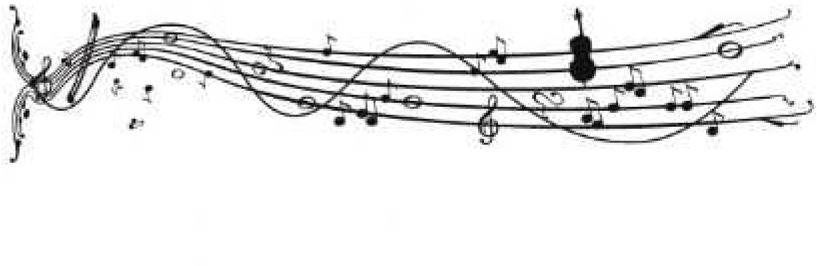
Les transpositions musicales et autres transformations de la gamme



Bérénice Oger

Année scolaire 2007/2008

Sommaire :

J'ai décidé de déterminer les critères de stabilité d'une gamme musicale sous l'action de certaines transformations.

Objectif

Comparer les possibilités offertes par les échelles musicales occidentale et indienne en matière de stabilité par certaines transformations.

I. Présentation et modélisation

1. Du son à la gamme

L'une des caractéristiques d'une onde sonore est sa fréquence. On appelle intervalle le rapport de fréquences entre deux sons, qui est perçu par l'oreille comme une distance.

Deux sons qui ont un rapport de fréquence égal à 2 seront perçus comme identiques. Nous les assimilerons donc à la même note.

On appelera « gamme » un ensemble de notes, nous écartant un peu d'une définition plus historique de la gamme comme liste de notes.

2. Pose du problème

Nous nous placerons dans le cas où il existe n notes différentes, constituant un espace tempéré (ou échelle), toutes séparées par un intervalle constant. Elles constituent donc un espace tempéré égal, ce qui n'est pas le cas dans tous les espaces tempérés.

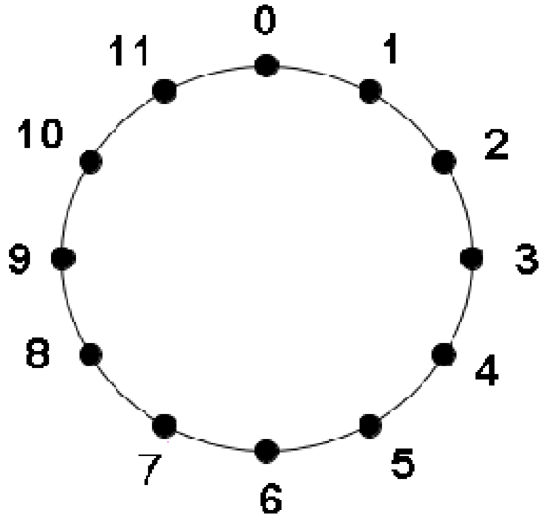
Dès lors un détail peut sembler intriguant : le nombre de notes existantes est différent suivant les régions du monde considérées (il y en a 12 en occident et 22 en Inde)

Problème : Comment peut-on expliquer cette différence ?

La musique indienne repose sur la transformation d'une gamme sous l'action de transpositions (la transposition d'une gamme est la même gamme jouée « plus haut » ou « plus bas ») . Pour répondre à cette question, nous nous intéresserons donc à des propriétés d'invariance des gammes sous l'action de certaines permutations.

3. Modélisation du problème : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et le cercle n-phonique

On assimilera une échelle de n notes tantôt au groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tantôt au groupe U_n des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, représenté sous forme cyclique : le cercle n-phonique.



Ci-dessus : le cercle dodécaphonique (n=12).

Définition : Une transposition peut alors être définie comme :

- une translation de $P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$:

$$f: \quad P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \forall x = (a1, a2, \ldots, ap) \in P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), f(x) = (a1+k, a2+k, \ldots, ap+k)$$

- ou une rotation de $P(U_n)$:

$$f: P(U_n) \to P(U_n)$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \forall x = (e^{i\frac{2(a1)\pi}{n}}, e^{i\frac{2(a2)\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(ap)\pi}{n}}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

$$f(x) = (e^{i\frac{2(a1+k)\pi}{n}}, e^{i\frac{2(a2+k)\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(ap+k)\pi}{n}})$$

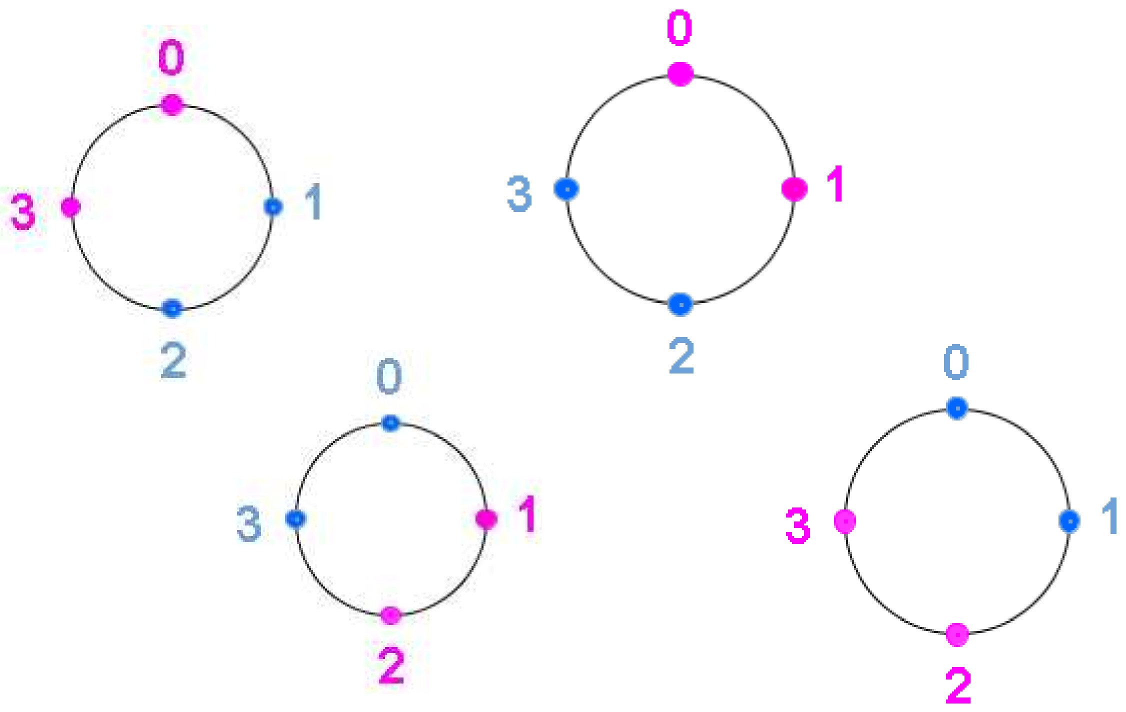
Définition : Considérant f, une permutation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ou de U_n), on appelera mode modulo f, une orbite de f sur $P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (ou de $P(U_n)$), qui est isomorphe à l'ensemble des gammes.

Notons M, l'ensemble des modes.

$$\forall x \in M, \exists e \in P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : x = (e = f^k(e), f(e), f^2(e), \ldots, f^{k-1}(e)), k \in \mathbb{N}$$

On notera alors $x = \bar{e} = w(e)$

On représentera en rose les notes appartenant à la gamme considérée et en bleu celles appartenant à l'échelle, mais n'appartenant pas à la gamme.

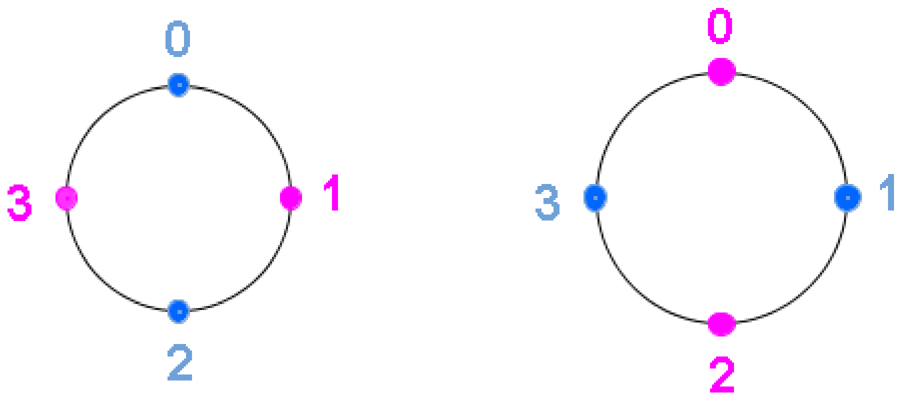


Ci-dessus : Une gamme et ses différentes transpositions dans une échelle de 4 notes. L'ensemble de ces quatre gammes constituent un mode.

Définition : On appelle gamme à transpositions limitées toute gamme e qui a un nombre de transpositions strictement inférieur à n, c'est-à-dire telle que

$$w(e) = \bar{e} = \{ e, f(e), f^2(e), \ldots, f^k(e) \} \text{ avec } k<n-1$$

Ci-dessous : Exemple de gammes à transpositions limitées.



II. Stabilité et variabilité des gammes sous l'action de la transposition

1. Nombre de modes modulo la transposition

Lemme de Burnside (ou Cauchy Frobenius): Soit Γ le groupe des transformations considérées,

Pour tout élément γ de Γ, on définit X_γ ={ $x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ /\gamma(x)=x$ },

alors $Card(M)=\frac{1}{Card(\Gamma)}\times\sum_{\gamma\in\Gamma} Card(X_\gamma)$

où M est l'ensemble des modes modulo la transformation considérée

Preuve : Soient U={ $(\gamma,x)\in\Gamma\times P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\gamma(x)=x$ }, M, l'ensemble des orbites et pour tout x dans P($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), S(x)={ $\gamma\in\Gamma/\gamma(x)=x$ }, le stabilisateur de x.

$$Card(U)=\sum_{\gamma\in\Gamma} Card(X_\gamma)=\sum_{x\in P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} Card(S(x))=\sum_{w\in M}\sum_{x\in w} Card(S(x))$$

or pour tout élément y de w(x), on peut définir $C_y=(\gamma\in\Gamma/\gamma(x)=y)$

et la bijection $C_y\to S(x),\gamma\to\tau^{-1}\gamma,\tau^{-1}\in C_y$ donc $Card(C_y)=Card(S(x))$

donc $Card(\Gamma)=\sum_{y\in w(x)} Card(C_y)=\sum_{y\in w(x)} Card(S(x))=Card(w(x))\times Card(S(x))$

d'où $Card(U)=\sum_{w\in M}\sum_{x\in w} Card\frac{(\Gamma)}{Card(w)}=\sum_{w\in M} Card(\Gamma)=Card(M)\times Card(\Gamma)$

et, finalement, $Card(M)=\frac{1}{Card(\Gamma)}\times\sum_{\gamma\in\Gamma} Card(X_\gamma)$

Théorème : Il y a en tout 2^n gammes

Le nombre de modes à transpositions près vaut d'après le Lemme de Burnside :

$$N=\frac{1}{n}\times\sum_{d|n}\varphi(d)2^{\left(\frac{n}{d}\right)}$$

où φ est la fonction d'Euler

Preuve :

Le nombre de gammes est égal au cardinal de P($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

- Card(Γ)=n

- si x est un élément de Γ alors son ordre divise n (par théorème de Lagrange)

Notant $o(x)$ cet ordre, il y a alors $\frac{n}{o(x)}$ orbites donc possibilités.

- il y a $\varphi(d)$ transpositions d'ordre d

en remplaçant dans le théorème de Burnside, on obtient $N=\frac{1}{n}\times\sum_{d|n}\varphi(d)2^{\left(\frac{n}{d}\right)}$

Applications : Pour n= 12, il y a donc 4096 gammes et 352 modes à transpositions près.

Pour n=22, il y a donc 4 194 304 gammes et 190 746 modes à transpositions près .

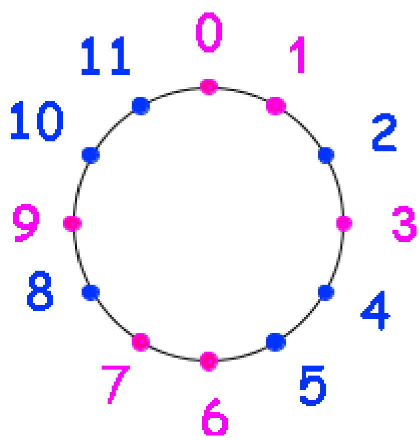
Pour n=24, il y a donc 16 777 216 gammes et 699 252 modes à transpositions près .

2. Critère de stabilité

Définition : La structure intervallique d'une gamme « ordonnée » A={a_1,a_2,..., a_p} (-1<a_1 < a_2 <...< a_p<n) est, à permutation cyclique près, SI(A)=(a_2-a_1,..., a_{k+1}-a_k, ..., a_p-a_{p-1}, n+a_1-a_p)

Propriété :

Une gamme A est à transpositions limitées si et seulement si sa structure intervallique est redondante, c'est à dire si et seulement si elle est de la forme SI(A)=(a_1,a_2,..., a_p,a_1,a_2,..., a_p,...,a_1,a_2,..., a_p).
De plus, si le motif le plus petit se répétant dans la structure intervallique de A est de longueur p, A admet exactement p transpositions.



Preuve :

⇐Soit A telle que SI(A)=($a_1,a_2,\dots, a_p,a_1,a_2,\dots, a_p,\dots,a_1,a_2,\dots, a_p$).

Soit k le nombre de fois où le motif ($a_1,a_2,\dots, a_p$) apparaît dans la structure intervallique de A. On a alors $k\times\sum_{i=1}^{p} a_i=n$.

Quitte à prendre une transposée de A, on peut supposer $A=\left(0,a_{1,}a_1+a_{2,}\dots,\sum_{i=1}^{p} a_i,\dots,k\times\sum_{i=1}^{p} a_i-a_p\right)$

Considérant la transposition de coefficient n/k, on a alors

$$T_{n/k}(A)=\left(\sum_{i=1}^{p} a_i,\dots,k\times\sum_{i=1}^{p} a_i-a_p,k\times\sum_{i=1}^{p} a_i=0,(k+1)\times\sum_{i=1}^{p} a_i-a_p=\sum_{i=1}^{p-1} a_i\right)=A$$

donc si k>1, A est à transpositions limitées et admet au plus n/k transpositions.

⇒ Soit A, une gamme à transpositions limitées, alors il existe un entier k <n tel que $T_k(A)$=A (A admet k transpositions)

Notons A={$a_1,a_2,\dots, a_p$}, il existe alors m tel que $a_{m+1}=a_1+k$ et alors, $\forall h\in\mathbb{N}_{m-1}, a_{m+h}=a_h+k$

et finalement, $\forall h\in\mathbb{N}_p, h=qm+r, a_h=a_r+qk$ donc $k=\sum_{i=2}^{m+1}(a_i-a_{i-1})$ divise n

et $SI(A)=(a_2-a_{1,}a_3-a_{2,}\dots,a_{n+1}-a_n,a_{n+2}-a_{n+1}=a_2-a_{1,}a_{n+3}-a_{n+2}=a_3-a_{2,}\dots,a_{n+1}-a_n)$ où le « motif » est répété n/k fois.

3. Nombre de modes à k notes

On introduit une fonction de poids , constante sur chaque Γ -orbite, c'est-à-dire telle que : $\forall x\in P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\forall\gamma\in\Gamma, p(x)=p(\gamma.x)$

Lemme : Soit Γ , un groupe opérant sur X, $w(x)=(\gamma.x/\gamma\in\Gamma)$, $O(\Gamma/X)=(w(x)/x\in X)$, l'ensemble des orbites de Γ sur X, on a :

$$\sum_{w\in O(\Gamma/X)} p(w)=\frac{1}{Card(\Gamma)}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{x\in X_\gamma} p(x)$$

Preuve : Notons $S(x)=(\gamma\in\Gamma/\gamma(x)=x)$

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{x\in X_\gamma} p(x)=\sum_{x\in X}\sum_{\gamma\in S(x)} p(x)=\sum_{x\in X}\frac{Card(\Gamma)}{Card(w(x))}p(x)$$

$$=Card(\Gamma)\sum_{w\in O(\Gamma/X)}\sum_{x\in w}\frac{p(x)}{Card(w(x))}=Card(\Gamma)\sum_{w\in O(\Gamma/X)}\sum_{x\in w}\frac{p(x)}{Card(w)}=Card(\Gamma)\sum_{w\in O(\Gamma/X)} p(x)$$

Premier théorème de Polya (1937) :
On peut assimiler les gammes à leur fonction caractéristique. On a alors, notant M, l'ensemble des modes :

$$C(\Gamma,n)=\sum_{w\in M} p(w)=\frac{1}{Card(\Gamma)}\sum_{\gamma\in\Gamma}\prod_{i=1}^{n}(p(0)^i+p(1)^i)^{\lambda_i(\gamma)}$$

avec $\lambda_i(\gamma)$, le nombre de cycle de $\gamma\in\Gamma$ de longueur i

Preuve : D'après le lemme, notant $p(f)=\prod_{x\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} p(f(x))$, et $gr(\gamma)$ est le groupe engendré par γ

$$\sum_{w\in M} p(w)=\frac{1}{Card(\Gamma)}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{f\in(0;1)_\gamma^{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}} p(f)$$

or $\sum_{x\in(0;1)_\gamma^{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}} p(x)=\sum_{f\in(0;1)^{O(gr(\gamma)/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}}\prod_{w\in O(gr(\gamma)/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} p(f(w))^{Card(w)}$

or sur une orbite, f est constante

donc $\sum_{x\in(0;1)_\gamma^{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}} p(x)=\sum_{y\in(0;1)}\prod_{w\in O(gr(\gamma)/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} p(y)^{Card(w)}=\prod_{w\in O(gr(\gamma)/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}\sum_{y\in(0;1)} p(y)^{Card(w)}$

$=\prod_{i=1}^{n}(\sum_{y\in(0;1)} p(y)^i)^{\lambda_i(\gamma)}$ car il y a $\lambda_i(\gamma)$ cycles de longueur i

Posons p(0)=1 et p(1)=z. Le poids d'un mode de k notes est alors z^k . Le nombre de modes à k notes est alors le coefficient de z^k dans le polynôme C(Γ , n) obtenu précédemment.

Théorème de Polya : Le nombre de modes à k notes, en considérant les transpositions, est :

$$m_k(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|gcd(n,k)}\varphi(d)\binom{\frac{n}{d}}{\frac{k}{d}}$$

Preuve : Avec Γ , le groupe des transpositions, on a, d'après le théorème précédent :

$C(\Gamma,n)=\frac{1}{n}\sum_{\gamma\in\Gamma}\prod_{i=1}^{n}(1+z^i)^{\lambda_i(\gamma)}$ or il y a $\varphi(d)$ transpositions d'ordre d

donc $C(\Gamma,n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)(1+z^d)^{\frac{n}{d}}=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\sum_{l=1}^{\frac{n}{d}}\binom{\frac{n}{d}}{l}z^{ld}$

Application : Pour n=12,

Nombre de notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de modes	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1

Pour n=22,

Nombre de notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de modes	1	11	70	335	1197	3399	7752	14550	22610	29414	32066
Nombre de notes	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Nombre de modes	29414	22610	14550	7752	3399	1197	335	70	11	1	1

Pour n=24,

Nombre de notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de modes	1	12	85	446	1771	5620	14421	30667	54481	81752	104006	112720
Nombre de notes	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Nombre de modes	104006	81752	54481	30667	14421	5620	1771	446	85	12	1	1

4. Nombre de modes à d transpositions

Théorème :
Le nombre de modes à d transpositions vaut :

$$m_d(n)=\frac{1}{d}\times\sum_{e/e|d}\mu(\frac{d}{e})2^{(e)}$$

où μ est la fonction de Möbius

Preuve : Soit Γ_d le sous-groupe de Γ d'ordre d (où d est un diviseur de n, qui est l'ordre de Γ).

Il y a n/d orbites de Γ_d sur P($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) et donc $2^{n/d}$ gammes stables sous l'action de Γ_d .

Soit $s_d(n)$ le nombre de gammes dont le stabilisateur est Γ_d ,

alors $2^{n/d}=\sum_{e;(e|d|n)} s_e(n)$

On introduit la fonction de Möbius définit par : $\mu(1)=1$ et $\sum_{d|e}\mu(d)=0$, si e>1

qui vérifie : $\mu(k)=0$ si k est divisible par un carré

et $\mu(k)=(-1)^m$ si k est produit de m nombres premiers distincts

On obtient alors $\sum_{(l/d)|(n/d)} 2^{(n/d)/(l/d)}\mu(l/d)=\sum_{e,l;(l|e|n)} s_e(n)\mu(l/d)=\sum_{(e|n)} s_e(n)\sum_{l|e}\mu(l/d)$

donc par définition de la fonction de Möbius, le nombre de gammes qui ont n/d transpositions vaut :

$$s_d(n)=\sum_{e/e|(n/d)}\mu(\frac{n/d}{e})2^e$$

Application : Pour n=12,

transposition(s)	1	2	3	4	6	12
mode(s)	2	1	2	3	9	335

Pour n=22,

transposition(s)	1	2	11	22
mode(s)	2	1	186	190 557

Pour n=24,

transposition(s)	1	2	3	4	6	8	12	24
mode(s)	2	1	2	3	9	30	335	698 870

Cependant il existe d'autres transformations de la gamme.

III. Stabilité et variabilité des gammes sous l'action de l'inversion

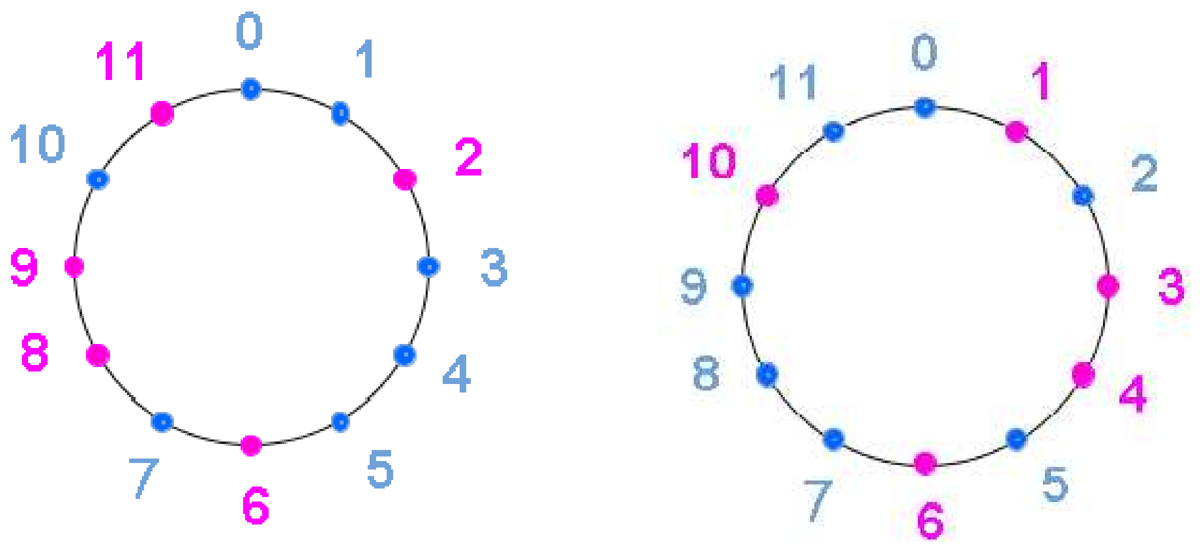
1. Nombre de modes modulo l'inversion

L'inversion d'une gamme représentée sur le cercle correspond à son image miroir (à transpositions près).

Définition : Une inversion est une permutation $P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de la forme:

$$I_k : \quad P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \forall\, x=(a1, a2, \ldots, ap) \in P(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\; f(x)=(k-a1, k-a2, \ldots, k-ap)$$



Ci-dessus : Une gamme et son image par I_0

Théorème : Le nombre de modes à transpositions et inversions près vaut, d'après le Lemme de Burnside :

- si n est impair $N=\frac{1}{2n}\times\sum_{d|n}\varphi(d)2^{(\frac{n}{d})}+n\times 2^{(\frac{(n+1)}{2})}$

- si n est pair $N=\frac{1}{2n}\times\sum_{d|n}\varphi(d)2^{(\frac{n}{d})}+\frac{n}{2}\times 2^{(\frac{n}{2})}+\frac{n}{2}\times 2^{(\frac{(n+2)}{2})}$

Preuve : on applique le théorème de Burnside. Soit D, le groupe dihédral, alors |D|=2n (n transpositions et n inversions)

- Si n est pair, il y a n/2 inversions qui n'ont pas de point fixe : il faut alors choisir si la gamme stable contient ou non n/2 notes (les autres étant déterminées par ce choix et par le fait que la gamme soit stable sous l'action de l'inversion), soit $2^{\frac{n}{2}}$ possibilités de points fixes.

Il y a n/2 inversions qui ont 2 points fixes : on peut alors choisir parmi (n-2)/2+2 notes : ce qui donne $2^{\frac{n+2}{2}}$ possibilités.

L'étude des translations a été faite précédemment.

D'où $N=\frac{1}{2n}\times\sum_{d|n}\varphi(d)2^{(\frac{n}{d})}+\frac{n}{2}\times 2^{(\frac{n}{2})}+\frac{n}{2}\times 2^{(\frac{(n+2)}{2})}$

–

- Si n est impair, il y a toujours un point fixe donc on peut choisir parmi (n-1)/2+1 notes : il y a donc $2^{\frac{n+1}{2}}$

d'où $N=\frac{1}{2n}\times\sum_{d|n}\varphi(d)2^{(\frac{n}{d})}+n\times 2^{(\frac{(n+1)}{2})}$

Application : Pour n=12, il y a 224 modes à transpositions et inversions près.

Pour n=22, il y a 96 909 modes à transpositions et inversions près.

Pour n=24, il y a 352 698 modes à transpositions et inversions près.

2. Critère de stabilité

Théorème : Critère de stabilité

Une gamme est stable par inversion si sa structure intervallique est de la forme :

SI(A)=(a_1, a_2,... a_{k-1}, a_k, a_{k-1}, ..., a_1)

ou SI(A)=(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k-1}, ..., a_2)

Preuve : la transposition équivaut à une permutation cyclique de la structure intervallique. Montrons que l'inversion équivaut à une inversion de l'ordre des termes de la structure intervallique.

Soit $A=\{a_1,a_2,\dots, a_p\}$, on a alors $SI(A)=(a_2-a_1,\dots, a_{k+1}-a_k, \dots, a_p-a_{p-1}, n+a_1-a_p)$.

Or $I(A)=\{n-a_p, \dots, n-a_2, n-a_1\}$ avec $0\leq a_1<\dots<a_p<n$ donc $0<n-a_p<\dots<n-a_1\leq n$

Supposons que la dernière inégalité soit stricte,

alors $SI(I(A))=(n-a_{p-1}-(n-a_p)= a_p-a_{p-1}, a_{p-1}-a_{p-2}, \dots, a_2-a_1)$

on a alors : $SI(A)$ est de la forme $(a_1, a_2,\dots a_{k-1}, a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$

$\Rightarrow n-a_{p-1}-(n-a_p)= a_p-a_{p-1}, a_{p-1}-a_{p-2}, \dots, a_2-a_1)=(a_2-a_1,\dots, a_{k+1}-a_k, \dots, a_p-a_{p-1}, n+a_1-a_p)$

$\Rightarrow T_pI(A)=A$

Si $SI(A)$ est de la forme $(a_1, a_2,\dots a_{k-1}, a_k, a_{k-1}, \dots, a_2)$, alors $SI(TI(A))=(a_1, a_2,\dots a_{k-1}, a_k, a_{k-1}, \dots, a_2)$ et $T_pI(A)=A$

Si l'inégalité n'est pas stricte, $I(A)=\{n-a_1 =0, n-a_p, \dots, n-a_2\}$ ($0=a_1$)

donc $SI(I(A))=(n-a_p, a_p-a_{p-1}, \dots, a_3-a_2)$ et $SI(A)=(a_2-a_1,\dots, a_{k+1}-a_k, \dots, a_p-a_{p-1}, n-a_p)$

on a alors : $SI(A)$ est de la forme $(a_1, a_2,\dots a_{k-1}, a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$

$\Rightarrow (n-a_p, a_p-a_{p-1}, \dots, a_3-a_2, a_2-a_1)=(a_2-a_1,\dots, a_{k+1}-a_k, \dots, a_p-a_{p-1}, n-a_p)$

$\Rightarrow T_pI(A)=A$

3. Nombre de modes à k notes

Théorème de Polya : Le nombre de modes à k notes à transpositions et/ou inversions près est :

- Si n est impair $m_k(n)=\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|gcd(n,k)}\varphi(d)\binom{\frac{n}{d}}{\frac{k}{d}}+n\binom{\frac{(n-1)}{2}}{E(\frac{k}{2})}\right)$

- Si n est pair et k impair $m_k(n)=\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|gcd(n,k)}\varphi(d)\binom{\frac{n}{d}}{\frac{k}{d}}+n\binom{\frac{(n-2)}{2}}{E(\frac{k}{2})}\right)$

- Si n et k sont pairs $m_k(n)=\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|gcd(n,k)}\varphi(d)\binom{\frac{n}{d}}{\frac{k}{d}}+n\binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}}\right)$

Preuve : Soit D, le groupe dihédral, alors d'après le théorème de Polya, on a :

$$C(D,n)=\frac{1}{2n}\sum_{\gamma\in D}\prod_{i=1}^{n}(1+z^{i})^{\lambda_i(\gamma)}$$

Il y a $\varphi(d)$ transpositions d'ordre d.

- si n est impair, il y a n inversions qui ont un seul point fixe, donc un cycle de longueur 1 et (n-1)/2 cycles de longueur 2

donc $$C(D,n)=\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)(1+z^{d})^{\frac{n}{d}}+n\times(1+z^{2})^{\frac{(n-1)}{2}}\times(1+z)\right)$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)\sum_{l=0}^{\frac{n}{d}}\binom{\frac{n}{d}}{l}z^{ld}+n\times\sum_{m=0}^{\frac{(n-1)}{2}}\binom{\frac{n-1}{2}}{m}(z^{2m}+z^{2m+1})\right)$$

- si n est pair, il y a n/2 inversions qui ont 2 points fixes et (n-2)/2 cycles de longueur 2 et n/2 inversions qui n'ont pas de point fixe et n/2 cycles de longueur 2

donc $$C(D,n)=\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)(1+z^{d})^{\frac{n}{d}}+\frac{n}{2}\times(1+z^{2})^{\frac{(n-2)}{2}}\times(1+z)+\frac{n}{2}\times(1+z^{2})^{\frac{n}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)\sum_{l=0}^{\frac{n}{d}}\binom{\frac{n}{d}}{l}z^{ld}+\frac{n}{2}\times\sum_{m=0}^{\frac{(n-2)}{2}}\binom{\frac{n-2}{2}}{m}(z^{2m}+z^{2m+1})+\frac{n}{2}\times\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\binom{\frac{n}{2}}{m}z^{2m}\right)$$

Application : Pour n=12,

Nombre de notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de modes	1	6	12	29	38	50	38	29	12	6	1	1

Pour n=22,

Nombre de notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de modes	1	11	40	195	621	1782	3936	7440	11410	14938	16159
Nombre de notes	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Nombre de modes	14938	11410	7440	3936	1782	621	195	40	11	1	1

Pour n=24,

Nombre de notes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de modes	1	12	48	256	913	2920	7293	15581	27407	41272	52234	56822
Nombre de notes	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Nombre de modes	52234	41272	27407	15581	7293	2920	913	256	48	12	1	1

IV. Programme Pascal

1. Objectif de l'algorithme

- Objectif : Dénombrement de modes suivant le nombre de notes qui le constituent et de ses transpositions

2. Principe du premier algorithme

- Principe : Génération de modes puis addition à une liste avec incrémentation

- Programme *(sous Pascal)* :

```
PROGRAM Denombrerlestranspositions12;

{Le principe de ce programme repose sur une liste de gammes possédant d notes dont on dénombre les
transpositions}

TYPE cadreton = ARRAY [1..13] of WORD ;
        transposition=^noeud;
        noeud=Record
                contenu:cadreton;
                 suivant : transposition;
             End;

VAR L0, L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8, L9, L10, L11, L12: transposition;
      t :cadreton ;
      q, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j,k :word ;

FUNCTION Comparaison (t1, t2 : cadreton) :boolean ;
VAR k :word ;
BEGIN k :=2 ;
   WHILE (k<13) AND (t1[k]=t2[k])
             DO k:=k+1;
        Comparaison:=(t1[k]=t2[k]);
END ;

FUNCTION Cons (t :cadreton ; l :transposition) :transposition ;  {permet de créer les listes de  modes}
VAR p :transposition ;
BEGIN New (p) ;
```

```
            p^.contenu:= t;
            p^.suivant:=l ;
            Cons :=p ;
END ;

PROCEDURE Insertion (t :cadreton ; VAR l :transposition) ;
VAR k :word ; int : transposition ; OK :word ;
BEGIN k:=3;
            WHILE (k<14) AND (t[k]<>0)DO BEGIN
         t[k]:=t[k]+1-t[2]; k:=k+1; END;  {on se ramène à une gamme commençant par 1}
   t[2]:=1; OK:=0; int:=NIL;
            WHILE not(l=NIL) AND (OK=0) DO
               BEGIN IF Comparaison (t, l^.contenu)
                        THEN BEGIN l^.contenu[1]:=l^.contenu[1]+1;
                                    OK:=1; END
                        ELSE BEGIN int:=Cons(l^.contenu, int);
                                    l:= l^.suivant; END;
             END;
            IF (OK=0) THEN l:=Cons (t, l);
            WHILE not(int=NIL) DO
                     BEGIN l:=Cons (int^.contenu, l);
                              int :=int^.suivant ;
                     END ;
END ;

PROCEDURE Vide(t:cadreton) ;
VAR k :word ;
BEGIN
   FOR k :=1 TO 13 DO t[k] :=0 ;
END;

BEGIN Writeln ('création des listes triviales...');
Vide(t) ; L0 :=NIL ; L1 :=NIL ; L2 :=NIL ; L3 :=NIL ; L4 :=NIL ; L5 :=NIL ;
L6 :=NIL ; L7 :=NIL ; L8 :=NIL ; L9 :=NIL ; L10 :=NIL; L11 :=NIL ; L12 :=NIL ;
t[1] :=1 ;L0 :=Cons (t, L0) ;
t[2] :=1 ; t[1] :=12 ;                              {Création des listes triviales}
L1 :=Cons(t, L1) ;
FOR q :=3 TO 13 DO t[q] :=q-1 ;
```

```
L12:=Cons(t, L12);
Writeln('initialisation de la boucle');
FOR a :=1 TO 12 DO BEGIN
  Vide(t); t[1] :=1 ; t[2] :=a ;   Writeln('a=',a);
    FOR b :=a+1 TO 12+a DO BEGIN
      t[3]:=b; Writeln('b=',b);insertion (t, L2);
        FOR c:=b+1 TO 12+a DO BEGIN
          t[4]:=c; insertion (t, L3); Writeln('c=',c);
               FOR d:=c+1 TO 12+a DO BEGIN
              t[5]:=d; insertion (t, L4); Writeln('d=',d);
                      FOR e:=d+1 TO 12+a DO BEGIN
                           t[6]:=e; insertion (t, L5); Writeln('e=',e);
 FOR f:=e+1 TO 12+a DO BEGIN
   t[7]:=f; insertion (t, L6); Writeln('f=',f);
    FOR g:=f+1 TO 12+a DO BEGIN
       t[8]:=g; insertion (t, L7); Writeln('g=',g);
     FOR h:=g+1 TO 12+a DO BEGIN
        t[9]:=h; insertion (t, L8); Writeln('h=',h);
       FOR i:=h+1 TO 12+a DO BEGIN
          t[10]:=i; insertion (t, L9); Writeln('i=',i);
               FOR j:=i+1 TO 12+a DO BEGIN
            t[11]:=j; insertion (t, L10); Writeln('j=',j);
           FOR k:=j+1 TO 12+a DO BEGIN
              t[12]:=k;  insertion(t, L11); END; Writeln('k=',k);
          END;
       END;
     END;
    END;
 END;
          END;
        END;
     END;
   END;
 END;

Writeln ('Dans L0, il y a 1 mode à 1 transposition') ;
Writeln ('Dans L1, il y a 1 mode à 12 transpositions') ;
{Calcul du nombre de modes à a transpositions dans chacun des L et affichage du résultat}
```

```
Vide(t) ;
WHILE not(L2=NIL) DO BEGIN
    a :=L2^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L2 :=L2^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L2, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
Readln();
Vide(t) ;
WHILE not(L3=NIL) DO BEGIN
    a :=L3^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L3 :=L3^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L3, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
 Readln();
Vide(t);
WHILE not(L4=NIL) DO BEGIN
    a :=L4^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L4 :=L4^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L4, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
Readln();
Vide(t) ;
WHILE not(L5=NIL) DO BEGIN
    a :=L5^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L5 :=L5^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L5, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
Readln();
Vide(t) ;
WHILE not(L6=NIL) DO BEGIN
    a :=L6^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L6 :=L6^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L6, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
Readln();
Vide(t) ;

WHILE not(L7=NIL) DO BEGIN
```

```
    a :=L7^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L7 :=L7^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L7, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
 Readln();
Vide(t) ;
WHILE not(L8=NIL) DO BEGIN
    a :=L8^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L8 :=L8^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L8, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
Readln();
Vide(t) ;
WHILE not(L9=NIL) DO BEGIN
    a :=L9^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L9 :=L9^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L9, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
 Readln();
Vide(t) ;
WHILE not(L10=NIL) DO BEGIN
    a :=L10^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L10 :=L10^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L10, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
    Readln();
Vide(t) ;
WHILE not(L11=NIL) DO BEGIN
    a :=L11^.contenu[1] ; t[a] :=t[a]+1 ;
    L11 :=L11^.suivant ;END ;
FOR b :=1 TO 12 DO
Writeln ('Dans L11, il y a',t[b], 'mode(s) à',b,'transposition(s)') ;
 Readln();
Writeln ('Dans L12, il y a 1 mode à 1 transposition') ;
Readln();
              END.
```

3. Difficultés rencontrées lors de son élaboration

Le temps d'execution est trop grand, à cause de la complexité factorielle de l'algorithme.

4. Principe du deuxième algorithme élaboré

Un mode est à d transpositions s'il est constitué d'un motif répété n/d fois.

Déterminer le nombre de modes à d transpositions revient alors à déterminer le nombre de motifs de taille d que l'on peut former.

```
PROGRAM Denombrerlestranspositions12;
{Le principe de ce programme repose sur une liste de gammes possédant d notes dont on dénombre les transpositions}
TYPE cadreton = ARRAY [0..6] of WORD ;
        transposition=^noeud;
        noeud=Record
                contenu:cadreton;
                 suivant : transposition;
             End;
{D'après le critère, les modes à transpositions limitées ont un nombre de notes diviseur de 12}
VAR L1,L2, L3, L4, L5: transposition;
      t,r1,r5,r2,r3,r4,rT :cadreton ;
      a, b, c, d, e, f, diviseur :word ;

FUNCTION Comparaison (t1, t2 : cadreton;d:integer) :boolean ;
VAR k,q :word ; toto:boolean; aprime:integer;
BEGIN
k :=0 ; q:=0; toto:=(0=1);
while not(toto) and (q<d) do BEGIN
   IF (t1[q]=t2[k]) THEN BEGIN
     toto:=true;
     WHILE (k<d) DO BEGIN
          aprime:=(q+k) mod d;
          toto:=(t1[aprime]= t2[k])and(toto);
          k:=k+1;END;
     END;
 q:=q+1;k:=0;
END ;
```

```
Comparaison:=toto;
END;

FUNCTION Cons (t :cadreton ; l :transposition) :transposition ;  {permet de créer les listes de  modes}
VAR p :transposition ;
BEGIN New (p) ;
          p^.contenu:= t;
          p^.suivant:=l ;
          Cons :=p ;
END ;
PROCEDURE Vide(t:cadreton) ;
VAR k :word ;
BEGIN
   FOR k :=0 TO 6 DO t[k] :=0 ;
END;
FUNCTION somme(t:cadreton):integer;
VAR k:word; s:word;
BEGIN s:=0;
FOR k:=0 TO 6 DO
s:= s+t[k];
somme:=s;
END;
PROCEDURE Insertion (t :cadreton ; VAR l :transposition;d:integer;total:integer) ;
VAR int : transposition ; OK :boolean ;
BEGIN OK:=(0=0); int:=NIL;
      IF somme(t)>total THEN OK:=(0=1);
          WHILE not(l=NIL) AND OK DO
             BEGIN IF Comparaison (t, l^.contenu,d)
                      THEN BEGIN OK:=(0=1); end
                      ELSE BEGIN int:=Cons(l^.contenu, int);
                                  l:= l^.suivant; END;
           END;
          IF OK THEN BEGIN l:=Cons (t, l); END;
          WHILE not(int=NIL) DO
                   BEGIN l:=Cons (int^.contenu, l);
                            int :=int^.suivant ;
                   END ;
END ;
```

```
FUNCTION Card(l:transposition):integer;
BEGIN If l=NIL Then Card:=0
Else Card:=Card(l^.suivant)+1;
END;
PROCEDURE Afficher(t:cadreton);
VAR k:integer;
BEGIN
FOR k:=0 TO 5 DO
Write (t[k]);
Writeln();
END;
PROCEDURE Affiche(l:transposition);
BEGIN
If not(l=NIL) then begin
Afficher(l^.contenu);
Affiche(l^.suivant); end;
END;

BEGIN c:=0; Vide(r1); Vide(r2); Vide(r5);Vide (r3);Vide(r4); Vide (rT);
L1:=NIL; L2:=NIL; L3:=NIL; L4:=NIL; L5:=NIL;
Writeln('Il y a 2 modes a 1 transposition : le mode vide et le mode possedant toutes les notes');
For d:=2 TO 6 DO
IF 12 div d =12/d then begin
    For a:= 0 TO d-1 DO BEGIN
        Vide(t);
        IF a>0 THEN t[a-1]:=0;
        t[a]:=1;
        For b:=(a+1) TO (d-1) DO BEGIN
          IF b>a+1 Then t[b-1]:=0;
          t[b]:=1; Insertion (t,L2,d,2);Afficher(t);
          For c:=b+1 TO d-1 DO BEGIN
             IF c>b+1 Then t[c-1]:=0;
            t[c]:=1; Insertion (t, L3,d,3);
                For  e:= c+1 TO d-1 DO BEGIN
                  IF e>c+1 Then t[e-1]:=0;
                  t[e]:=1; Insertion (t,L4,d,4);
                   For f:=e+1 TO d-1 DO BEGIN
                    IF f>e+1 Then t[f-1]:=0;
```

```
            t[f]:=1; Insertion (t, L5,d,5);end;
          end;
       end;
     end;
   end;
   {On crée toutes les combinaisons possibles, puis on les ajoutent à Ln}
  r1[d]:=1;
IF 2*(12DIV d)<12 THEN r2[d]:=Card(L2);
IF 3*(12DIV d)<12 THEN r3[d]:=Card(L3);
IF 4*(12DIV d)<12 THEN r4[d]:=Card(L4);
IF 5*(12DIV d)<12 THEN r5[d]:=Card(L5);
rT[d]:= r1[d]+r2[d]+r3[d]+r4[d]+r5[d];
Writeln('il y a ',r1[d], ' modes a ',(12DIV d) , ' notes et ', d, ' transpositions');
Writeln('il y a ',r2[d], ' modes a ',2*(12DIV d) , ' notes et ', d, ' transpositions');
Writeln('il y a ',r3[d], ' modes a ',3*(12DIV d ), ' notes et ', d, ' transpositions');
Writeln('il y a ',r4[d], ' modes a ',4*(12DIV d ), ' notes et ', d, ' transpositions');
Writeln('il y a ',r5[d], ' modes a ',5*(12 DIV d) , ' notes et ', d, ' transpositions');
Writeln('Soit en tout ', rT[d], ' modes a ', d, ' transpositions');
c:=c+Card(L2)+Card(L3)+Card(L4)+Card(L5);
readln();
end;
end.
```

V. Synthétiseur (Matlab)

- Objectif : Synthèse d'une gamme donnée.
- Principe : Elaboration d'une table des fréquences appartenant à l'échelle. Il suffit ensuite de lire la fréquence correspondant à chaque note.

```
n=input (" Combien de notes constituent l échelle ? ")
  m=n
  f=input (" Quelle est la fréquence de départ ? ")
  echelle=list()
  echelle($+1)=f
  while m>1 do
  f=f*(2^(1/n))
  echelle ($+1)=f
  m=m-1
  end
  m=input (" Combien de notes contient la gamme? ")
  while m>0 do
```

```
m=m-1
a=input (" Quelle note ? ")
cf = echelle (a+1)
sf = 22050
d = 1.0
n = sf * d
s = (1:n) / sf
s = sin(2 * 3.1416 * cf * s)
sound(s, sf)
end
```

Démarche :

- Contact et rencontre de professeurs de musique pour définir les notions utilisées
- Elaboration d'un programme de dénombrement
- Rencontre d'un chercheur qui m'a fourni des documents et m'a aidée à préciser les notions utilisées et à perfectionner mon programme
- Elaboration d'un synthétiseur

Conclusion :

Les simulations et dénombrements m'ont permis de comparer deux échelles musicales sur des critères de stabilité par différentes transformations et de fournir un premier élément de réponse au problème des conditions d'utilisation de ces échelles. Ainsi, l'échelle indienne offre plus de combinaisons que l'échelle occidentale, et donc une plus grande diversité de morceaux.

Bibliographie :

Sources

[1] M. Broué, Les tonalités musicales vues par un mathématicien, (juillet 2001)

[2] M. Andreatta, Rapport sur mes recherches en mathématiques/musique (http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/moreno/RapportMoreno.pdf)

[3] H. Fripertinger, Enumeration in Musical Theory (janvier 1993)

[4] H. Fripertinger, Classification of motives : a mathematical approach (novembre 1999)

[5] D.J. Benson, Music: a Mathematical Offering (2006)

[6] F. Jedrzejewski, Mathematical Theory of Music (2006)

[7]J. Hook, Why are there twenty-nine Tetrachords? (août 2007)

[8] U. Michels, Guide illustré de la musique ; édition Fayard

[9] Articles gamme et transposition du petit Larousse 1998

[10] www.wikipédia.fr

Autres lectures

[11] Y. Hellegouarch, Gammes naturelles, pub. APMEP n°53, 1983

Contacts :

- *Moreno Andreatta* : Chercheur et coordinateur des activités concernant les rapports entre mathématique et musique à l'intérieur de l'Equipe Représentations Musicales de l'IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique).
- *Laurence Hénaff* : Professeur d'histoire de la musique au CNR (Conservatoire National de Région)
- *Marie-Claude Hiron* et *François-Gildas Tual* : professeurs à l'ENM (Ecole Nationale de Musique) d'Alençon