Mass41 - Algebre - Examen Finale - Corrigé

Note Title 6/23/2010

Exo I. $g^2 + g - 6\,\mathrm{Id}_E = (g + 3\,\mathrm{Id}_E)(g - 2\,\mathrm{Id}_E)$
est un polynôme minimale de g, i.e. polynôme de degré minimale qui annulé par g. Par le thm. de Caley-Hami~~lton~~ ses racines sont les valeurs propres de g. Donc les valeurs propres de g sont 2 et -3.

Exo II. (1) L'ensemble F est non-vide et si $v, w \in F$ alors $\lambda v + \mu w \in F$ (linéarité) donc F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$

L'ensemble G est non-vide soit v et w deux elements de G t.q. $v = (x, y, z)$, $w = (x', y', z')$ avec $2x + y - z = 0$ et $2x' + y' - z' = 0$ alors pour $\lambda v + \mu w = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$ on a

$$2(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y' - (\lambda z + \mu z') = 0$$

et $\lambda v + \mu w \in G$.

(2) Une base de F: les vecteurs
$f_1 = (2, 1, 0)$ et $f_2 = (-1, 1, -1)$ sont bien indep et dans F (obtenu de $(x, y) = (1, 0)$ et $(x, y) = (0, 1)$)

une base de G:
$g_1 = (1, -2, 0)$ et $g_2 = (0, 1, 1)$ par exemple

(3) Par conséquent, $\dim F = 2$ et $\dim G = 2$

(4) un vect. de F $(2x - y, x + y, -y)$ est aussi un vecteur de G si

$$2(2x - y) + x + y - (-y) = 0$$

alors $4x - 2y + x + y + y = 0$

$x = 0$, y quelconque donc

$f_2 = (-1, 1, -1) \in G$ en effet, $f_2 = -g_1 - g_2$

Donc $F \cap G = \mathrm{Vect}(1,-1,1)$

Exo III. (1)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & X & X^2 & X^3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & -1 & 0 & 0 \\ X^2 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ X^3 & 0 & 6 & 0 & -9 \end{array}$$

Calcul:

$P = X^2$

$(1-X^2)P'' - XP'$

$= 2(1-X^2) - X \cdot 2X$

$P = X^3$

$(1-X^2) \cdot 6X - X \cdot 3X^2$

$= 6X - 6X^3 - 3X^3$

(2) comme $u(1) = 0$

$\{1\}$ est dans le ker u

Montrons que $u(ax + bx^2 + cx^3) = 0$ n'a pas de solution, ce qui signifie que ce sont que des scalairs qui appartiennent au noyau :

$$u(ax + bx^2 + cx^3) = (1-x^2)(2b + 6c) - x(a + 2bx + 3cx^2)$$

$$= 2b - 2bx^2 + 6c - 6cx^2 - ax - 2bx^2 - 3cx^3$$

$= 2b + 6c - ax - (4b - 6c)x^2 - 3cx^3 = 0 \Rightarrow$

$2b + 6c = 0$, $a = 0$, $4b - 6c = 0$, $3c = 0 \Rightarrow$

$a = b = c = 0$.

Le rang de u est alors 3, par le thm. de rang $\dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \ker u = \mathrm{rk}\, u$

$$4 - 1 = 3$$

(3) $\det(u - \lambda\, \mathrm{Id}) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -9-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1+\lambda)(4+\lambda)(9+\lambda)$$

les valeurs propres sont $\{0, -1, -4, -9\}$

(4) a. $\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive

b. la table de multiplication:

$$\int_{-1}^{1} x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

n	1	x	x^2	x^3
1	0	1	2	3
x	1	2	3	4
x^2	2	3	4	5
x^3	3	4	5	6

$\langle\ \rangle$	1	x	x^2	x^3
1	2	0	2/3	0
x	0	2/3	0	2/5
x^2	2/3	0	2/5	0
x^3	0	2/5	0	2/7

Le fait que il y a des termes non-diagonales non-nuls montre que c'est une famille non-orthogonale.

(c) Une base orthonormale:

$$e_1 = \boxed{1}$$

$$\tilde{e}_2 = x + \lambda \cdot 1$$

$$\langle 1, x + \lambda 1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\langle x, x \rangle = 2/3 \Rightarrow e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle^{1/2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\, x}$$

$$\tilde{e}_3 = x^2 + \lambda \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, x + \mu \cdot 1$$

$$\langle \tilde{e}_3, e_1 \rangle = \langle \tilde{e}_3, e_2 \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle x^2 + \lambda \sqrt{\frac{3}{2}}\, x + \mu \cdot 1, 1 \rangle = \frac{2}{3} + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{2}{3}$$

$$\langle x^2 + \lambda \sqrt{\frac{3}{2}}\, x - \frac{2}{3} \cdot 1, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \rangle = \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

donc $\tilde{e}_3 = x^2 - \frac{2}{3} \cdot 1$

$$\langle \tilde{e}_3, \tilde{e}_3 \rangle = \langle x^2 - \frac{2}{3} \cdot 1, x^2 - \frac{2}{3} \cdot 1 \rangle$$

$$= \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\langle \tilde{e}_3, \tilde{e}_3 \rangle^{1/2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\, \tilde{e}_3 = \boxed{\sqrt{\frac{5}{2}} \left[x^2 - \frac{2}{3} \cdot 1 \right]}$$

$$\tilde{e}_4 = x^3 + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$$

$$\langle \tilde{e}_4, e_1 \rangle = 0, \quad \langle \tilde{e}_4, e_2 \rangle = 0, \quad \langle \tilde{e}_4, e_3 \rangle = 0$$

$$\langle x^3 + \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3, e_1 \rangle = \langle x^3, 1 \rangle + \lambda = 0 + \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

$$\langle x^3 + \mu e_2 + \nu e_3, e_2 \rangle = \langle x^3, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \rangle + \mu + 0 =$$

$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5} + \mu = 0 \quad \Rightarrow \mu = -\frac{\sqrt{6}}{5}$

$\langle x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot e_2 + \gamma e_3, e_3 \rangle = \langle x_3, e_3 \rangle + \gamma$

$= \langle x^3, \sqrt{\frac{5}{2}}(x^2 - \frac{2}{3} \cdot 1) \rangle + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$\tilde{e}_4 = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} x$

$e_4 = \frac{\tilde{e}_4}{\langle \tilde{e}_4, \tilde{e}_4 \rangle^{1/2}} = \boxed{\frac{x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} x}{54 - 28\sqrt{6}} \quad 5\sqrt{7}}$

$\langle \tilde{e}_4, \tilde{e}_4 \rangle = \frac{2}{7} + \frac{6}{25} \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{54 - 28\sqrt{6}}{7 \cdot 25}$

---

ex° IV

(1) Soit $X = (x_1, x_2, x_3)$ - un vecteur dans la base $\mathcal{B}$

$q(X) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_2 + 2x_3$

$\varphi(X, Y) = 2 x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1$

$+ x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3$

où $Y = (y_1, y_2, y_3)$ - un autre vecteur dans la base $\mathcal{B}$

(2) Trois vecteurs forme une base si c'est une famille libre :

$a e_1 + b(-\frac{1}{2} e_1 + e_2) + c(-e_2 + e_3) = 0$

$\Rightarrow e_1(a - \frac{1}{2} b) + e_2(b - c) + e_3 \cdot c = 0$

car $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base canonique

cela implique que

$$\begin{cases} a - \frac{1}{2} b = 0 \\ b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0 \iff$$

la famille est libre.

La matrice de q dans cette base :

$\langle e_1, e_1 \rangle = 2$

$\langle e_1, -\frac{1}{2} e_1 + e_2 \rangle = -1 + 1 = 0$

$\langle e_1, -e_2 + e_3 \rangle = 0$

$\langle -\frac{1}{2} e_1 + e_2, -\frac{1}{2} e_1 + e_2 \rangle = +\frac{1}{4} \cdot 2 - 1 + 1 = \frac{1}{2}$

$\langle -\frac{1}{2} e_1 + e_2, -e_2 + e_3 \rangle = \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 1$
$= 0$

$\langle -e_2 + e_3, -e_2 + e_3 \rangle = 1 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$

Donc, la matrice est

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang est 3 et la signature est $\underset{+++}{(3,0)}$

Exo V

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\varphi(X, Y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1$
$- x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 2x_3y_3$

(3) $\left(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3\right) = (\sqrt{2}x_1)^2 + 2(\sqrt{2}x_1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)$
$+ 2\cdot(\sqrt{2}x_1)\cdot(\sqrt{2}x_3) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2 + (\sqrt{2}x_3)^2$
$+ 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\sqrt{2}x_3 - \underline{\frac{x_2^2}{2} - 2x_3^2} - 2x_2x_3$

$q(x) = \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2}x_3\right)^2 - \frac{x_2^2}{2} - x_2^2 + 4x_2x_3$
$- 2x_3^2 + 2x_3^2 =$
$= \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2}x_3\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x_2\right)^2 + 2\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x_2\right)\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}x_3\right)$
$- \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}x_3\right)^2 + \frac{8}{3}x_3^2$

$= \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \sqrt{2}x_3\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}x_2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}x_3\right)^2$
$+ \frac{8}{3}x_3^2$
$= 2\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + x_3\right)^2 - 6\left(\frac{x_2}{2} - \frac{2}{3}x_3\right)^2$
$+ \frac{8}{3}x_3^2$

Dans la base alors $E = e_1 + \frac{e_2}{2} + e_3$,
$F = \frac{e_2}{2} - \frac{2}{3}e_3$ et $G = e_3$ on a la matrice
diagonale de q :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$ du rang 3
et de signature $(++,-)$

Les vect. isotropes : $\langle Z, Z\rangle = 0$
sont $\langle aE + bF + cG, aE + bF + cG\rangle = 0$
les coeffs (a, b, c)
satisfont alors :
$$2a^2 - 6b^2 + \frac{8}{3}c^2 = 0$$

(5) L'orthogonal de $\text{Vect}(e_1, 2e_2+e_3)$ est de dim 1. Donc on cherche un vecteur (a,b,c) t.q. $((a,b,c),(1,0,0))=0$ et $((a,b,c),(0,2,1))=0$

On a $\begin{cases} 2a + b + 2c = 0 \\ 2(a-b+3c) + 1\cdot(a+3b+2c) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2(a+c) \\ 4a+b+8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2(a+c) \\ a = -3c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c \\ b = 4c \end{cases}$

donc l'espace orthogonal est engendré par un vecteur $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exo VI

(1) $v_1 = (0,3,4) \rightsquigarrow e_1 = \frac{(0,3,4)}{\sqrt{\langle (0,3,4),(0,3,4)\rangle}} = \underline{\underline{\frac{1}{5}(0,3,4)}}$

$\tilde{e}_2 = v_2 + \lambda e_1$

$\langle \tilde{e}_2, e_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2, e_1 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 \rangle = 0$

$\lambda = -\langle (1,0,1), (0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}) \rangle = -\frac{4}{5}$

$\tilde{e}_2 = (1,0,1) - \frac{4}{25}(0,3,4) = \frac{1}{25}(25,-12,9)$

$\langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{25}\sqrt{25^2+12^2+9^2} = \frac{\sqrt{850}}{25} = \frac{\sqrt{25\cdot 34}}{25}$

$\underline{\underline{e_2 = \frac{5}{\sqrt{34}}(25,-12,9)}}$

(2) $G^{\perp}$ est de dim 1 (G est de dim 2 en $\mathbb{R}^3$) alors il suffit de trouver un vect. v t.q.

$\langle v, v_1 \rangle = 0$ et $\langle v, v_2 \rangle = 0$

$$\begin{cases} 3y + 4z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{4}{3} z \\ x = -z \end{cases} \qquad 1^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{34}{9}$$

On peut prendre $\left(-1, -\frac{4}{3}, 1\right)$ comme vecteur de base de $G_1^{\perp}$ orthonormale: $\frac{3}{\sqrt{34}}\left(1, \frac{3}{4}, -1\right)$

(3) la projection orthog :

$$\langle (1,-1,1), e_1 \rangle e_1 + \langle (1,-1,1), e_2 \rangle e_2 =$$

$$\frac{1}{5} \langle (1,-1,1), (0,3,4) \rangle \frac{1}{5}(0,3,4) + \frac{1}{5\sqrt{34}} \langle (1,-1,1), (25,-12,9) \rangle$$

$(25,-12,5)$

$$= \frac{1}{25} \cdot (0,3,4) + \frac{1}{25 \cdot 34} \underbrace{(25+12+9)}_{46} (25,-12,9)$$

$$= \frac{1}{25 \cdot 17} \Big(0 + 23 \cdot 25, \underbrace{3 \cdot 17 + 23 \cdot (-12)}_{225}, \underbrace{4 \cdot 17 + 23 \cdot 9}_{275} \Big)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{23}{17}, \frac{9}{17}, \frac{11}{17} \right)}}$$