

## Révision Algèbre linéaire

**Exercice 1** Trouver l'angle  $\theta$  entre les vecteurs joignant (dans un repère orthonormé) l'origine aux points  $P_1 \equiv (1, 2, 3)$  et  $P_2 \equiv (2, -3, -1)$ .

**Exercice 2** On considère dans un repère orthonormé les trois points  $P_1 \equiv (1, 1, 1)$ ,  $P_2 \equiv (1, 2, 3)$  et  $P_3 \equiv (0, 0, 2)$ . Calculer le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs  $\vec{u} = \vec{OP}_1$ ,  $\vec{v} = \vec{OP}_2$  et  $\vec{w} = \vec{OP}_3$ .

**Exercice 3** Trouver la distance du point  $P(1, 2, 3)$  à (a) l'origine, (b) l'axe  $Ox$ , (c) le plan des  $xy$ , (d) le point  $Q(3, -1, 5)$ .

### Exercice 4

Trouver l'angle entre les deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$$

### Exercice 5

Considérons les matrices réelles  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A(A - (a + d) \cdot I) + \det(A) \cdot I$ .
2. Retrouver la formule pour la matrice inverse de  $A$  en supposant que le déterminant de  $A$  est non nul.

### Exercice 6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A^2 - 4A + 3I$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \geq 1$ .

### Exercice 7

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour montrer que  $A$  est inversible. Préciser son inverse.

### Exercice 8

On considère les vecteurs  $u = (2, -2, 2)$ ,  $v = (0, -1, 2)$ ,  $w = (1, -2, 3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

1. La famille  $(u, v, w)$  est-elle libre ?

2. Donner une base de  $F = Vect(u, v, w)$ .
3. Soit  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ . Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel (sev) de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer une base de  $G$ .
4. Comparer  $F$  et  $G$ .

### Exercice 9

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par

$$f(x, y) = (2x + y, x, 3x + y)$$

Vérifier que  $f$  est linéaire. Ecrire la matrice de  $f$  par rapport aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 10

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (2, 3, 4)$  et  $u_3 = (4, 9, 16)$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Ecrire la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .
3. Ecrire la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

### Exercice 11

Soit la matrice :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et soient les vecteurs  $u = (-1, 0, -1)$ ,  $v = (-3, 2, 0)$ ,  $w = (0, 1, 0)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer la matrice de passage  $P$  de la base canonique  $\mathcal{C} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  dans  $\mathcal{B}$ .
2. Vérifier que  $P$  est inversible et calculer sa matrice inverse  $P^{-1}$ .
3. Calculer  $P^{-1}AP$ . En déduire l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 12

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les réels  $\lambda$  pour lesquels  $f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  n'est pas inversible.
2. Déterminer le noyau des  $f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  pour les  $\lambda$  obtenus.
3. En déduire une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est simple.

### Exercice 13

Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et préciser son inverse.