Espèces et Représentations du groupe symétrique

Bérénice Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)

Vendredi 31 Mai 2013

Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition

À un ensemble fini I, l'espèce F *associe un ensemble fini* F(I) *indépendant de la nature de I.*

Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage

Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition

À un ensemble fini I, l'espèce F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de I.*

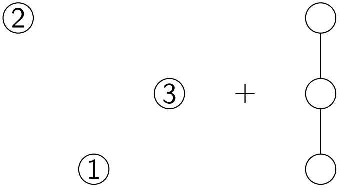
Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage

Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition

À un ensemble fini I, l'espèce F *associe un ensemble fini* $\mathsf{F}(I)$ *indépendant de la nature de I.*

Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage

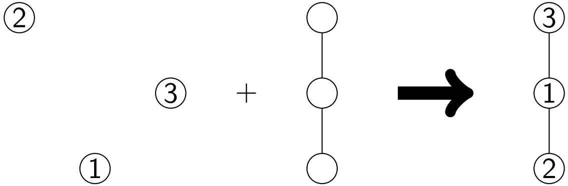


Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition

À un ensemble fini I, l'espèce F *associe un ensemble fini* F(I) *indépendent de la nature de I.*

Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage



Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition

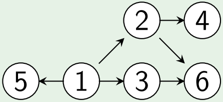
À un ensemble fini I, l'espèce F *associe un ensemble fini* $\mathsf{F}(I)$ *indépendant de la nature de I.*

Espèce $=$ plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage

Contre-exemples

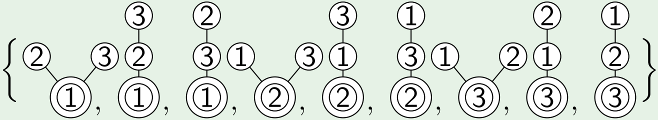
Les ensembles ci-dessous ne sont **pas** les images d'un ensemble par une espèce :

- $\{(1,\mathbf{3},2),(2,1,\mathbf{3}),(2,\mathbf{3},1)(3,1,\mathbf{2})\}$(ensemble des permutations de $\{1,2,3\}$ avec exactement 1 élément plus grand que l'élément précédent)
- (graphe de divisibilité de $\{1,2,3,4,5,6\}$)



Exemples

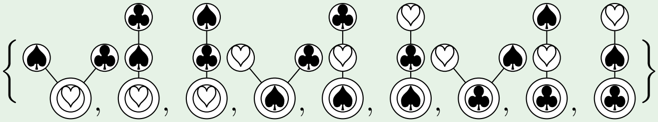
Les ensembles ci-dessous sont des images par des espèces de l'ensemble $\{1,2,3\}$.

- $\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ (espèce des listes sur $\{1,2,3\}$)
- $\{\{1,2,3\}\}$ (espèce des ensembles non vides Comm)
- 

(espèce des arbres enracinés)

Exemples

Les ensembles ci-dessous sont des images par des espèces de l'ensemble $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

- $\{(\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit), (\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit), (\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit), (\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit)\}$ (espèce des listes sur $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$)
- $\{\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles non vides Comm)
-  (espèce des arbres enracinés)

Opérations sur les espèces

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)

Opérations sur les espèces

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)

Exemple : produit par l'espèce des singletons

Soit F une espèce et X, l'espèce des singletons :

$$X(V) = V \text{ si } |V| = 1, \emptyset \text{ sinon.}$$

Le produit est donné par :

$$X \times F(I) = \sum_{i \in I} \{i\} \times F(I - \{i\}).$$

Opérations sur les espèces

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F + G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)

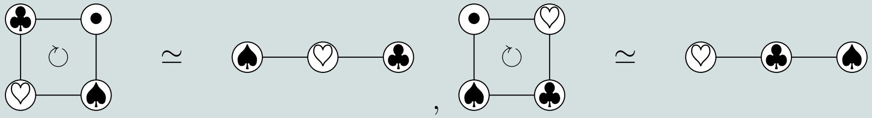
Opérations sur les espèces

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)

Exemple : dérivée de l'espèce des cycles pour $I = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$



Opérations sur les espèces

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F \circ G)(I) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ décrit l'ensemble des partitions de I.

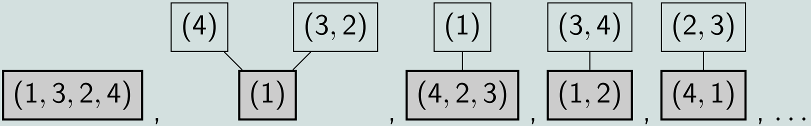
Opérations sur les espèces

Proposition

Soient F et G, deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être effectuées dessus :

- $(F+G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$, (addition)
- $(F \times G)(I) = \sum_{I_1 \sqcup I_2 = I} F(I_1) \times G(I_2)$, (produit)
- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$, (dérivée)
- $(F \circ G)(I) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$, (substitution) où $\mathcal{P}(I)$ décrit l'ensemble des partitions de I.

Exemple de substitution : Arbres enracinés de listes sur $I = \{1, 2, 3, 4\}$



Série génératrice

Définition

À une espèce F, on associe sa série génératrice :

$$C_F(x) = \sum_{n \geq 0} \#F(\{1, \ldots, n\}) \frac{x^n}{n!}.$$

Exemples de séries génératrices :

- La série génératrice de l'espèce des listes est $C_{\mathrm{Assoc}} = \frac{1}{1-x}$.
- La série génératrice de l'espèce des ensembles non vides est $C_{\mathrm{Comm}} = \exp(x) - 1$.
- La série génératrice de l'espèce singleton est $C_{\mathrm{X}} = x$.

Exemple des arbres enracinés

Proposition

Soit $\mathcal{A}$, l'espèce des arbres enracinés, elle vérifie :

$$\mathcal{A} = \mathrm{X} + \mathrm{X} \times \mathrm{Comm} \circ \mathcal{A}.$$

En passant aux séries génératrices, on obtient :

$$C_{\mathcal{A}} = x + x \times (\exp(C_{\mathcal{A}}) - 1) = xe^{C_{\mathcal{A}}}.$$

Opérations sur les séries génératrices

Proposition

Soit F et G deux espèces. Leurs séries génératrices vérifient :

- $C_{F'} = C'_F$,
- $C_{F+G} = C_F + C_G$,
- $C_{F\times G} = C_F \times C_G$,
- $C_{F\circ G} = C_F \circ C_G$.

Définition

L' indice cyclique d'une espèce F est la série formelle en une infinité de variables $\mathfrak{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ definie par :

$$Z_F(\mathfrak{p}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} F^\sigma p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} p_3^{\sigma_3} \ldots \right),$$

- *avec F^σ, le nombre de F-structures fixées par l'action de σ,*
- *et σ_i, le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition en cycles disjoints de σ.*

Exemples

- L'indice cyclique de l'espèce des listes est $Z_{\text{Assoc}} = \frac{1}{1-p_1}$.
- L'indice cyclique de l'espèce des ensembles non vides est $Z_{\text{Comm}} = \exp(\sum_{k\geq 1} \frac{p_k}{k}) - 1$.
- L'indice cyclique de l'espèce singleton est $Z_{\text{X}} = p_1$.

Opérations

Les opérations sur les espèces se traduisent en opérations sur l'indice cyclique :

Proposition

Soient F et G deux espèces. Leurs indices cycliques vérifient :

$$\begin{aligned} Z_{F+G} &= Z_F + Z_G, & Z_{F\times G} &= Z_F \times Z_G, \\ Z_{F\circ G} &= Z_F \circ Z_G, & Z_{F'} &= \frac{\partial Z_F}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

Définition

La suspension Σ d'une fonction symétrique $f(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ est définie par :

$$\Sigma f = -f(-p_1, -p_2, -p_3, \ldots) = -f \circ -p_1.$$

Retour sur les arbres enracinés

Proposition

Soit $\mathcal{A}$, l'espèce des arbres enracinés, elle vérifie :

$$\mathcal{A} = \mathsf{X} + \mathsf{X} \times \mathsf{Comm} \circ \mathcal{A}.$$

En passant aux indices cycliques, on obtient :

$$Z_{\mathcal{A}} = p_1 \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{p_k}{k}\right) \circ Z_{\mathcal{A}}$$

cf. page sage

Merci de votre attention !