Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Math3
Année 2012-2013
Printemps 2013

FICHE TD 5 - SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1. Préciser le disque de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{2^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{n}} z^n \qquad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n}$$

Exercice 2. Exprimer la somme de chaque série entière sur son disque de convergence que l'on précisera :

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n \qquad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1) z^{3n+2}$$

Exercice 3. Donner le développement en série entière en 0 des fonctions à variable réelle suivante :

$$(1) f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \qquad (2) f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

Exercice 4. Donner le développement en série entière en x_0 des fonctions à variable réelle suivante :

$$(1) f(x) = \sin(x) \text{ en } x_0 = \frac{\pi}{2} \qquad (2) f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ en } x_0 = 1$$

Exercice 5. Soit l'équation différentielle $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.

(1) A l'aide d'une série entière, trouver une solution particulière non nulle $u(x)$ de l'équation.
(2) A l'aide du changement de fonction $y = zu$, trouver la solution générale de l'équation sur $]0; 1[$.

Exercice 6. Soit l'équation différentielle $(x^2 + x)y'' + (1 + 3x)y' + y = 0$. Sur $]0; 1[$ trouver une solution particulière non nulle $u(x)$ de l'équation, puis la solution générale de l'équation sur $]0; 1[$ de la forme $y = zu$.

Exercice 7. Soit $u(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-2)}$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? Calculer $u(x)$. (Indication : on pourra tout d'abord calculer $u'(x)$.)