Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI L2 UE Math3
Année 2012-2013
Printemps 2013

FICHE TD 3 - ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi que leur multiplicité algébrique et leur multiplicité géométrique. En déduire si la matrice est diagonalisable.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Résoudre l'équation couplée $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ pour tout temps t pour les valeurs suivantes de A et $\mathbf{x}(0)$:

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ avec

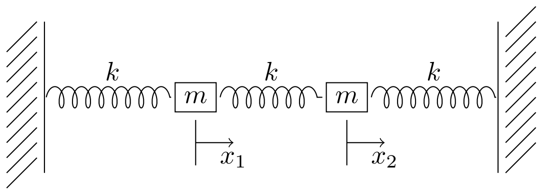
(a) $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou (b) $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec

(a) $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou (b) $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comparer les résultats obtenus.

Exercice 3. On considère deux poids de masse $m = 1$ reliés par des ressorts de raideur $k = 1$, comme ci-dessous. On écarte le premier poids de 1 unité de longueur à droite de sa position d'équilibre d'origine et on le lache sans vitesse initiale.



Les équations associées à ce mouvement sont :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2x_1 + x_2$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = x_1 - 2x_2$$

Déterminer les modes normaux (vecteurs propres de la matrice associée au système) et la fréquence des oscillations.

Exercice 4 (Gram-Schmidt et polynômes de Legendre)**.** Soit $V = \mathbb{R}_3[t]$, muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs $\mathbf{x}_1(t) = 1$, $\mathbf{x}_2(t) = t$, $\mathbf{x}_3(t) = t^2$ et $\mathbf{x}_4(t) = t^3$.

Exercice 5. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\mathbf{v}) = 3x^2 + 3y^2 - 2yz + 3z^2 - 2xy - 2xz, \forall \mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(1) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle la matrice $q_{\mathcal{B}'}$ de q soit diagonale.

(2) Décrire l'ensemble $\mathcal{E} = \{\mathbf{v}|q(\mathbf{v}) = 1\}$. Cet ensemble est appelé ellipsoïde.

Exercice 6. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(\mathbf{v}) = x^2 - 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2, \forall \mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(1) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle la matrice $q_{\mathcal{B}'}$ de q soit diagonale.

(2) Décrire l'ensemble $\mathcal{E} = \{\mathbf{v}|q(\mathbf{v}) = 1\}$. Cet ensemble est appelé hyperboloïde à une nappe.