Exo I La forme bilinéaire donnée par la matrice $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ est: pour $v=(x,y)$
$w=(x',y')$

$$B((x,y),(x',y')) = 5xx' + 4yy' + 2xy' + 2x'y$$

Axiomes de produit scalaire:

1. bilinéarité - evident
2. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ evidente aussi.
3. $\langle v, v\rangle \geq 0$ et si $\langle v, v\rangle = 0$ alors $v=0$.

$$B((x,y),(x,y)) = 5x^2 + 4y^2 + 4xy$$

$$= 4x^2 + (2y+x)^2 \geq 0 \quad \forall (x,y)$$

donc c'est un produit scalaire.

Exo II

(1) $q(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -6\\ -2 & -6 & 1\end{pmatrix}}$$

(2) $\varphi((x_1, x_2, x_3),(y_1, y_2, y_3)) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$
$- 6x_2y_3 - 6x_3y_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + x_1y_2 + x_2y_1$

(3) $q(x) = \underline{4x_1^2} + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 - \underline{4x_1x_3} + \underline{2x_1x_2}$

$= (2x_1)^2 + 2\cdot(2x_1)\left(-x_3 + \frac{x_2}{2}\right) + \left(-x_3 + \frac{x_2}{2}\right)^2$

$-\left(-x_3 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3 = \left(2x_1 - x_3 + \frac{x_2}{2}\right)^2$

$- x_3^2 - \frac{x_2^2}{4} + x_2x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_2x_3$

$= \left(2x_1 - x_3 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}x_2^2 - 11x_2x_3$

$$= \left(2x_1 - x_3 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}x_2\right)^2 - \underbrace{\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot 2\cdot\frac{11}{\sqrt{15}}}_{=11} x_2 x_3$$

$$+\left(\frac{11}{\sqrt{15}}x_3\right)^2 - \left(\frac{11}{\sqrt{15}}x_3\right)^2 = \left(2x_1 - x_3 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}x_2 + \frac{11}{\sqrt{15}}x_3\right)^2$$

$$= \boxed{\left(2x_1 - x_3 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}x_2 + \frac{11}{\sqrt{15}}x_3\right)^2 - \frac{121}{15}x_3^2}$$

Base orthogonale alors est

$$\boxed{\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{11}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{11}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} \right\}}$$

la matrice dans cette base $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Rang est } 3 \text{ et sign } (2,1) : ++-}$.

vect isotropes: $B((X,Y,Z),(X,Y,Z)) = 0$

Pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ le vect. isotrope est facile à trouver — c'est un vecteur à coord. (X, Y, Z) dans le base $\mathcal{B}'$ qui satisfait :

$$(X\,Y\,Z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0 \iff X^2 + Y^2 - Z^2 = 0 \quad (*)$$

Dans la base $\mathcal{B}'$ alors on a les vecteurs isotropes

$$X\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{11}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$ avec la condition $(*)$

(5) L'orthogonal de Vect(e_1, e_2+3e_3) l'espace de dim 2 (2 vect lin. indép.)

En $\mathbb{R}^3$ l'orthogonal à un esp. de dim 2 est de dim 1. On cherche alors une droite. Soit $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ est son vecteur-directeur. Alors

$$\begin{cases} \langle \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 , e_1 \rangle = 0 \\ \langle \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 , e_2 + 3e_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \langle e_1, e_1 \rangle + \beta \langle e_2, e_1 \rangle + \gamma \langle e_3, e_1 \rangle = 0 \\ \alpha \left(\langle e_1, e_2 \rangle + 3 \langle e_1, e_3 \rangle \right) + \beta \left(\langle e_2, e_2 \rangle + 3 \langle e_2, e_3 \rangle \right) \\ \quad + \gamma \left(\langle e_3, e_2 \rangle + 3 \langle e_3, e_3 \rangle \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha(1 + 3\cdot(-2)) + \beta(4 + 3\cdot(-6)) + \gamma((-6) + 3\cdot 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ -5\alpha - 14\beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 2\gamma - 4\alpha \\ 5\alpha + 28\gamma - 56\alpha + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{31}{51}\gamma \\ \beta = \frac{-22}{51}\gamma \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 31 \\ -22 \\ 51 \end{pmatrix} \right\}}$$

Exo III

(1) Bilinéaire : par les propriétés de l'intégr.
Symétrique : évident : $f(P,Q)=f(Q,P)$
Défini positif :

$$f(P,P)=\int P^2(x)(1+x^2)\,dx$$ – intégrale d'une fn. positive est positive : $0\leq P^2(1+x^2)$

$$\Rightarrow \int_a^b 0\,dx \leq \int_a^b P^2(1+x^2)\,dx$$

(2) une famille

h	1	x	x^2
1	0	1	2
x	1	2	3
x^2	2	3	4

$h\geq 0$

$$\int_{-1}^{1} x^h(1+x^2)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^h+x^{h+2})\,dx$$

$$=\left[\frac{x^{h+1}}{h+1}+\frac{x^{h+3}}{h+3}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{h+1}+\frac{1}{h+3}-\frac{(-1)^{h+1}}{h+1}-\frac{(-1)^{h+3}}{h+3}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4h+8}{(h+1)(h+3)} & h \text{ pair}\\[2ex] 0 & h\text{ impair}\end{cases}$$

f	1	x	x^2
1	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{16}{15}$
x	0	$\frac{16}{15}$	0
x^2	$\frac{16}{15}$	0	$\frac{24}{35}$

Ici – on a la table de multiplication des éléments 1, x, x^2. On voit que puisque il y a les produits non-diagonalle non-nul la famille n'est pas orthogonal. (Pour montrer ça il suffit de calculer juste un des produit non-diagonal non-zéro, par exemple : $\langle x^2, 1\rangle$

(3) On cherche une base e_1, e_2, e_3 dont le premier vecteur

Gram-Schmidt :

Prenons $e_1 = 1$

alors $\langle e_1, e_1 \rangle = \frac{8}{3}$ donc

e_1 normalisé : $\tilde{e}_1 = \sqrt{\frac{8}{3}}^{\,1} e_1 \quad \left(= \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot 1\right)$

Le deuxième vecteur $e_2 = x + \lambda 1$

mais puisque $\langle 1, x \rangle = 0$, $\lambda = 0$

Donc $e_2 = x$ $\quad \langle x, x \rangle = \frac{16}{15} \Rightarrow$

normalisé : $\tilde{e}_2 = \frac{4}{\sqrt{15}} e_2 \left(= \frac{4}{\sqrt{15}} x \right)$

Cherchons $e_3 = x^2 + \mu x + \gamma$

t. q. $\langle e_3, e_1 \rangle = 0$ et $\langle e_3, e_2 \rangle = 0$

Du coup, $\mu = \langle x^2, x \rangle$ et $\gamma = \langle x^2, 1 \rangle$

$\mu = 0$ et $\gamma = \frac{16}{15}$

$$e_3 = x^2 + \frac{16}{15} \cdot 1$$

$$\langle e_3, e_3 \rangle = \langle x^2, x^2 \rangle + 2 \langle \tfrac{16}{15} \cdot 1, x^2 \rangle + \langle 1, 1 \rangle$$

$$= \frac{24}{35} + 2 \cdot \left(\frac{16}{15}\right)^2 + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{24 \cdot 15^2 + 2 \cdot 16^2 \cdot 35 + 8 \cdot 35 \cdot 15 \cdot 5}{35 \cdot 15^2}$$

Donc

$$\tilde{e}_3 = \frac{x^2 + \frac{16}{15} \cdot 1}{\langle e_3, e_3 \rangle} = \frac{(15x^2 + 16 \cdot 1) \cdot 35}{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^2 + 2^5 \cdot 5 \cdot 7 + 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 3}$$

$$= \frac{(15x^2 + 16 \cdot 1) \sqrt{7}}{(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 + 2^5 \cdot 7 + 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7)^{1/2}}$$

Exercice IV

(1) $v_1 = (1,-1,2)$ orthogonal

$v_2 = (1,0,1)$ $\rightsquigarrow \begin{cases} e_1 = v_1 \\ e_2 = v_1 + \alpha v_2 \end{cases}$

On cherche α de sort que

$\langle e_1, e_2 \rangle = 0$

$\langle v_1, v_1 \rangle + \alpha \langle v_1, v_2 \rangle = 1+1+4$

$+\alpha(1+2) = 0$ $6+3\alpha=0 \Rightarrow \alpha = -2$

normalization : $\begin{cases} \tilde{e}_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \boxed{\dfrac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}} \\ \tilde{e}_2 = \dfrac{e_2}{\|e_2\|} = \boxed{\dfrac{(-1,-1,0)}{\sqrt{2}}} \end{cases}$

$e_2 = (1,-1,2) - 2\cdot(1,0,1)$

$= (-1,-1,0)$

(2) $\dim G = 2$ donc $\boxed{\dim G^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim G = 1}$

On cherche un vecteur-directeur (x,y,z) t.q.

$\begin{cases} 0 = (x,y,z)\cdot(1,-1,2) = x - y + 2z \\ 0 = (x,y,z)\cdot(-1,-1,0) = -x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = -y \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La base orthonormale de $G^\perp$ est

$\boxed{\dfrac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}}}$

(3) Projection orthogonale: $(1,1,1)$ à G :

dans la base orthonormé $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$

On a $\quad \mathrm{Proj}'(1,1,1) = \langle (1,1,1), \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1$
$\qquad + \langle (1,1,1), \tilde{e}_2 \rangle \tilde{e}_2$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \langle (1,1,1), (1,-1,2) \rangle \tilde{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (1,1,1), (-1,-1,0) \rangle \tilde{e}_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (1 - 1 + 2) \cdot (1,-1,2) + \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 - 1) \cdot (-1,-1,0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 2 \cdot (1,-1,2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2)(-1,-1,0)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$= \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)}$$