Code de Prüfer pour les hyperarbres

Bérénice Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)

Mercredi 29 Janvier 2014
Journées nationales du GDR IM

L'échange de doctorantes

- V. Pons : une semaine à l'institut Camille Jordan (Lyon) en septembre 2013 (Lyon)
- B. O. : une semaine au laboratoire Gaspard-Monge (Marne-la-vallée) en mai 2013

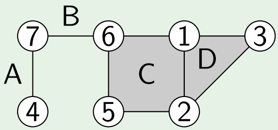
Hypergraphes et hyperarbres

Définition

Un hypergraphe (sur un ensemble V) est un couple (V, E) où :

- *V est un ensemble fini, (sommets)*
- *E est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de V, $\mathcal{P}(V)$. (arêtes)*

Exemple d'hypergraphe sur $[1;7]$



Marche sur un hypergraphe

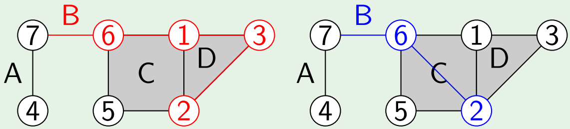
Définition

Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe.
Une marche d'un sommet ou d'une arête d vers un sommet ou une arête f de H est une suite alternée de sommets et d'arêtes, commençant par d et terminant par f :

$$(d, \dots, e_i, v_i, e_{i+1}, \dots, f)$$

où pour tout i, $v_i \in V$, $e_i \in E$ et $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$. La longueur de la marche est le nombre de sommets et d'arêtes de la marche.

Exemples de marches



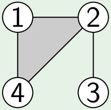
Hyperarbres

Définition

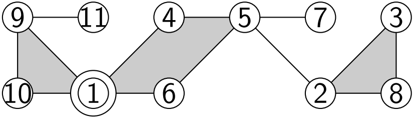
Un hyperarbre est un hypergraphe non trivial H tel que, pour toute paire de sommets distincts v et w de H,

- *il existe une marche de v à w dans H avec des arêtes disjointes e_i (H est connexe),*
- *cette marche est unique (H n'a pas de cycles).*

Exemple d'un hyperarbre



Code de Prüfer pour les hyperarbres

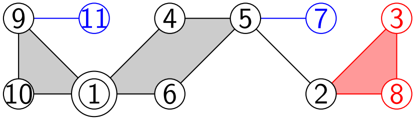


La partition associée est :

$$\{2\}, \{3, 8\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}, \{9, 10\}, \{11\}$$

Le code de Prüfer associé est :

Code de Prüfer pour les hyperarbres

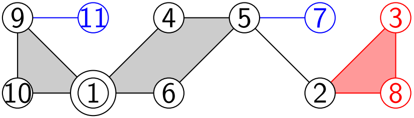


La partition associée est :

$$\{2\}, \{3, 8\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}, \{9, 10\}, \{11\}$$

Le code de Prüfer associé est :

Code de Prüfer pour les hyperarbres



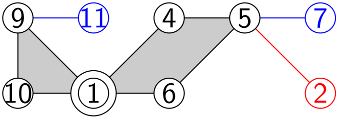
La partition associée est :

$$\{2\}, \{3, 8\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}, \{9, 10\}, \{11\}$$

Le code de Prüfer associé est :

2

Code de Prüfer pour les hyperarbres



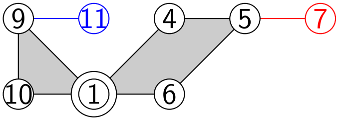
La partition associée est :

$$\{2\}, \{3, 8\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}, \{9, 10\}, \{11\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$2, \mathbf{5}$$

Code de Prüfer pour les hyperarbres



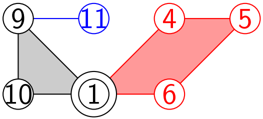
La partition associée est :

$$\{2\}, \{3, 8\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}, \{9, 10\}, \{11\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$2, 5, \mathbf{5}$$

Code de Prüfer pour les hyperarbres



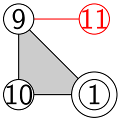
La partition associée est :

$$\{2\}, \{3,8\}, \{4,5,6\}, \{7\}, \{9,10\}, \{11\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$2, 5, 5, \mathbf{1}$$

Code de Prüfer pour les hyperarbres



La partition associée est :

$$\{2\}, \{3, 8\}, \{4, 5, 6\}, \{7\}, \{9, 10\}, \{11\}$$

Le code de Prüfer associé est :

$$2, 5, 5, 1, \mathbf{9}$$

Proposition (Gessel-Kalikow, 2005)

Le nombre d'hyperarbres sur n sommets est :

$$\#\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n-1} S\,(n-1,k)\,n^{k-1},$$

où $S(n,k)$ désigne les nombres de Stirling de seconde espèce.

Collaborations et articles

- F. Chapoton, G. Chatel, V. Pons, *Two bijections on Tamari intervals*,
- B.O., *Hyperarbres décorés et code de Prüfer* et *Hypertree posets and Lego partitions*.

Merci de votre attention !