Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

T.D. Série n 6:
Transformée de Laplace: exercices supplémentaires

Exercice 1 (Résolution d'équations différentielles scalaires).

Résoudre les équations linéaires scalaires:

1. $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y' - y = t^2 e^t$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ et $y''(0) = -2$
2. $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
3. $y'' + 4y' + 4y = t^4 e^{-2t}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$
4. Résoudre l'équation de la question 3 avec les conditions initiales $y(0) = -y'(0) = 2$.
5. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{-t}(3t + 4)$ avec $y(0) = -1$ et $y'(0) = -2$

Exercice 2 (Résolution de systèmes différentiels).

1. $x'(t) = x(t) + 5y(t), \quad y'(t) = x(t) - 3y(t)$ avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$,
2. $x'(t) = 2x(t) - y(t) + f(t), \quad y'(t) = -x(t) + 2y(t) + g(t)$ avec $f, g \in C^1(\mathbb{R})$,
3. $x''(t) = y(t), \quad y''(t) = x(t)$ avec $x(0) = y(0 = 0$ et $x'(0) = y'(0) = 1$,
4. $x'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 1, \quad y'(t) = 4x(t) + y(t) + 2$ avec $x(0) = y(0) = 1$

Exercice 3 (Calcul d'une TL à l'aide d'une EDO).

On note $f_n(t) = \sin^n t$ et F_n sa transformée de Laplace

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $f_n''(t) = n(n-1)f_{n-1} - n^2 f_{n-2}$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a $(n^2 + p^2)F_n(p) = n(n-1)F_{n-2}(p)$;
3. Donner la valeur de $F_n(p)$.