FICHE TD 2 - ALGEBRE LINEAIRE

Exercice 1 .
L'espace vectoriel $\mathbf{R^2}$ (resp.$\mathbf{R^3}$) est muni de la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ (resp. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Ecrire les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique convenable :
a)la rotation d'angle θ dans $\mathbf{R^2}$.
b)la rotation d'angle θ autour de Oz dans $\mathbf{R^3}$.
c)la reflexion par rapport à Ox dans $\mathbf{R^2}$.
d)la reflexion par rapport au plan xOy dans $\mathbf{R^3}$.
e)la symétrie orthogonale par rapport à Oz dans $\mathbf{R^3}$.

Exercice 2 .

a)Soit $V = \mathbf{R^4}$, $W = \mathbf{R^2}$ et soit B (resp.D) la base canonique de V (resp.W). Soit L l'application linéaire de V dans W dont la matrice dans les bases B et D est : $L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
Déterminer $Ker(L)$ et $Im(L)$ et en donner une base.

b)Mme question avec $V = \mathbf{R^2}$, $W = \mathbf{R^4}$, $L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 3 . On munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[t]$ de la base $B = \{1, t, t^2, t^3\}$.Donner la matrice des endomorphismes $\frac{d}{dt}$ et $\frac{d^2}{dt^2}$ de $\mathbf{R}_3[t]$ dans la base B.Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?

Exercice 4 . On munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}_2[t]$ de la base $B = \{1, t, t^2\}$.Donner la matrice de l'endomorphisme T_1 de $\mathbf{R}_2[t]$ dans la base B où T est défini par : $T_1(P)(t) = P(t-1)\ \forall P \in \mathbf{R}_2[t]$.

Exercice 5 . Calcul de A^n

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 3 et soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Soit L l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A = L_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a)Déterminer $Ker(L)$ et $Im(L)$, sous-espaces de E et en donner une base. Quel est le rang de L ?

b)On note $\epsilon_1 = e_1 + e_3, \epsilon_2 = e_1 - e_3, \epsilon_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $B' = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ est une base de E. Préciser la matrice de passage $P = P_{B'B}$ de B à B', ainsi que la matrice inverse P^{-1}.

c)Exprimer $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), f(\epsilon_3)$ dans la base B' et en déduire la matrice $D = L_{B'}$ de f dans la base B'.

d)Quelle relation lie les matrices A, D, P ?

e)Pour tout entier $n \geqslant 1$ exprimer la matrice A^n.

Exercice 6 . Diagonalisation
Soit $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ la base canonique de $\mathbf{R^3}$ et soit L l'endormorphisme de $\mathbf{R^3}$ dont la matrice dans la base B est donnée par : $A = L_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a)Déterminer une base $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbf{R^3}$ dans laquelle la matrice de L est une matrice diagonale $D = L_{B'}$ que l'on précisera.

b)Donner les équations dans la base B de 3 plans vectoriels stables par L.

Exercice 7 .

a)Quelles sont les valeurs propres des matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$?

b)Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ?

Exercice 8 . Application aux suites récurrentes

a)Trouver une base $B' = \{e_1, e_2\}$ de l'espace vectoriel $\mathbf{R^2}$ formée par des vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et préciser une matrice diagonale semblable (conjuguée) à A.

b)Donner la matrice de passage P de la base canonique $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathbf{R^2}$ à la base B' et calculer P^{-1}.

c)Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle déterminéepar ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
En remarquant que pour tout $n \geqslant 2$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et u_1 pour $n \geqslant 2$.