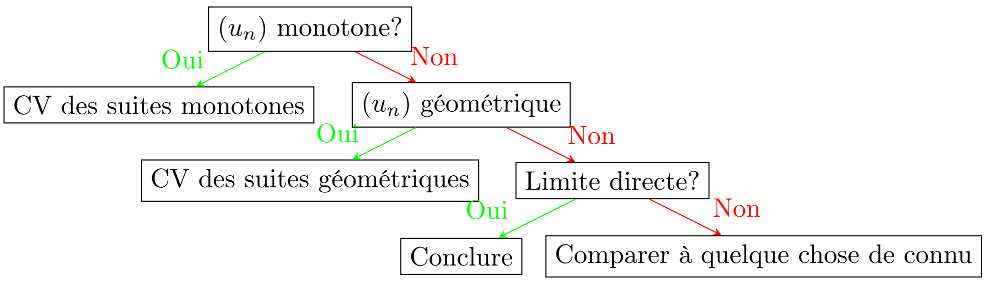
Université Claude Bernard Lyon 1 | PCSI L2 UE Math3
Année 2012-2013
Printemps 2013

FICHE MÉMO : CONVERGENCE DE SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

1. Suites numériques

Schéma récapitulatif



1.1. **Suites usuelles et méthodes directes.** On note (u_n) la suite numérique étudiée. Si la suite à étudier est une suite monotone ou géométrique, on peut tout de suite conclure :

Théorème 1 (Convergence des suites monotones)**.** *Toute suite monotone et bornée converge. Toute suite monotone non bornée diverge.*

Théorème 2 (Convergence des suites géométriques)**.** *Si (u_n) est une suite géométrique de raison ρ, (u_n) converge si et seulement si $|\rho| < 1$ ou $\rho = 1$.*

On peut aussi essayer de calculer directement la limite. Si la suite admet une limite finie l, elle converge vers l (par définition de la convergence). Si elle tend vers l'infini, elle diverge (par définition de la convergence).

Sinon, on peut regarder la convergence de sous-suites : Si deux sous-suites de (u_n) convergent vers deux limites différentes, alors (u_n) diverge et si (u_{2n}) et u_{2n+1} convergent vers la même limite, (u_n) aussi.

1.2. **Méthodes par comparaison.** Si le comportement de la suite ne peut pas être déterminé par les méthodes directes ci-dessus, on utilise des théorèmes de comparaison: on essaie de comparer la suite à d'autres suites dont le comportement est connu.

Théorème 3 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Supposons qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout $n \geq N_0$. Alors*

- *Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite l; alors (u_n) converge aussi vers l.*
- *Si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend aussi vers $+\infty$ donc elle diverge.*
- *Si (w_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) tend aussi vers $-\infty$ donc elle diverge.*

Théorème 4 (Suites adjacentes)**.** *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Supposons :*

- *(u_n) croissante*
- *(v_n) décroissante*

- $v_n - u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$

alors (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite.

Definition 5.
- $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$
- $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

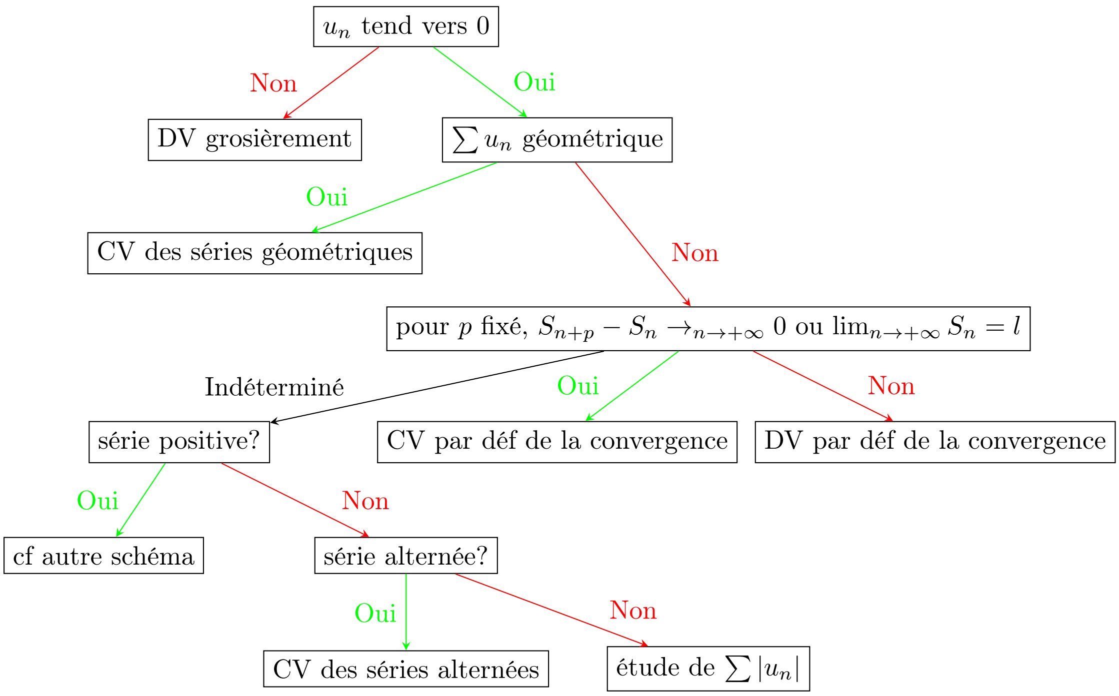
Théorème 6 (Comparaison de suites)**.**
- *Si $u_n \sim v_n$, alors (u_n) et (v_n) ont même nature (elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux).*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et (v_n) converge vers une limite l, alors u_n converge vers 0.*

Théorème 7 (Comparaison Exponentielle/Puissance/Logarithme)**.** *L'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.*

2. Séries numériques

2.1. Cas général.

Schéma récapitulatif pour une série quelconque



On considère dans ce qui suit une série $\sum u_n$.
Lors de l'étude d'une série, le premier cas à éliminer est le suivant :

Definition 8. $\sum u_n$ diverge grossièrement (ou trivialement) si $u_n \nrightarrow_{n\to\infty} 0$

On peut ensuite identifier les séries géométriques et les séries de Riemann :

Théorème 9 (Convergence des séries géométriques)**.** $\sum \rho^n$ *CV* $\Leftrightarrow |\rho| < 1$ *et on a dans ce cas :* $\sum u_n = \frac{1}{1-\rho}$.

Théorème 10 (Convergence des séries de Riemann)**.** $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *CV si* $\alpha > 1$, *DV si* $\alpha \leq 1$.

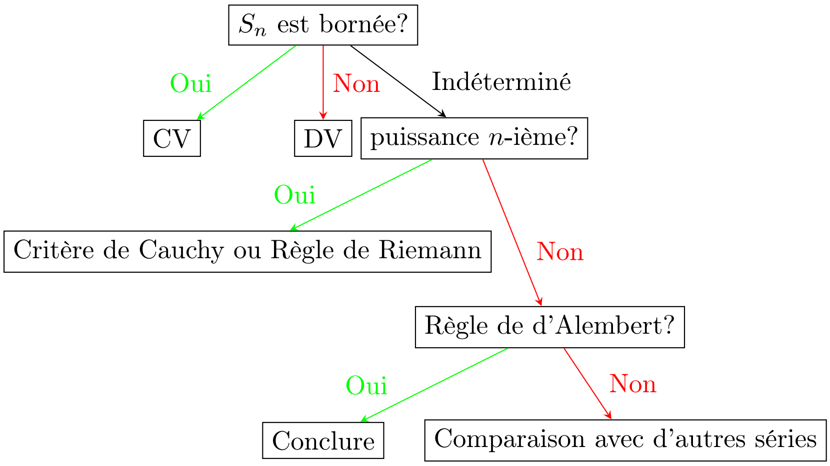
Théorème 11 (Critère des séries alternées)**.** *Si les trois critères*
- $(-1)^n u_n \geq 0$ *ou* $(-1)^{n+1} u_n \geq 0$ *(=$\sum u_n$ alternée)*
- $lim_{n\to\infty} u_n = 0$
- $(|u_n|)$ *décroissante*

sont vérifiés, la série $\sum u_n$ CV.

Théorème 12 (Absolue convergence)**.** $\sum |u_n|$ *CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *CV*

2.2. **Séries à termes positifs.**

Schéma récapitulatif pour une série positive



Théorème 13 (Règle de D'Alembert)**.** *Si* $lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L \in [0; +\infty]$*,*

- $L < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *CV.*
- $L > 1 \Rightarrow \sum u_n$ *DV grossièrement.*

Théorème 14 (Critère de Cauchy)**.**
- *Si* $\exists r < 1$ *tel que pour tout* n $\sqrt[n]{u_n} < r < 1$*, alors* $\sum u_n$ *CV.*
- *Si* $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N_0$*,* $\sqrt[n]{u_n} > 1$*, alors* $\sum u_n$ *DV.*

Théorème 15 (Règle de Riemann)**.**
- *Si* $\exists \alpha > 1$ *tel que* $lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$*,* $\sum u_n$ *CV.*
- *Si* $\exists \alpha \leq 1$ *tel que* $lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = +\infty$*,* $\sum u_n$ *DV.*

Théorème 16 (Comparaison de séries positives)**.** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries telles que pour tout* n *:* $0 \leq u_n \leq v_n$*.*

- $\sum v_n$ *CV* $\Rightarrow \sum u_n$ *CV*
- $\sum u_n$ *DV* $\Rightarrow \sum v_n$ *DV*

Théorème 17 (Sommation des relations de comparaison)**.** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs.*

(1) Si $u_n = o(v_n)$ *et* $\sum v_n$ *CV, alors* $\sum u_n$ *CV.*
(2) Si $u_n = o(v_n)$ *et* $\sum u_n$ *DV, alors* $\sum v_n$ *DV.*
(3) Si $u_n \sim v_n$*,* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature (elles CV toutes les deux ou DV toutes les deux)*