Université Claude Bernard – Lyon 1

Mass 41: Algèbre (L2) – Examen Partiel I. Lundi, 29 mars 2010 Durée : 1 heure 30 minutes

Exercice I. *Soit t un paramètre réel, et $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f_t(x,y,z) = (X,Y,Z)$, où*

$$\begin{cases} X = & x - y \\ Y = & -x + 2y + z \\ Z = & tx + y + z \end{cases}$$

(1) *Ecrire la matrice A_t de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

(2) *Montrer que, pour $t \neq 0$, la matrice A_t est inversible et calculer son inverse.*

(3) *Soit $F = \ker f_0$ et $G = Imf_0$; calculer une base de F et un système d'équation qui définie l'espace G.*

(4) *Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.*

(5) *Le système* $\begin{cases} x - y & = 1 \\ -x + 2y + z & = 1 \\ y + z & = 1 \end{cases}$ *admet-il au moins une solution ?*

(6) *Même question pour le système* $\begin{cases} x - y & = 1 \\ -x + 2y + z & = 1 \\ y + z & = 2 \end{cases}$

(1) $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Le déterminant de $A_t, \det A = -t$. La matrice est inversible ssi son déterminant n'est pas nul. Donc si $t \neq 0$ la matrice A est inversible. Son inverse est $A_t = \frac{1}{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) Soit $F = \ker f_0$ et $G = \mathrm{Im} f_0$; calculer une base de F et un système d'équation qui définie l'espace G.

(4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

(5) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de f_0, donc ce systme n'a pas de solution.

(6) Ce système possède au moins une solution car le vecteur d'arrivé $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f_0$, par exemple $x = 2, y = 1, z = 1$

Exercice II. *Soit α un nombre réel, et la matrice A_n à n lignes et n colonnes définie par*

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad D_n = \det A_n$$

(1) *Calculer D_n pour $n = 2,\ n = 3$.*

(2) *Montrer que, pour $n \geq 2,\ D_n = (\alpha - 1)D_{n-1}$, et calculer D_n pour tout $n \geq 1$.*

(3) *Déterminer le rang de A_n suivant les valeurs de α.*

(1)

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - \alpha$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \alpha(\alpha^2 - \alpha) - 1 \cdot (\alpha^2 - \alpha) + 1 \cdot (\alpha^2 - \alpha^2) = (\alpha - 1)^2\alpha$$

(2) Calcul de déterminant en développant selon la première ligne : on remarque que les mineurs qui contient les deux premières colonnes sont nuls (les deux premères colonnes étant égales) :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \end{vmatrix}$$

Les deux mineurs, qui contient une seule de deux premières colonnes sont les mêmes. Ce qui nous laisse deux terms seulement :

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \end{vmatrix}$$

Donc $D_n = \alpha \cdot (\alpha - 1)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

(3) Le rang d'une matrice - c'est la dimension de l'image de l'endomorphisme correspondant. Le théorème de rang nous permet de calculer le rang quand on connait la dimension de noyau :

$$\mathrm{rg} A_n = n - \dim \ker A_n.$$

Ici le noyau est 0 quand le déterminant de A_n est non-nul, i.e. pour $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, donc le rang de A dans ce cas est maximal et égale à n.

Le noyau a la dimension 1 pour $\alpha = 0$, ($\alpha = 0$ est une racine simple de polynôme de déterminant), donc <u>le rang pour $\alpha = 0$ est $n - 1$.</u> Ce qui est aussi évident du fait que la matrice A_n avec $\alpha = 0$ a $n - 1$ colonnes linéairement independents :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour <u>$\alpha = 1$ on a le rang égale à 1,</u> ce qui est aussi évident de la forme de la matrice :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice III. *Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) *Déterminer le polynôme caractéristique de M.*
(2) *Quels sont les valeurs propres de M ?*
(3) *M est-elle diagonalisable ?*
(4) *Déterminer les sous-espaces propres.*
(5) *Déterminer une base formée de vecteurs propres de M.*
(6) *Ecrire la matrice P telle que la matrice $N = P^{-1}MP$ soit une matrice diagonale.*
(7) *Calculer M^n pour tout entier naturel n.*
(8) *M est-elle inversible ?*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Par définition le polynôme caractéristique de M :

$$\det(M - \lambda \mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4)(\lambda+4)$$

(2) Les valeurs propres de M alors sont $0, 4, -4$.

(3) M est diagonalisable en tant que l'application de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec trois valeurs propres distinctes.

(4) Il y a trois sous-espaces propres, chaque de dimension 1. Cherchons les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ qui est égale à $0, 4, -4$. On resout des équations : $Mv = \lambda v$, où $v = (x, y, z)$.

$$Mv = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z \\ x+2y+z \\ 2x+4y-2z \end{pmatrix}$$

(a) Pour $\lambda = 0$: $Mv = 0 \cdot v$ on a le système

$$\begin{cases} 4z & = & 0 \\ x+2y+z & = & 0 \\ 2x+4y-2z & = & 0 \end{cases}$$

qui donne comme vecteur propre $\begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc on peut prendre le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Pour $\lambda = 4$: $Mv = 4v$ on a le système

$$\begin{cases} 4z & = & 4x \\ x+2y+z & = & 4y \\ 2x+4y-2z & = & 4z \end{cases}$$

qui donne comme vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$. Donc on peut prendre le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Pour $\lambda = -4$: $Mv = -4v$ on a le système

$$\begin{cases} 4z & = & -4x \\ x+2y+z & = & -4y \\ 2x+4y-2z & = & -4z \end{cases}$$

qui donne comme vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$. Donc on peut prendre le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(5) Les trois vecteurs

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

forme une base dans $\mathbb{R}^3$ car ce sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendents. On peut voir leur independence par exemple du fait que le déterminant de la matrice formée de ces trois vecteurs n'est pas 0 :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \det P = 4 \neq 0.$$

(6) La matrice P a pour l'inverse

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \det P = 4 \neq 0.$$

La matrice diagonale - est la matrice avec les valeur propres sur la diagonale :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(7)

$$M^n = (PNP^{-1})^n = PN^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4^n + (-4)^n & 2(4^n + (-4)^n & -4^n + 3 \cdot (-4)^n \\ 4^n & 2 \cdot 4^n & -4^n \\ 4^n - (-4)^n & 2(4^n - (-4)^n & -4^n - 3 \cdot (-4)^n \end{pmatrix}$$

(8) M n'est pas inversible car son déterminant est nul.