Math 3. Fiche TD 1. Algèbre linéaire.

Notation
Dans cette fiche, la notation $\{v_1, v_2 ... v_p\}$ désigne le p-uple "ordonné" $(v_1, v_2 ... v_p)$.
Terminologie
Système libre de vecteurs=famille de vecteurs linéairement indépendants.

Exercice 1
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$?

$E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R^2}, x \leqslant y\}$.

$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3}, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3}, x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$.

$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3}, x - y + z = 0\}$.

Exercice 2
On considère les matrices A, B, I, V définies par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Calculer $A+B$, AB, BA, AI, AV, IV, λA, $A - \lambda I$, où λ est un nombre réel quelconque.

Exercice 3

1)Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ forment-ils un système libre de $\mathbf{R^3}$? un système de générateurs de $\mathbf{R^3}$?

2)Même question pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3)Même question pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4
On considère dans $\mathbf{R^2}$ les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$.

1)Montrer de deux façons différentes que le système $\{u, v\}$ est libre.

2)En déduire que $\{u, v\}$ est une base de $\mathbf{R^2}$.

3)Ecrire un vecteur quelconque (x, y) de $\mathbf{R^2}$ sous la forme $Xu + Yv$.

4)Donner la matrice de passage P de la base canonique $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ à la base $\{u, v\}$ ainsi que la matrice de passage P^{-1} de la base $\{u, v\}$ à la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$.

5)Vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ et que $\binom{x}{y} = P\binom{X}{Y}$.

Exercice 5
Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R^2}$ des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbf{R^2}$ dans $\mathbf{R^2}$.

1)On pose $u = \cos(\omega x)$ et $v = \sin(\omega x)$. Montrer que le système $\{u, v\}$ est un système libre de vecteurs de E.

2)Soit F_ω le sous-espace vectoriel de E formé par les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. Montrer que $\{u, v\}$ est une base de F_ω .

3)On pose $u_a = \cos(\omega x + a)$ et $v_a = \sin(\omega x + a)$. Ecrire u_a et v_a dans la base $\{u, v\}$ et montrer que $\{u_a, v_a\}$ est une base de F_ω .

4)Donner la matrice de passage P_a de la base $\{u, v\}$ à la base $\{u_a, v_a\}$.

5)Exprimer $\cos(\omega x)$ dans la base $\{u_a, v_a\}$.

Exercice 6
On considère dans $\mathbf{R^3}$ les vecteurs $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$.

1)Montrer que le système $\{u, v, w\}$ est un système libre de vecteurs de $\mathbf{R^3}$ et en déduire que c'est une base de $\mathbf{R^3}$.

2)Donner la matrice de passage P de la base canonique $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ à la base $\{u, v, w\}$.

3)Donner la matrice de passage P^{-1} de la base $\{u, v, w\}$ à la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ et vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$

4)Décomposer le vecteur $(1, 1, 1)$ dans la base $\{u, v, w\}$.