t, u(t)))\right)$$

vérifie

$$|R(t, u, h)| \le C\, h^2.$$

Pour montrer cela nous rappelons que puisque u est la solution exacte

$$\frac{u(t + h) - u(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s, u(s))ds.$$

Or, nous avons vu que nous pouvons construire un schéma à partir d'une méthode de quadrature. Par exemple ici nous reconnaissons presque la méthode des trapèzes, d'après un résultat du cours :

$$\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s, u(s))ds - \frac{1}{2}\left(f(t, u(t) + f(t + h, u(t + h))\right)\right| \le Ch^2$$

Or, ce n'est pas exactement le schéma proposé car il faut encore approcher $f(t + h, u(t + h))$. À l'aide d'un développement de Taylor, nous obtenons

$$u(t + h) = u(t) + hf(t, u(t)) + \frac{h^2}{2}u''(\xi), \quad \xi \in [t, t + h]$$

et donc

$$f(t + h, u(t + h)) = f(t + h, u(t) + hf(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t + h, \alpha)\, \frac{h^2}{2}u''(\xi).$$

Finalement, nous avons

$$\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s, u(s))ds - \frac{1}{2}\left(f(t, u(t) + f(t + h, u(t) + hf(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t + h, \alpha)\, \frac{h^2}{2}u''(\xi)\right)\right| \le Ch^2.$$

Nous reconnaissons le terme d'erreur de consistance

$$\left|R(t, u, h) - \frac{\partial f}{\partial u}(t + h, \alpha)\, \frac{h^2}{2}u''(\xi)\right| \le C\, h^2$$

et donc en suppsoant que f est Lipschitzienne et u'' est bornée, nous obtenons le résultat

$$|R(t, u, h)| \le C_2\, h^2.$$

2. Nous appliquons le même raisonnement que dans l'exercice précédent.