

Mass 41: Algèbre (L2) – Examen Partiel I.

Lundi, 29 mars 2010

Durée : 1 heure 30 minutes

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Soit t un paramètre réel, et $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f_t(x, y, z) = (X, Y, Z)$, où

$$\begin{cases} X = x - y \\ Y = -x + 2y + z \\ Z = tx + y + z \end{cases}$$

- (1) Ecrire la matrice A_t de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- (2) Montrer que, pour $t \neq 0$, la matrice A_t est inversible et calculer son inverse.
- (3) Soit $F = \ker f_0$ et $G = \text{Im} f_0$; calculer une base de F et un système d'équation qui définit l'espace G .
- (4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
- (5) Le système

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

admet-il au moins une solution ?

- (6) Même question pour le système

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice II. Soit α un nombre réel, et la matrice A_n à n lignes et n colonnes définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad D_n = \det A_n$$

- (1) Calculer D_n pour $n = 2$, $n = 3$.
- (2) Montrer que, pour $n \geq 2$, $D_n = (\alpha - 1)D_{n-1}$, et calculer D_n pour tout $n \geq 1$.
- (3) Déterminer le rang de A_n suivant les valeurs de α .

Exercice III. Soit h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- (1) Déterminer le polynôme caractéristique de M .
- (2) Quels sont les valeurs propres de M ?
- (3) M est-elle diagonalisable ?
- (4) Déterminer les sous-espaces propres.
- (5) Déterminer une base formée de vecteurs propres de M .
- (6) Ecrire la matrice P telle que la matrice $N = P^{-1}MP$ soit une matrice diagonale.
- (7) Calculer M^n pour tout entier naturel n .
- (8) M est-elle inversible ?