Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

Licence Science et Technologie
Spécialité Mathématiques
Option: Calcul différentiel 2009-2010

Série 6:
Différentielles d'ordre ≥ 2 et formule de Taylor

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2\, y^2 + z^4, y\, e^x)$.
Calculer $d^3\, f(x, y, z)((\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), (\xi_3, \eta_3, \zeta_3))$.

Exercice 2.

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $< . , . >$ et de la norme associée $\|.\|$. On posera pour simplifier l'écriture, $f(x) = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(i) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que f n'est pas différentiable en 0.

(ii) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $df_x(u)$, $d^2\, f_x(u, v)$, $d^3\, f_x(u, v, w)$.

(iii) Les applications $x \mapsto \sin\, f(x)$ et $x \mapsto \cos\, f(x)$ sont-elles de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3.

On dit qu'une partie C d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un cône si, $\forall x \in C$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha\, x \in C$. On dit qu'une application f d'un cône C de E dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F est homogène de degré $m \in \mathbb{R}$ si $\forall x \in C$, $\forall t > 0$, $f(tx) = t^m f(x)$.

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés.

(i) Soit C un cône ouvert de E et $f : C \to F$ une application homogène de degré $m \in \mathbb{R}$, différentiable sur C. Montrer que l'application $df : C \to \mathcal{L}(E, F)$ est homogène de degré $m - 1$.

(ii) Soit $f : E \to F$ une application homogène de degré $m \in \mathbb{N}^*$ et de classe $\mathcal{C}^m$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $d^n\, f = 0$ si $n > m$.

(iii) Soit $f : E \to F$ une application homogène de degré $m \in \mathbb{N}^*$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(a) Montrer que $d^p\, f_0 = 0$ si $1 \leq p < m$.

(b) Montrer que $d^m\, f_x(x, ..., x) = m!\, f(x)$, $\forall x \in E$. Indication: considérer, pour $x \in E$ fixé, la fonction $G : \mathbb{R} \to F$ définie par $G(t) = f(tx)$ et montrer par récurrence sur

$p \in \{1, ..., m\}$ que $G^{(p)}(t) = d^p\, f_{tx}(x, ..., x)$.

Exercice 4.

Soit E un espace normé et $f\,:\,E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur E telle que $f(x) > 0$, $\forall x \in E$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\|d^2\, f_x\| \leq M$, $\forall x \in E$.

(i) Montrer que si $h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, $\forall x \in E$, $0 < f(x) + \lambda\, df_x(h) + \frac{\lambda^2}{2} M \|h\|^2$. Indication: appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f entre x et $x + \lambda\, h$.

(ii) En déduire que $\|df_x\| \leq \sqrt{2M\, f(x)}$, $\forall x \in E$.

Exercice 5.

Soit E un espace normé et U une ouvert convexe de E. On dit qu'une fonction $g\,:\,U \to \mathbb{R}$ est convexe si, $\forall (a, b) \in U^2$, $\forall t \in [0\,,\,1]$,

$$g(t\, a + (1 - t)\, b) \leq\; t\, g(a) + (1 - t)\, g(b).$$

Soit $f\,:\,U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

(i) On suppose que f est convexe. Soit $(x, y) \in U^2$. On remarquera que l'on peut définir sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 l'application $t \mapsto \Phi(t) = f(y + t(x - y))$. Montrer que $\Phi'(0) \leq\; f(x) - f(y)$ et en déduire que

$$f(x) - f(y) \geq d\, f_y(x - y). \tag{0.1}$$

(ii) On suppose que f vérifie l'inégalité (0.1) pour tout $(x, y) \in U^2$. Montrer que f est convexe.

(iii) On suppose f de classe C^2 sur U.

(a) Montrer que si $d^2\, f_x(h, h) \geq 0$, $\forall x \in U$, $\forall h \in E$, f est convexe (utiliser la formule de Taylor avec reste intégral).

(b) Réciproquement, si f est convexe, montrer que $d^2\, f_x(h, h) \geq 0$, $\forall x \in U$, $\forall h \in E$. (Raisonner par l'absurde et utiliser la formule de Taylor Young).

Exercice 6.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ d'un ouvert Ω d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. On suppose qu'il existe des applications L_k, k-linéaires continues symétriques de E^k dans F pour $k = 1, .., m$ et L_0 dans F tel que

$$f(a + h) = L_0 + L_1.h + \frac{1}{2!} L_2.(h, h) + ... + \frac{1}{m!} L_m.(h, ..., h) + \alpha(h)\|h\|^m,$$

où $\alpha(h) = o(\|h\|)$ lorsque h tend vers 0.

(i) On pose $A_k = L_k - d^k f_a$. Montrer par récurrence et en utilisant la formule de Taylor Young en $a + th$ et a que pour tout $h \in E$, $A_k.(h, ..., h) = 0$.

(ii) En déduire que pour tout $(h_1, ..., h_k) \in E^k$, $A_k.(h_1, ..., h_k) = 0$. (on utilisera la fonction polynomiale $P(t_1, ..., t_k) = A_k.(h, ..., h)$ avec $h = t_1 h_1 + ... + t_k h_k$ et on identifiera le coefficient en $t_1 t_2 ... t_k$.

(iii) Soit Isom(E) l'ensemble des isomorphismes d'un espace de Banach E, on rappelle que c'est un ensemble ouvert de $\mathcal{L}(E)$. On rappelle que $\Phi(u) = u^{-1}$ est une application de classe C^1 sur Isom(E) et $d\Phi_u(h) = -u^{-1} h u^{-1}$.

(a) Montrer par récurrence que Φ est de classe C^∞.

(b) Montrer que pour h suffisamment petit,

$$(u + h)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (u^{-1} h)^k u^{-1}.$$

(c) En déduire en utilisant le résultat de la question (ii) que

$$d^p \Phi_u.(h_1, ..., h_p) = (-1)^p \sum_{\sigma \in S_p} u^{-1} h_{\sigma(1)} u^{-1} h_{\sigma(2)} ... u^{-1} h_{\sigma(p)} u^{-1},$$

où S_p désigne le groupe des permutations de $\{1...p\}$.