

Université Claude Bernard – Lyon 1
Mass 41: Algèbre (L2) – Examen Partiel II.

Mardi, 15 juin 2010. Durée : 2 heures

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Soit g un endomorphisme de E , espace vectoriel réel de dimension finie.

Si $g^2 + g - 6Id_E = 0$, quelles peuvent être les valeurs propres de f ?

Exercice II. On pose les sous-ensembles de \mathbb{R} suivants :

$$F = \{(2x - y, x + y, -y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

- (1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
- (2) Déterminer une base de F et une base de G .
- (3) Déterminer les dimensions de F et G .
- (4) Déterminer $F \cap G$.

Exercice III. On considère l'endomorphisme u de l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3 défini par

$$u : P \mapsto (1 - X^2)P'' - XP'$$

- (1) Ecrire la matrice de u dans la base de $\mathbb{R}_3[X]$ constitué des polynômes $1, X, X^2, X^3$.
- (2) Quel est le noyau de u ? Quel est rang de u ?
- (3) Quelles sont les valeurs propres de u ? L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
- (4) Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx.$$

- (a) Montrer que f définit un produit scalaire sur F .
- (b) Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, $\{1, X, X^2, X^3\}$, forme une famille non orthogonale.
- (c) Déterminer une base orthonormale de $(\mathbb{R}_3[X], f)$.

Exercice IV. Soit q la forme quadratique de \mathbb{R}^3 de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3

- (1) Donner l'expression analytique de q dans \mathcal{B} et expliciter sa forme polaire ϕ .
- (2) Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1, -\frac{1}{2}e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de q dans cette base.
- (3) Trouver le rang et la signature de q .

Exercice V. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique définie par :

$$q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2.$$

- (1) Ecrire la matrice A de q dans la base \mathcal{B} .
- (2) Donner la forme polaire ϕ qui lui est associée.
- (3) Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires. En déduire une diagonalisation de A en précisant la base orthogonale ainsi que le rang et la signature de q .
- (4) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes.
- (5) Trouver l'orthogonal de $Vect(e_1, 2e_2 + e_3)$.

Exercice VI. Soit G un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs : $v_1 = (0, 3, 4)$, $v_2 = (1, 0, 1)$. Déterminer

- (1) une base orthonormale de G ,
- (2) une base orthonormale de G^\perp , l'espace orthogonale à G ,
- (3) la projection orthogonale de $(1, -1, 1)$ à G .